第 13 卷 第 1 期 1987 年 1 月
自动化学报 ACTA AUTOMATICA SINICA
Vol. 13, No. 1 Jan., 1987

非线性系统降阶观测器的构造

柳星 喻学恒
(海军工程学院)

摘　　要

本文主要基于李雅普诺夫稳定性概念、指数观测器和系统指数可观的概念[1]探讨了如下式所示系统建立降阶观测器的理论及方法.

$$\dot{x} = Ax + f(x),\ y = Hx.$$

一、引　　言

非线性系统建立观测器问题是 1973 年由 Thau 首次提出的. 他构造了某类非线性系统的渐近状态观测器. 这类系统后被归结为非线性扰动系统. Kou (1975) 定义了指数观测器的概念和所谓误差方程的李雅普诺夫式函数，讨论了非线性系统及其观测器结构与误差方程李雅普诺夫函数之间的关系，为建立非线性观测器提供了一条有效的途径. Banks (1981) 继他们之后，用非线性常数变分法在内积空间中研究建立非线性观测器问题，解决了对系统与输出方程均为非线性的系统建立非线性观测器的问题.

本文将主要基于李雅普诺夫稳定性概念，延用 Kou 的指数观测器等概念，借助 Banks 的研究成果，讨论建立非线性系统的降阶观测器问题.

二、非线性系统降阶观测器的构造

设某系统运动方程及输出方程为:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{y} = H\boldsymbol{x}. \tag{1}$$

它满足 Banks 的定理条件[2]，故可对其建立一个指数观测器，即该系统是指数可观的[2]. 不失一般性，令 $H = [1_q\ \ 0]$ 即 $\boldsymbol{y} = H\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1$. 由于从输出中已经得到 $\boldsymbol{x}_1$ 的值，故只需构造 $\boldsymbol{x}_2$ 的状态观测器. 为此，重新描述原系统(1)

$$\dot{\boldsymbol{x}}_1 = A_{11}\boldsymbol{x}_1 + A_{12}\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}), \tag{2}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_2 = A_{21}\boldsymbol{x}_1 + A_{22}\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}), \tag{3}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_1. \tag{4}$$

由式(4)可得 $\dot{\boldsymbol{y}} = \dot{\boldsymbol{x}}_1$, 再作进一步运算得

本文于 1985 年 1 月 30 日收到.

$$\boldsymbol{y}_0 = \dot{\boldsymbol{y}} - A_{11}\boldsymbol{y} = \dot{\boldsymbol{x}}_1 - A_{11}\boldsymbol{x}_1,\ \text{由式(2)知}$$

$$\boldsymbol{y}_0 = A_{12}\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}). \tag{5}$$

此时,式(3)(5)重新构成一个动态方程及输出方程组, 可利用间接得到的 $\boldsymbol{y}_0$ 构造 $\boldsymbol{x}_2$ 的状态观测器.

对于由式(3)(5)构成的系统,如果存在矩阵 $P(t)$,使得有

$$\lambda(A_{22} + D\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}) + P(t)(A_{12} + D\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x})) \leqslant -\varepsilon < 0, \tag{6}$$

$\boldsymbol{f}(\cdot)$ 为解析的,则系统(1)是降阶可观的. 其降阶观测器动态方程式为

$$\dot{\boldsymbol{z}} = A_{22}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{f}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{z}\end{pmatrix} + P\left(A_{12}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{f}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{z}\end{pmatrix} - \boldsymbol{y}_0\right) + A_{21}\boldsymbol{x}_1. \tag{7}$$

如果系统(1)的维数为 n,输出向量 $\boldsymbol{y}$ 的维数为 q,则 $\boldsymbol{x}_2$ 的维数为 $(n-q)$, 其他分块系统矩阵的维数和与 $\boldsymbol{x}_2$ 的状态观测器有关矩阵的维数可据 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 及 $\boldsymbol{y}$ 的维数推算出来.

对系统(2)—(4)有

定理 1. 如果 a) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 满足 Lipschitz 条件,即

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\| \leqslant K\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|,\ \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \Omega, \tag{8}$$

且有 $\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}_1)$; b) (H, A) 是完全可观对; c) 存在两个正定、对称 $(n-q)\times(n-q)$ 维矩阵 P,Q 和常数 $(n-q)\times q$ 矩阵 B, 使得下式成立:

$$Q(A_{22} - BA_{12}) + (A_{22} - BA_{12})^T Q = -P, \tag{9}$$

其中 A_{ij} 是 A 的分块子矩阵, $i,j = 1,2$, 以及 d)

$$-\lambda_{\min}(P) + 2K\|Q\| \leqslant -\varepsilon < 0, \tag{10}$$

则系统(2)—(4)为降阶可观的,此处 $\lambda_{\min}(P)$ 为矩阵 P 的特征值的最小值,矩阵模

$$\|Q\| = \sqrt{\max\lambda(Q^TQ)}.$$

系统的降阶观测器为

$$\dot{\boldsymbol{z}} = (A_{22} - BA_{12})\boldsymbol{z} + \boldsymbol{f}_2\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{z}\end{pmatrix} + A_{21}\boldsymbol{x}_1 + B\boldsymbol{y}_0. \tag{11}$$

证明. 设观测误差为 $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{z}$,误差方程

$$\dot{\boldsymbol{e}} = \dot{\boldsymbol{x}}_2 - \dot{\boldsymbol{z}} = A_{22}\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}) + (A_{22} - BA_{12})\boldsymbol{z} - \boldsymbol{f}_2\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{z}\end{pmatrix} - B\boldsymbol{y}_0$$

$$= (A_{22} - BA_{12})\boldsymbol{e} + \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}_2\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{z}\end{pmatrix}. \tag{12}$$

作误差方程的李雅普诺夫函数: $V(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{e}^TQ\boldsymbol{e}$, 因 Q 为正定的, 因此有 $V(\boldsymbol{e}) \geqslant 0, \forall \boldsymbol{e}$, 当且仅当 $\boldsymbol{e} = 0$,有 $V(\boldsymbol{e}) = 0$. 对 $V(\boldsymbol{e})$ 求导:

$$\dot{V}(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{e}^TQ\dot{\boldsymbol{e}} + \dot{\boldsymbol{e}}^TQ\boldsymbol{e},$$

代入(12),(9)式得 $\dot{V}(\boldsymbol{e}) = 2\boldsymbol{e}^TQ\left[(A_{22} - BA_{12})\boldsymbol{e} + \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}_2\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{z}\end{pmatrix}\right]$. 由定理条件 C 得

$\dot{V}(\boldsymbol{e}) = -\boldsymbol{e}^TP\boldsymbol{e} + 2\boldsymbol{e}^TQ\left[\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}_2\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{z}\end{pmatrix}\right]$. 又由多变量积分的基本定理:

$$\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}_2\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{z}\end{pmatrix} = \int_0^1 \nabla \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{w}_s)\begin{pmatrix}0\\ \boldsymbol{e}\end{pmatrix}ds,$$

其中 $\boldsymbol{w_S} = s\boldsymbol{x} + (1-s)\boldsymbol{z}$，因此又有

$$\begin{aligned}\dot V(\boldsymbol{e}) &= -\boldsymbol{e}^T P\boldsymbol{e} + 2\int_0^1 \boldsymbol{e}^T Q\nabla \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{w_S})\boldsymbol{e}ds\\ &\leqslant -\lambda_{\min}(P)\|\boldsymbol{e}\|^2 + 2\|Q\nabla \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{w_S})\|\cdot\|\boldsymbol{e}\|^2\\ &\leqslant (-\lambda_{\min}(P) + 2\|Q\|\cdot K)\|\boldsymbol{e}\|^2.\\ &\leqslant (-\lambda_{\min}(P) + 2\|Q\|\cdot K)\|\boldsymbol{e}\|^2.\end{aligned}$$

若有 d) 成立，即有 $\dot V(\boldsymbol{e}) \leqslant -\varepsilon\|\boldsymbol{e}\|^2$，即所选李雅普诺夫函数确实满足条件，从而保证了误差方程以零为其渐近稳定平衡点。此即证明当系统满足定理 2 的诸条件时，存在一个以负指数为界的降维观测器，因而系统是降阶可观的。

另一个能避免对输出 $\boldsymbol{y}$ 微分的方法是：构造一个最小阶 $(n-q)$ 维辅助观测器，其状态向量为 $\boldsymbol{z}$，并全部可输出，$\boldsymbol{z} = T\boldsymbol{x}$，满足 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}T\\ H\end{pmatrix} = n$。特殊地，设定系统输出方程中的矩阵 $H = [1_q\ \ 0]$ 因而选择 $T = [0\ \ 1_{n-q}]$。下面可见，如果设 $\boldsymbol{z} = T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2$，并取观测动态方程形如

$$\dot{\boldsymbol{z}} = M\boldsymbol{z} + T\boldsymbol{f}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{z}\end{pmatrix} + G\boldsymbol{y}, \tag{13}$$

则有

定理 2. 已知非线性系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{y} = H\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1$，其中 $\boldsymbol{x}$ 为 n 维状态向量，$\boldsymbol{y}$ 为 q 维输出向量，A, H 为相应维数的常值矩阵，$\boldsymbol{f}(\cdot)$: $R^n \to R^n$。 如果 a) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 满足 Lipschitz 条件；b) 存在 $(n-q)\times(n-q)$ 维对称、正定矩阵 Q、P，使得有 $QM + M^TQ = -P$ 及 $-\lambda_{\min}(P) + 2\|Q\|\cdot K\|T\| \leqslant -\varepsilon < 0$ (其中 $\lambda_{\min}(P)$ 及 $\|Q\|$ 的定义同定理 1)；c) 存在非零矩阵 G，有 $GH + MT - TA = 0$，则系统是降阶指数可观的，且降阶观测器即为式(13)所描述的动态方程式。

证明. 证明过程和思路同定理 1. 设 $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{z} - T\boldsymbol{x}V(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{e}^TQ\boldsymbol{e}$ 为李雅普诺夫式函数.

$$\dot V(\boldsymbol{e}) = 2\boldsymbol{e}^TQ\dot{\boldsymbol{e}}$$

$$(\text{依据 c),b)}) = 2\boldsymbol{e}^TQ\left[(MT + GH - TA)\boldsymbol{x} + M\boldsymbol{e} + \boldsymbol{T}\left[\boldsymbol{f}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{z}\end{pmatrix} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\right]\right.$$

$$= -\boldsymbol{e}^TP\boldsymbol{e} + 2\boldsymbol{e}^TQT\left[\boldsymbol{f}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{z}\end{pmatrix} - f(\boldsymbol{x})\right]$$

$$(\text{依据 a)}) \leqslant -\lambda_{\min}(P)\|\boldsymbol{e}\|^2 + 2\int_0^1 \boldsymbol{e}^TQ^TT\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})(w_{\boldsymbol{S}})\begin{pmatrix}0\\ \boldsymbol{e}\end{pmatrix}d\boldsymbol{s}$$

$$\leqslant -\lambda_{\min}(P)\|\boldsymbol{e}\|^2 + 2\int_0^1 \|QT\nabla \boldsymbol{f}_{22}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{w}_s)\|\|\boldsymbol{e}\|^2d\boldsymbol{s}$$

$$\leqslant (-\lambda_{\min}(P) + 2K\|T\|\cdot\|Q\|)\|\boldsymbol{e}\|^2$$

$$(\text{依据 b)}) \leqslant -\varepsilon\|\boldsymbol{e}\|^2.$$

因此，$V(e)$ 是误差方程的李雅普诺夫函数，即有 $\lim\limits_{t\to\infty} e(t) = 0$.

由定理 2 条件 c 可知，因为 T 已经取固定形式 $T = [0 \ \ 1_{n-q}]$，M 和 G 都已经由系统矩阵唯一地决定了，同时满足三个条件的系统可能较少，但它能避免对输出向量作导数运算.

三、例

已知系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 - e^{-x_2}, \\ y = x_1 + x_2. \end{cases}$$

作满秩线性变换：$x = Tz$，$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. 变换后系统为

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-z_2} \\ e^{-z_2} \end{bmatrix}, \ y_0 = z.$$

待观测的子系统及其输出方程为

$$\dot{z}_2 = z_1 - 3z_2 + e^{-z_2}, \quad y_1 = \dot{z}_1 - 2z_1 = -4z_2 + e^{-z_2}.$$

应用第二节介绍的第一种方法，得

$$\begin{aligned} &\lambda[(a_{22} + D_{z_2}f_2(z)) + p(a_{12} + D_{z_2}f_1(z))] \\ &= \lambda(-3 - e^{-z_2} + p(-4 - e^{-z_2})) \\ &= \lambda(-3 - 4p - (1 - p)e^{-z_2}). \end{aligned}$$

据此知，对任意 $p > -0.75$ 都有 $\lambda(\cdot) \leqslant -\varepsilon < 0$. 取 $p = -0.5$，有 $\lambda(\cdot) \leqslant -1$，取 $p = 1$，有 $\lambda(\cdot) = -7$. 取 $p = 10$，有 $\lambda(\cdot) \leqslant -34$. 因此，系统为降阶可观的，其观测方程为

$$p = -0.5 \text{ 时}, \ \dot{\hat{z}}_2 = -3\hat{z}_2 + z_1 + e^{-\hat{z}_2} - 0.5(-y_1 - 4\hat{z}_2 + e^{-\hat{z}_2})$$

$$= -\hat{z}_2 + \frac{1}{2}e^{-\hat{z}_2} + z_1 + 0.5y_1;$$

$$p = 1 \text{ 时}, \ \dot{\hat{z}}_2 = -7\hat{z}_2 + 2e^{-\hat{z}_2} + z_1 - y_1.$$

变换前原系统的向量估值为 $\hat{x} = Tz$，

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} y_0 - \hat{z}_2 \\ \hat{z}_2 \end{bmatrix}$$

观测误差曲线参见图 1.

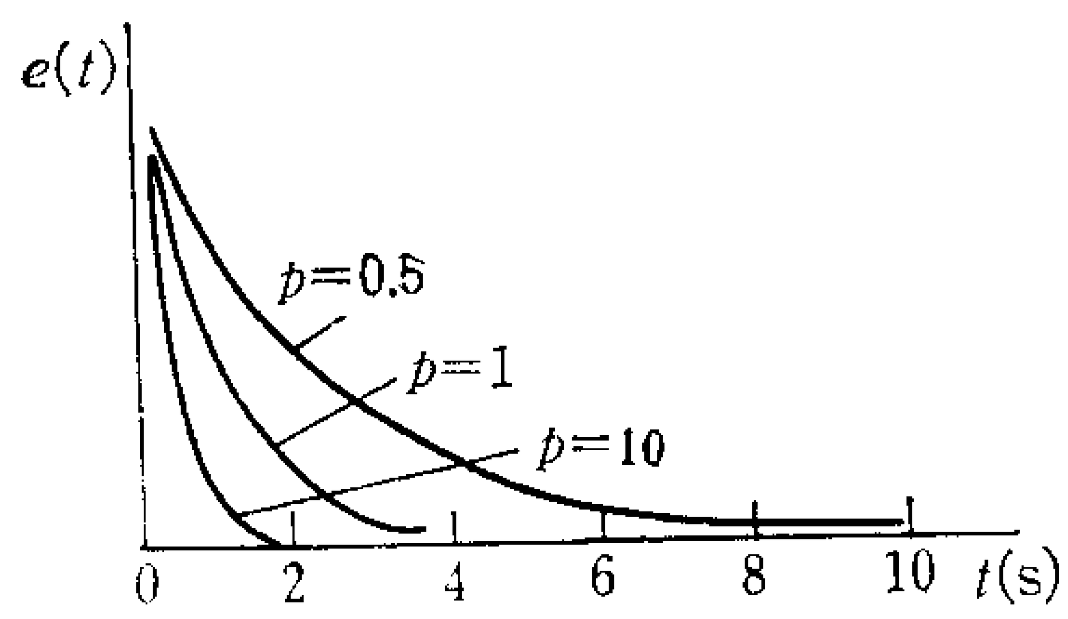

图 1　$p = -0.5, 1$ 及 10 时降阶观测器仿真曲线

参 考 文 献

[1] Kou, S. R., Elliott, D. L. & Tarn, T. J., Exponential Observers for Nonlinear Dynamic Systems, *Infor. & Contr.*, 29(1975), 204—216.

[2] Banks, S. P., A Note on Non-Linear Observers, *Int. J. Contr.*, **34**(1981), No. 1, 185—190.

[3] Thau, F. E., Observering the State of Nonlinear Dynamic Systems, *Int. J. Contr.*, **18**(1973), No. 3, 471—479.

[4] 喻学恒，现代系统理论，武汉大学出版社，1984.

THE CONSTRUCTION OF REDUCED-ORDER OBSERVERS FOR NONLINEAR SYSTEMS

Liu Xing Yu Xueheng

(Naval Engineering College)

Abstract

Based on the concepts of Lyapunov's stability, exponential observers and exponential observability of systems, this paper discusses the theory and method of reduced-order observers for the following systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x}.$$