第13卷 第1期　　自 动 化 学 报　　Vol. 13, No. 1
1987 年 1 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Jan., 1987

动态系统的随意观测性及其观测器的构造

柳 星　喻学恒
（海军工程学院）

摘　　要

本文从理论上探讨了重建系统状态变量的问题. 作者提出了"随意状态变量观测器"的概念，提出了构造随意状态变量观测器的三条定理和直接、间接两种随意状态变量观测器. 对于随意状态变量观测器与 K_x 观测器的关系，作者在文中也作了说明.

一、引　言

系统状态估计理论以系统的状态向量为估计对象，用观测器（全阶的或降阶的）的输出估计量和系统输出向量来产生所要求的状态向量或状态向量函数的估值. 在一个多变量、多层次的大系统中，若上层决策主要依赖下层某子系统的部分状态变量，那么经过复杂的计算或用硬件结构产生的该子系统状态向量估值就有一部分被"浪费"了. 避免这种浪费的途径之一是分解该子系统固有的整个状态变量——状态向量，按实际需要将系统状态变量有意识地分为待估计分量和不必估计分量，只重建部分感兴趣的变量. 这就是"随意观测"的基本思想.

本文首先引入系统随意可观测性概念，继而讨论系统随意状态变量观测器的构造条件及方法. 本文的主要对象是线性、定常、确定性系统.

二、线性、连续、确定性系统的随意可观性及其随意状态变量观测器的构造

讨论 n 阶系统

$$\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u},\quad \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} + D\boldsymbol{u}. \tag{1}$$

设 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix}$. $\boldsymbol{x}_1$ 是 m 维状态分量为待估计分量；$\boldsymbol{x}_2$ 为 n-m 维是不必观测分量. 希望只构造一个维数小于或等于 m 维的状态观器对 $\boldsymbol{x}_1$ 进行估值.

定义 1. 如果系统(1)中状态向量任意分划后得到的 $\boldsymbol{x}_1$——m 维向量都是可观测的，则称该系统为随意可观测的；如果系统 (1) 仅有部分状态向量是可随意观测的，则称其为

本文于 1985 年 1 月 30 日收到.

部分随意可观测的；部分可观测向量最多元素组内的元素(变量)个数和可分组数表示为(λ_1, λ_2),称为系统随意可观测性指数;观测性指数为$(n, 1)$的系统为绝对完全可观系统;如果用r维$(r \leqslant m)$状态重建器能估计$\boldsymbol{x}_1$的状态,就称系统(1)为$\boldsymbol{x}_1(m, 1)$随意可观测的.

由此定义可得下面的结论：1)随意可观测指数中的第一个元素λ_1等于通常所说的可观测性指数,即$\lambda_1 = \operatorname{rank}[C^T(CA)^T\cdots(CA^{n-1})^T]$；2)完全随意可观测系统的可观测指数为$(n,2^n)$,故完全可观测系统(一般意义下的)包含在可观测指数为$(n, \cdot)$的系统类中.

将系统(1)作适当分划后可表示为

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}_1 = A_{11}\boldsymbol{x}_1 + A_{12}\boldsymbol{x}_2 + B_1\boldsymbol{u}, \\ \boldsymbol{x}_2 = A_{21}\boldsymbol{x}_1 + A_{22}\boldsymbol{x}_2 + B_2\boldsymbol{u},\end{cases} \quad \boldsymbol{y} = C_1\boldsymbol{x}_1 + C_2\boldsymbol{x}_2 + D\boldsymbol{u}. \tag{2}$$

设$\boldsymbol{y}$为q维测量向量.

定理 1. 系统(1)为随意状态变量可观测的充分条件是系统状态向量经任意分划后的子系统簇{系统(2)|$\boldsymbol{x}_1$的维数为m, $\boldsymbol{y}$的维数为q, $1 \leqslant m \leqslant n-q$}满足：1)矩阵对$(A_{11}, C_1)$是完全可观对；2)$A_{12}$为非零矩阵时,$C_2$的秩为$(n-m)$或$q$,二者必居其一；3)$F = A_{11} - KC_1$,为负定时,则$\boldsymbol{x}_1$的状态观测器为

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_1 = F\hat{\boldsymbol{x}}_1 + H\boldsymbol{u} + K^*\boldsymbol{y}_1.$$

其中K^*为方程$KC_2 = A_{12}$的欧氏距离最小最优解,且有$H = B_1 - K^*D$.

证明. 令估计误差为$\boldsymbol{e}_1(t) = \hat{\boldsymbol{x}}_1 - \boldsymbol{x}_1$,则有

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{e}}_1(t) &= \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_1 - \dot{\boldsymbol{x}}_1 = F\hat{\boldsymbol{x}}_1 + H\boldsymbol{u} + K^*\boldsymbol{y} - A_{11}\boldsymbol{x}_1 - A_{12}\boldsymbol{x}_2 - B_1\boldsymbol{u} \\ &= F\boldsymbol{e}_1(t) + (F - A_{11} + KC_1)\boldsymbol{x}_1 + (H - KD - B_1)_{\boldsymbol{u}} \\ &\quad + (KC_2 - A_{12})\boldsymbol{x}_2.\end{aligned}$$

据定理条件(2),可保证方程$KC_2 - A_{12} = 0$有广义解. 条件(1)是条件(3)成立的先决条件. 当条件(3)成立并取$H = KD + B_1$时,得$\dot{\boldsymbol{e}}_1(t) = F\boldsymbol{e}_1(t)$即$\lim\limits_{t\to\infty}\boldsymbol{e}_1(t) = 0$成立.

由于方程$KC_2 = A_{12}$之解不一定是精确解,由此产生的估计误差将随时间积累. 对于不满足定理的系统,可增加观测器的维数,直至采用最小阶龙贝格观测器. 另外,由于F的特征根由系统参数唯一确定,误差收敛速度也没有选择余地. 为了克服上述观测误差对系统状态的依赖,改善误差衰减的指数常数,可采用下面提出的系统间接随意状态变量观测器的构造方法.

定义线性系统及其辅助估值系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = F\boldsymbol{x}(t) + G\boldsymbol{u}(t),\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{y}(t) = H^T\boldsymbol{x}(t). \tag{3}$$

其中$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}$分别为$n$阶、$m$阶、$r$阶向量.不失一般性,设(3)为可控、可观的. $\operatorname{rank}(G) = r$, $\operatorname{rank}(H^T) = m$. 设欲估计的量为$K^T\boldsymbol{x}$,且$\operatorname{rank}(K^T) = \hat{r} \leqslant r$. 辅助观测系统形如

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{z}}(t) = A\boldsymbol{z}(t) + B\boldsymbol{y}(t) + D\boldsymbol{u}(t),\ \boldsymbol{z}(0) = \boldsymbol{z}_0, \\ \boldsymbol{w}(t) = C^T\boldsymbol{z}(t) + E\boldsymbol{y}(t).\end{cases} \tag{4}$$

其中 z 为 P 维向量，w 为 r 维向量近似于 K^Tx.

定义 2[2]. 系统(4)的输出 $w(t)$ 是 $K^Tx(t)$ 的估值，如果有：

$$\lim_{t\to\infty}\frac{dj}{dtj}[w(t)-K^Tx(t)]=0,\quad j=0,1,2,\cdots \tag{5}$$

不依赖于 $u(\cdot)$，x_0 和 z_0 时，都成立.

为使 W 为 K^Tx 的估值，z 必须是 x 的某种线性函数.

引理 1[1]. 系统 (4) 的状态 $z(t)$ 是 T^Tx 的估值的充要条件是 a) A 是稳定的; b) $T^TF-AT^T=BH$; c) $D=T^TG$.

引理 2[1]. 设系统(4)是可观的，则 W 是 K^Tx 估值的充要条件是存在 T^T，使 z 为 T^Tx 的估值，并且 $K=TC+HE^T=M\begin{bmatrix}C\\E\end{bmatrix}$.

其中M是 $n\times(p+m)$ 矩阵 $[TH]$.

欲确定一最小阶 P 和矩阵 A, B, C, D, E，使辅助观测器的输出W成为 K^Tx 的估值. 引理 2 表明，等价的问题是求出 A, B, D 和 T^T，使 z 为 T^Tx 的估值且 $K\in R(W)$，即K的每一行向量属于W的行向量张成的空间.

设欲观测的随意变量数为 $\hat{p}$ 个，不失一般性，设 $K^T=[1_{\hat{p}\times\hat{p}}0]_{\hat{p}\times n}$.

引理 3[2]. $W\in C^{m\times n}$，则 1°) 若 $\dim[R(A)]=r$，则有可逆矩阵M使

$$WN_0=[D_00].$$

其中 $D_0\in C^{m\times r}$，而 $R(D_0)=R(W)$; 2°) 若 $\dim[R(W^T)]=r$，则有可逆矩阵 N_1，使 $N_1W=\begin{bmatrix}C_0\\0\end{bmatrix}$. 其中 $C_0\in C^{r\times n}$ 且 $R(W^T)=R(C_0^T)$.

定理 2. 对于系统(3),(4)，如果 *a*) 其状态及矩阵都满足引理 1 诸条件; *b*) $W=[TH]\in C^{\hat{p}\times n}$，且 $\dim[R(w)]=\hat{p}$; *c*) 存在 D_0，$WN_0^T=[D_00]$ 是非奇异的，则有矩阵 N，$N=N_0^T\begin{bmatrix}D_0^{-1}&0\\0&0\end{bmatrix}$，使 $WN_0=[1\hat{p}\ 0]$.

证明. 定理条件 a) 指明须依据引理 1 构造辅助观测器(4)，条件 b) 说明选择 T 应满足的条件是使 $\dim[R(W)]=\hat{p}$，而条件 c) 对特殊情况即 $K=[1\hat{p}\times\hat{p}0]$，使 $K\in R(W)$ 是一充分条件. 据此三条可得到满足引理 2 的随意状态变量组 x_1 的随意状态观测器了.

三、离散随机系统的随意状态变量观测器

$$x_{k+1}=\phi x_k+Bu+w_{k+1}, \tag{6a}$$

$$y_{k+1}=Cx_{k+1}+v_{k+1}, \tag{6b}$$

$$y_k=Cx_k+v_k. \tag{6c}$$

其中 $x_k=\begin{bmatrix}x_k^1\\x_k^2\end{bmatrix}$，$x_k^1$ 为 m 维欲估计分量; $w_k=\begin{bmatrix}w_k^1\\w_k^2\end{bmatrix}$，$v_k$ 分别是协方差矩阵为 $Q_k\delta_{ij}$，$R_k\delta_{ij}$，互不相关的零均值高斯白噪声. x_0 为状态向量初值，服从高斯分布，且与 w_k，v_k

无关. P_0^1 为待估计向量的估计初始协方差,预先取定. 设 $\boldsymbol{x}_{k+1}^1$ 的估计器为

$$\boldsymbol{z}_{k+1} = F\boldsymbol{z}_k + H\boldsymbol{u}_k + K\boldsymbol{y}_{k+1} + G(\boldsymbol{y}_k - C_1\boldsymbol{z}_k), \tag{7}$$

同理知 $\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11}\Phi_{12} \\ \Phi_{21}\Phi_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$, $C = [C_1 \ C_2]$.

定理 3. 对于所讨论的系统 (6)(7),如果系统参数与观测估计器(7)的参数之间满足关系式

$$F = \Phi_{11} - KC\Phi_1,\ H = B_1 - KCB,\ GC_2 = \Phi_{12} - KC\Phi_2,$$

$$|\lambda_i(F - GC_1)| < 1,\ i = 1, \cdots, m,$$

则由观测估计器(7) 产生的 $\boldsymbol{x}_k^1$ 的估值是均方误差最小意义下的估值. 其中K由下式确定:

$$K^T = [C(E_2P_k^1E_2^T + Q_{k+1} + \Phi_2C_2^+R_k(\Phi_2C_2^+)^T)C^T + R_{k+1}]^{-1}C[E_2P_kE_1^T + Q_{k+1}^1 + \Phi_2C_2^+R_k(\Phi_{12}C_2^+)^T],$$

$$P_{k+1}^1 = (F - GC_1)P_k^1(F - GC_1)^T + [KC_1KC_2]Q_{k+1}[KC_1 - IKC_2]^T + [KG]\begin{bmatrix} R_{k+1} & 0 \\ 0 & R_k \end{bmatrix}[KG]^T.$$

其中 $E_1 = \Phi_{11} - \Phi_{12}C_2^+C_1$; $E_1 = \Phi_1 - \Phi_2C_2^+C_1$; C_2^+ 是 C_2 的广义逆.

$$\Phi = [\Phi_1\Phi_2],\ Q_k = [Q_k^1Q_k^2].$$

参 考 文 献

[1] Fortr mann, T. E., Design of Low-order Observers for Linear Feedback Control Laws, *IEEE T-AC* **17**, *(1972), 301—307.*

[2] 黄琳,系统与控制理论中的线性代数,科学出版社(1984 年) p.36.

OPTIONAL OBSERVABILITY OF DYNAMIC SYSTEMS AND THE CONSTRUCTION OF THE OBSERVERS

Liu Xing Yu Xueheng

(Naval Engineering College)

Abstract

The problem of reconstructing state varibles of systems is studied in this paper in the respect of theory. The concept of optional state varibles observer is created. There theorems for constructing optional observers and two kinds of optional state varibles observers, direct and indirect, are proposed. The relationship between the optional state varibles observer and the KX observer is also discussed in the paper.