

工程调节器最优设计法

葛 卫

(清华大学)

摘 要

本文提出一种调节器设计方法,将能达到下述目标:调节时间和超调量最小;对状态初值、系统参数变化及非线性等产生的影响具有较强的鲁棒性;设计过程高度程序化。用本方法设计的实例充分显示了上述优点。

近年来,调节器设计理论虽然取得了多方面的进展^[1-5],但在实际设计时,经验仍然起决定作用,大量的反复调试参数往往是必不可少的过程。本文介绍设计过程高度程序化和性能指标全面最佳化的设计方法,从而使这种状况得到改观。

一、问题的数学描述

假定设计对象可用线性定常模型来逼近:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (1)$$

其中 $\mathbf{x} \in R^n$; u 是标量(仅考虑单输入系统); A, B 是适当维数的常值矩阵且是可控的。

控制量 u 具有下述约束:

$$u = \begin{cases} K^T \mathbf{x}, & |K^T \mathbf{x}| < U_m, \\ U_m \operatorname{sgn}(K^T \mathbf{x}), & |K^T \mathbf{x}| \geq U_m, \end{cases} \quad (2a)$$

$$\int_0^{t_f} u^2 dt = E. \quad (2b)$$

其中 U_m 和 E 分别为控制幅值与能量的约束值。

$$K = -R^{-1}B^T P. \quad (3)$$

P 由 Riccati 方程的最大解给出:

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0. \quad (4)$$

问题是要设计 Q, R , 使 $\mathbf{x}(t)$ 的调节时间 t_f 、超调量 σ 及灵敏度 ST 尽量小。

设对系统的调节目标是 $\|\mathbf{x}\| \leq \varepsilon$ 。 $\varepsilon > 0$ 为给定值, $\|\mathbf{x}\|$ 为状态的某个范数, 一般可用 L_2 范数: $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{\frac{1}{2}}$ 。 于是可以给出调节时间 t_f 、超调量 σ 、灵敏度 ST 的定义如下:

定义 1. 任给一系统运动轨线 $\mathbf{x}(t) (t \geq 0)$, 该轨线的调节时间 t_f 为:

$$t_f \triangleq \min_{\bar{t}} \{ \bar{t} \mid \| \mathbf{x}(\bar{t}) \| \leq \varepsilon, \forall t \geq \bar{t} \}. \quad (5)$$

若 t_f 不存在, 则定义调节时间为 ∞ .

定义 2. 任给一 t_f 有限的系统轨线 $\mathbf{x}(t) (t \geq 0)$, 该轨线的超调量 σ 为

$$\sigma \triangleq \max_{t > t_s} \{ \| \mathbf{x}(t) \| - \varepsilon \}. \quad (6)$$

其中, t_s 满足下式:

$$t_s \triangleq \min_{\bar{t} > 0} \{ \bar{t} \mid \| \mathbf{x}(\bar{t}) \| = \varepsilon \}. \quad (7)$$

若 t_s 不存在, 则定义 $\sigma = 0$.

定义 3. 设模型(1)逼近的真实系统为

$$\dot{\mathbf{x}}_a = f(\mathbf{x}_a, u, t), \quad \mathbf{x}_a(0) = \mathbf{x}_0, \quad (8)$$

则对于模型(1)的任一轨线 $\mathbf{x}(t) (t \geq 0)$, 其灵敏度 ST 定义为

$$ST \triangleq \int_0^{t_f} \| \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_a(t) \|^2 dt. \quad (9)$$

二、设计步骤

(1) 假设
$$u = U_m \operatorname{sgn}(\mathbf{q}^T \mathbf{x}) \quad (10)$$

其中 $\mathbf{q} \in R^{n \times 1}$. 由(1)、(10)式构成的系统, 求使系统的 t_f 最小的 \mathbf{q} 向量, 记为 \mathbf{q}^* .

(2) 令
$$Q^* = \mathbf{q}^* \cdot \mathbf{q}^{*T}. \quad (11)$$

(3) Q^* 就是待求的 Q 矩阵, R 值由(2b)式中的 E 值确定. 若无(2b)式的约束, 则 R 的取值原则是使控制量 $u(t)$ 的幅值尽量大, 饱和程度又不严重.

三、设计实例

例 1. 某导弹高度控制系统设计

导弹纵向通道是五阶时变非线性系统, 可用四阶定常线性模型作极粗略的近似. 近似模型的参数为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6 & 3.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4.5 & -21 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -35 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad U_m = 8.$$

按前述(1)到(3)步, 求得反馈参数为

$$K^T = [5.35191, 3.20777, 2.53726, 0.427518].$$

本方法将初态 \mathbf{x}_0 视为模型参数的一部分, 图 1 显示了设计性能对 \mathbf{x}_0 变化的鲁棒性. 图 2 显示该设计结果具有很低的灵敏度. 可见用本方法可解决困扰国内外设计人员的“强烈空气动力学非线性”所引起的灵敏度问题^[4]. 另外, 由导弹模型的专门分析可知, 本设计结果已接近极限调节性能.

例 2. 与文[5]方法的比较

杨泰澄等人去年十月发表了调节器设计的逆问题方法^[5]，基本做法是使反馈参数的设计既实现指定的闭环极点，又满足最优性条件。

文[5]所举之例的参数为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

逆问题方法的设计结果为

$$K^T = -[4.375, 2.875, 1.625, 0.75],$$

$t_f = 4.4$ 秒, $\sigma = 4\%$.

本方法的设计结果为

$$K^T = -[16.275, 13.389, 4.161, 2.236],$$

$t_f = 3.8$ 秒, $\sigma = 0\%$.

假定对实际对象的参数的了解不十分准确，例如假定(12)式代表的模型只是下述实际系统的一个近似：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 + \Delta a_{22} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 + \Delta a_{33} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 + \Delta a_{44} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

这时，当然希望根据系统(12)设计的反馈参数 K 用到系统(13)上时，原设计性能不会有太大的恶化。这就是工程上极重要的鲁棒性问题。

虽然尚无法断言本方法比逆问题方法鲁棒性更强，但所做的实验结果都是如此。图

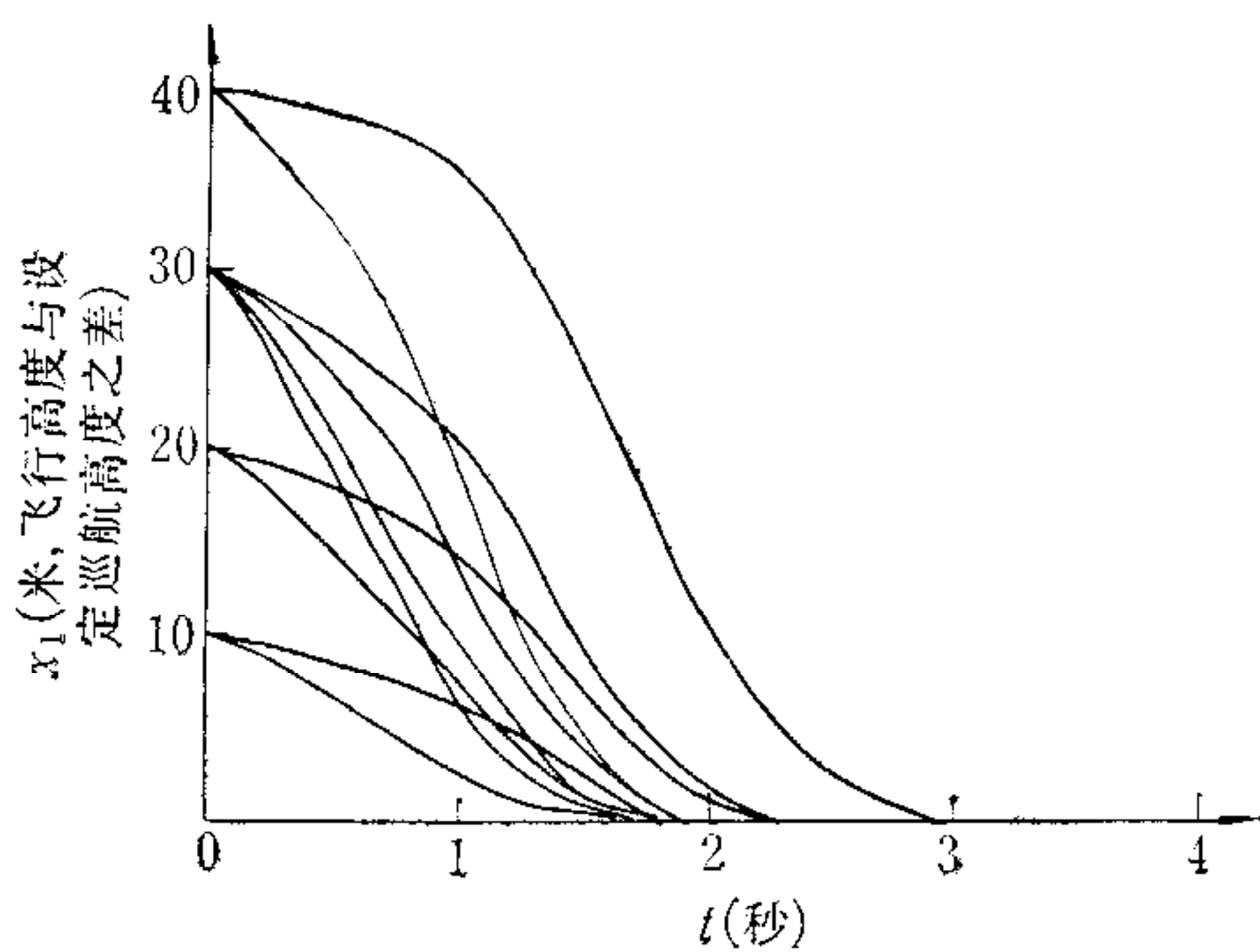


图 1 对 x_0 变化的鲁棒性

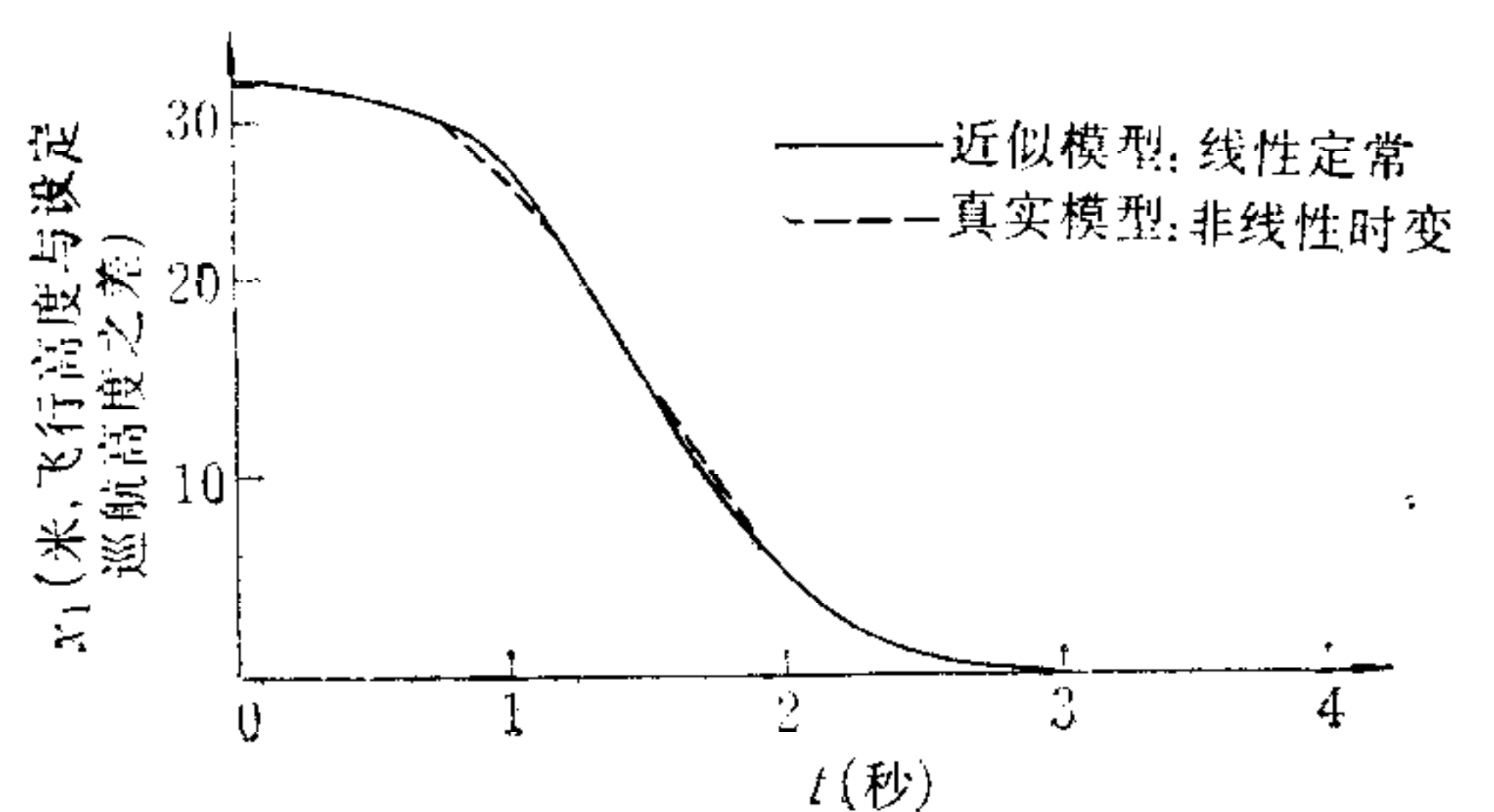


图 2 对时变非线性影响的鲁棒性

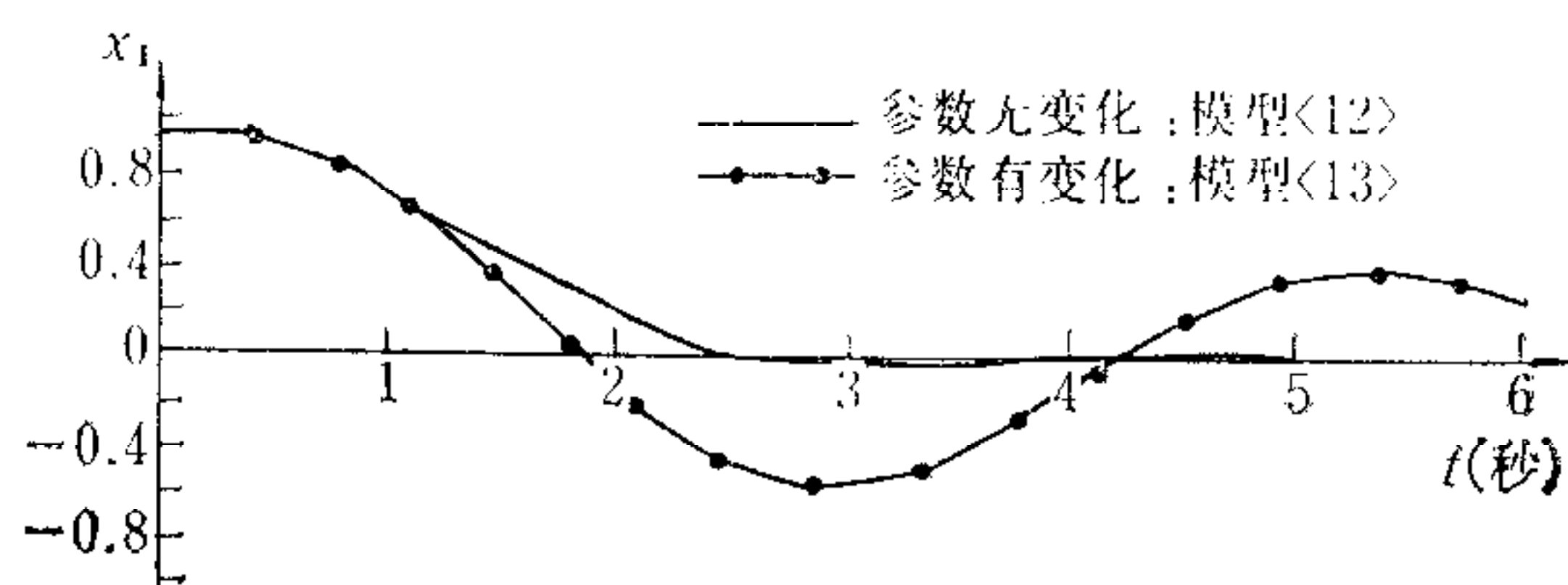


图 3 逆问题方法的鲁棒性

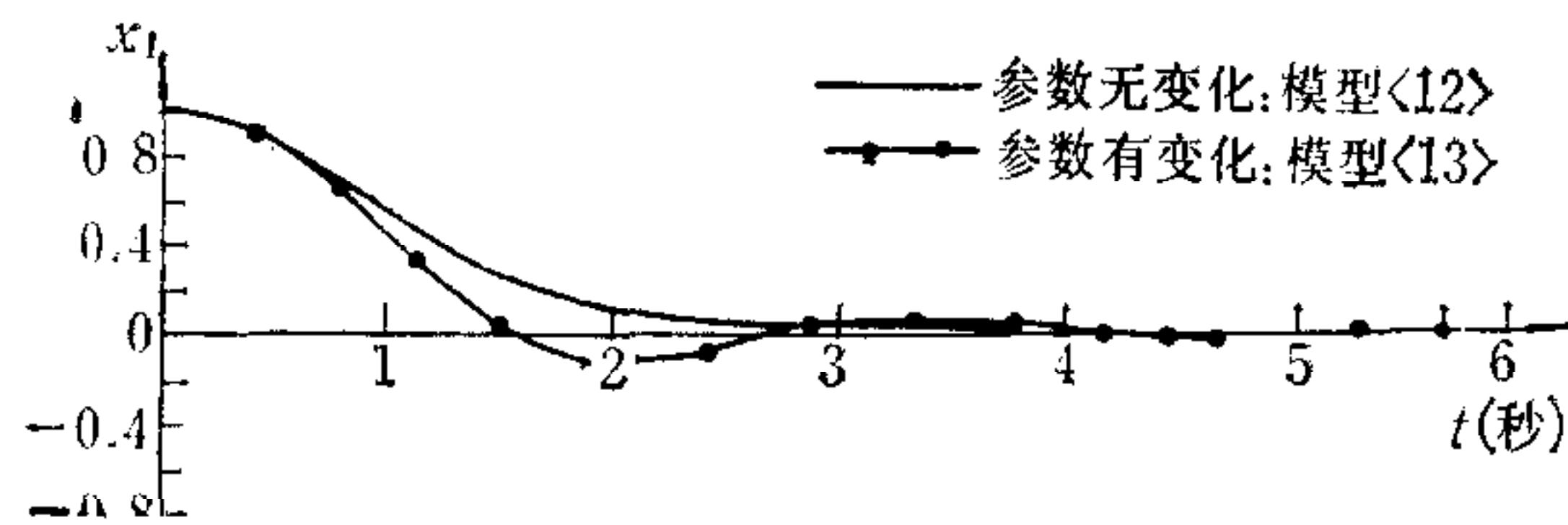


图 4 本文方法的鲁棒性

3 和图 4 给出的是 $\Delta a_{22} = 1.1$, $\Delta a_{33} = 1$, $\Delta a_{44} = -10$ 时的结果。

参 考 文 献

- [1] Harvey, C. H., Stein G., Quadratic Weights for Asymptotic Regulator Properties, *IEEE Trans.*, AC-23 (1978) No. 3.
- [2] Owens D. H., On the Compensation of Optimal Systems Asymptotic Root-loci, NASA Report: N82-99256 (1982).
- [3] Bar-Ness Y., Optimal Closed-loop Poles Assignment, *Int. J. Control*, 27(1978), No. 3.
- [4] Gourishankar, V., Zachowski, G. V., Minimum Sensitivity Controllers with Application to VTOL Aircraft, *IEEE Trans.*, AES-16(1980), No. 1.
- [5] 杨泰澄, 李恬鉴, 徐衍华, 从逆问题指定闭环极点设计最优调节器, 自动化学报, 第 10 卷 (1984), 第 4 期, 317—323.

OPTIMUM DESIGN OF ENGINEERING REGULATORS

GE WEI

(Tsinghua University)

ABSTRACT

In this paper, a procedure for designing engineering regulators is introduced. The advantages of the procedure are as follows: The regulating time and the overshooting are minimum; Strong robustness is achieved; The design of regulators is highly systemized. The design examples show the above advantages effectively.