第 13 卷 第 1 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 13, No. 1
1987 年 1 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Jan., 1987

用串联 PID, PID-D 调节器任意配置闭路极点的多项式矩阵法

张 福 恩
(哈尔滨工业大学)

摘　　要

本文研究了在线性常参数多变量系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{u},\boldsymbol{y}=C\boldsymbol{x}$ 中,引进串联 PID 和 PID-D 调节器，以任意配置闭路极点的问题. 文中导出了闭路系统特征方程的 $m\times m$ 维多项式矩阵行列式表示式,据此建立了设计 PID 和 PID-D 调节器的简单方法,给出了可任意配置的闭路极点数,并给出了计算 $[sI-A^{\tau}]^{-1}C^{\tau}$ 矩阵右既约分解矩阵的新算法.

在线性常参数多变量系统理论中,应用输出比例反馈、输出反馈动态补偿器、输出比例微分反馈补偿器、PI 补偿器等任意配置闭路极点问题非常引人注意,是近年来十分活跃的研究领域[1-5].

本文的目的是研究应用串联 PID 和 PID-D 调节器任意配置闭路系统极点问题.

一、预备知识和基本理论

已知能控能观系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{u},\quad \boldsymbol{y}=C\boldsymbol{x}. \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 为 n 维状态向量; $\boldsymbol{u}$ 为 p 维控制向量; $\boldsymbol{y}$ 为 m 维输出向量; A,B,C 分别为相应维数的实常数矩阵,并假定 $\operatorname{rank}B=p$, $\operatorname{rank}C=m$.

对系统(1)分别引进串联 PID 和 PID-D 调节器,其控制规律分别为

$$\boldsymbol{u}=F\boldsymbol{z}_1+K(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{y})+D(\dot{\boldsymbol{r}}-\dot{\boldsymbol{y}}) \tag{2}$$

和

$$\boldsymbol{u}_0=F\boldsymbol{z}_1+K(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{y})+D(\dot{\boldsymbol{r}}-\dot{\boldsymbol{y}})+H\boldsymbol{z}_2. \tag{3}$$

积分补偿器和动态补偿器状态方程分别为

$$\dot{\boldsymbol{z}}_1=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{y} \tag{4}$$

和

$$\dot{\boldsymbol{z}}_2=L\boldsymbol{z}_2+E(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{y}). \tag{5}$$

$\boldsymbol{z}_1$ 为 m 维状态向量; $\boldsymbol{z}_2$ 为 v 维状态向量; $\boldsymbol{r}$ 为 m 维参考输入向量.

本文于 1984 年 7 月 30 日收到.

由方程(1),(2),(4)得具有 PID 调节器的闭路系统特征方程为

$$|sI - A^\tau + C^\tau[s^{-1}F^\tau + K^\tau + sD^\tau]B^\tau| = 0. \tag{6}$$

由方程(1),(3),(4),(5)得具有 PID-D 调节器的闭路系统特征方程为

$$|sI_n - A^\tau + C^\tau[sF^\tau + K^\tau + sD^\tau + E^\tau(sI_p - L^\tau)H^\tau]B^\tau| = 0. \tag{7}$$

可以证明 PID 和 PID-D 调节器存在的必要条件是系统(1)能控能观,矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix}$满行秩,自然要求 $m \leqslant p$.

设

$$G(s) = [sI - A^\tau]^{-1}C^\tau = N(s)T^{-1}(s) \tag{8}$$

引理 1. 若系统(1)能观,则矩阵 $sI - A^\tau$ 和 C^τ 为 $G(s)$ 矩阵的左既约分解.

引理 2. 假定矩阵 $sI - A^\tau$ 和 C^τ,矩阵 $T(s)$ 和 $N(s)$ 分别为 $G(s)$ 矩阵的左和右既约分解，则 $sI - A^\tau$ 和 $T(s)$, C^τ 和 $N(s)$ 除 1 以外的不变因子完全一致. 因此 $|sI - A^\tau|$ 和 $|T(s)|$ 只差一个常数因子.

引理 3. 假定 P, Q 分别为 $n \times m$ 和 $m \times n$ 维矩阵，则

$$|I_n + PQ| = |I_m + QP|. \tag{9}$$

上述三个引理的证明见文献[6].

定理 1. 若系统(1)能观,矩阵 $T(s)$ 和 $N(s)$ 为 $G(s)$ 矩阵的右既约分解,则闭路系统特征方程(6)和(7)可取下列形式:

$$|sT(s) + [F^\tau + K^\tau s + D^\tau s^2]N(s)| = 0, \tag{10}$$

$$|sT(s) + [F^\tau + K^\tau s + D^\tau s^2 + E^\tau(sI_p - L^\tau)H^\tau s]N(s)| = 0. \tag{11}$$

方程(10)和(11)就是具有 PID 和 PID-D 调节器的闭路系统特征方程的 $m \times m$ 维多项式矩阵行列式表示式.

二、设 计 方 法

1. PID 调节器设计

(1) 从矩阵 $sT(s) + [F^\tau + sK^\tau + s^2D^\tau]B^\tau N(s)$ 中任取一行

$$sT_i(s) + [F_i^\tau + sK_i^\tau + s^2D_i^\tau]B^\tau N(s),$$

它为 m 维多项式行向量. 多项式元素的系数是行向量 F_i^τ, K_i^τ, D_i^τ, 计 $3p$ 个元素的线性函数. 对该行最多可配置 $[3p/m]$ 个极点 ($[3p/m]$表示 $3p/m$ 的整数部份). 不失一般性,考虑 $sT(s) + [F^\tau + K^\tau s + D^\tau s^2]B^\tau N(s)$ 矩阵的前 $m-1$ 行,可配置极点数为 $\eta_1 \leqslant (m-1)[3p/m]$ 个,同时确定行向量 F_i^τ, K_i^τ, $D_i^\tau (i = 1, 2, \cdots, m-1)$.

(2) 将已配定的 η_1 阶多项式从 $|sT(s) + [F^\tau + K^\tau s + D^\tau s^2]B^\tau N(s)| = 0$ 中提出来,得余下的特征方程为

$$\begin{vmatrix} M(s) \\ sT_m(s) + [F_m^\tau + K_m^\tau s + D_m^\tau s^2]B^\tau N(s) \end{vmatrix} = 0. \tag{12}$$

将(12)式按最后一行元素展开,得

$$[sT_m(s)+[F_m^\tau+sK_m^\tau+s^2D_m^\tau)B^\tau N(s)]\boldsymbol{\Delta}=0 \tag{13}$$

其中 $\boldsymbol{\Delta}$ 为 m 维列向量，它的元素是(12)式中最后一行元素的代数余子式，(13) 式展开为 $n+m-\eta_1$ 阶代数方程，其系数为 F_m^τ, K_m^τ, D_m^τ 行向量，计 $3p$ 个元素的线性函数. 因此，对 (13) 式可配置的闭路极点数为 $\eta_2\leqslant\min\{3p,\ n+m-\eta_1\}$. 上述两步总共可配置的闭路极点数为 $\eta\leqslant\min\{(m-1)[3p/m]+3p, n+m\}$.

2. PID-D 调节器设计

(1) 设

$$E^\tau=[E_1^\tau,O_2,\cdots,O_\nu],\quad E_1=[e_1,e_2,\cdots,e_m], \tag{14}$$

$$H=[H_1,H_2,\cdots,H_\nu],\quad H_i=[h_{1i},h_{2i},\cdots,h_{pi}], \tag{15}$$

$$L^\tau=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\cdots 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots\ 0\\ \vdots & & \vdots\\ -l_\nu & -l_{\nu-1}\cdots\cdots & \cdots l_1\end{bmatrix}, \tag{16}$$

计算

$$\mathrm{adj}[sI_\nu-L^\tau]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}_1(s) & \boldsymbol{r}_2(s)\cdots & \boldsymbol{r}_\nu(s)\\ * & *\cdots & *\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ * & *\cdots & *\end{bmatrix}, \tag{17}$$

$$\boldsymbol{r}_i(s)=s^{\nu-i}+l_1s^{\nu-i-1}+l_2s^{\nu-i-2}+\cdots+l_{\nu-i-1}s+l_{\nu-i},$$
$$(i=0,1,\cdots,\nu). \tag{18}$$

将(14),(15),(17),(18)式代入(11)式得

$$\left|sT(s)+\left[F^\tau+sK^\tau+s^2D^\tau+\left(sE_1^\tau\sum_{i=1}^{\nu}H_i^\tau\boldsymbol{r}_i(s)\right)/\boldsymbol{r}_0(s)\right]B^\tau N(s)\right|=0. \tag{19}$$

再取 $e_i=0(i=1,2,\cdots,m-1)$, $e_m=1$,代入上式得

$$\begin{vmatrix}sT_1(s)+[F_1^\tau+sK_1^\tau+s^2D_1^\tau]B^\tau N(s)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ sT_{m-1}(s)+[F_{m-1}^\tau+sK_{m-1}^\tau+s^2D_{m-1}^\tau]B^\tau N(s)\\ s\boldsymbol{r}_0(s)T_m(s)+\left[\boldsymbol{r}_0(s)(F_m^\tau+sK_m^\tau+s^2D_m^\tau)+s\sum_{i=1}^{\nu}H_i\boldsymbol{r}_i(s)\right]B^\tau N(s)\end{vmatrix}=0. \tag{20}$$

(2) 对 (20) 式的前 $m-1$ 行，按照 PID 调节器设计步骤 (1) 进行设计，可配置极点数 $\eta_1\leqslant(m-1)[3p/m]$.

(3) 将已配置的 η_1 阶多项式从(20)式中提出来，得余下的特征方程为

$$\begin{vmatrix}M(s)\\ s\boldsymbol{r}_0(s)T_m(s)+\left(\sum_{j=1}^{\nu+3}M_js^{\nu+3-j}\right)B^\tau N(s)\end{vmatrix}=0. \tag{21}$$

其中

$$\sum_{j=1}^{\nu+3}M_js^{\nu+3-j}=[D_m^\tau,\ K_m^\tau,\ F_m^\tau+H_1^\tau,\ H_2^\tau,\cdots,\ H_\nu^\tau,\ l_\nu F_m^\tau]W(l)S; \tag{22}$$

$$W(l)=\begin{bmatrix} 1 & l_1 & l_2\cdots l_\nu & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l_1\cdots l_{\nu-1} & l_\nu & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad S=\begin{bmatrix} s^{\nu+2} \\ s^{\nu+1} \\ s^{\nu} \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{23}$$

显然，$W(l)$ 为非奇异矩阵.

将 (21) 式按最后一行元素展开，得

$$\left[s\mathbf{r}_0(s)\,T_m(s)+\left(\sum_{j=1}^{\nu+3} M_j s^{\nu+3-j}\right)B^\tau N(s)\right]\boldsymbol{\Delta}=0. \tag{24}$$

式 (24) 为 $n+m+\nu-\eta_1$ 阶代数方程，其系数为 $l_1, l_2, \cdots, l_\nu$ 及 p 维行向量 $M_j(j=1,2,\cdots,\nu+3)$，计 $(\nu+3)p$ 个元素的线性函数. 因此，对方程(24)可任意配置的闭路极点数为 $\eta_2\leqslant\min\{\nu+(\nu+3)p, n+m+\nu-\eta_1\}$，并且同时可计算得到 $l_1,l_2,\cdots,l_\nu$ 及 $M_1,M_2,\cdots,M_{\nu+3}$. 上述两步总共可配置闭路极点数为 $\eta_D\leqslant\min\{\nu+(3+\nu)p+(m-1)[3p/m], n+m+\nu\}$.

在(19)式中当需要将第 m 行加到第 k 行，然后对第 k 行配置极点时，应取

$$e_k=-1,$$

以保证对第 k 行配置的极点与 $\left(s\sum_{j=1}^{\nu} H_j^\tau \mathbf{r}_j(s)\right)/\mathbf{r}_0(s)$ 无关.

三、矩阵 $T(s)$，$N(s)$ 的计算

计算矩阵 $[sI-A^\tau]^{-1}C^\tau$ 的右既约分解矩阵的已有方法见文献 [6]，下面给出一种新的简单算法.

假定 (A, C) 对能观，则矩阵 $sI-A^\tau$ 和 C^τ 互左素，复合矩阵 $[C^\tau \vdots sI-A^\tau]$ 的斯密司标准型为 $[I_n\ 0]$，即存在有 $n\times n$ 和 $(n+m)\times(n+m)$ 么模矩阵 $P(s)$ 和 $Q(s)$，使得

$$P(s)[C^\tau\vdots sI-A^\tau]Q(s)=[-I_n,\vdots 0], \tag{25}$$

存在有 $n\times n$ 和 $(n+m)\times(n+m)$ 么模矩阵 $P(s)$ 和 $Q'(s)$，使得

$$P(s)[C^\tau\vdots sI-A^\tau]Q'(s)=[-I_n\vdots U(s)]. \tag{26}$$

其中 $U(s)$ 为 $n\times m$ 维多项式矩阵.

定理 2. 若 (A, C) 能观，则 $[sI-A^\tau]^{-1}C^\tau$ 矩阵有右既约分解矩阵 $T(s)$ 和 $N(s)$，且

$$\begin{bmatrix} T(s) \\ \cdots \\ N(s) \end{bmatrix}=Q_m(s). \tag{27}$$

$Q_m(s)$ 为 (25) 式中 $Q(s)$ 的后 m 列组成的 $(n+m)\times m$ 维矩阵.

推论. 若矩阵对 (A,C) 能观，则 $[sI-A^\tau]^{-1}C^\tau$ 矩阵有右既约分解矩阵 $T(s)$ 和 $N(s)$，且

$$\begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \end{bmatrix} = Q'(s) \begin{bmatrix} U(s) \\ I_m \end{bmatrix}. \tag{28}$$

定理 2 及其推论给出了计算 $[sI - A^\tau]^{-1}C^\tau$ 矩阵右既约分解矩阵的方法，就是对复合矩阵 $[-C^\tau \vdots sI - A^\tau]$ 进行基本行列变换，求取 $Q(s)$ 或 $Q'(s)$ 和 $U(s)$ 矩阵.

四、例 题

例 1. 已知能控能观系统参数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{29}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

给定闭路极点皆为 -1，设计串联 PID 调节器.

解. 首先计算得

$$T(s) = \begin{bmatrix} -1 & -s^5 \\ s^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad N(s) = \begin{bmatrix} s & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s^4 & -s^3 & -s^2 & +s & 1 \end{bmatrix}^\tau. \tag{30}$$

并得闭路系统特征方程

$$\begin{vmatrix} d_{21}s^3 + (d_{11} + k_{21})s^2 + (k_{11} + f_{21} - 1)s + f_{11} & s^6 + d_{21}s^2 + k_{21}s + f_{21} \\ (d_{22} + 1)s^3 + (d_{12} + k_{22})s^2 + (k_{12} + f_{22})s + f_{12} & d_{22}s^2 + k_{22}s + f_{22} \end{vmatrix} = 0 \tag{31}$$

(1) 对 (31) 式第一行配置极点 $-1, -1, -1$，计算得

$$\begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 \\ -15 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -34 \\ -15 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ -10 \end{bmatrix},$$

并得余下的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -15 & s^3 - 3s^2 + 6s - 10 \\ (d_{22} + 1)s^3 + (d_{12} + k_{22})s^2 + (k_{12} + f_{22})s + f_{12} & d_{22}s^2 + k_{22}s + f_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{32}$$

已知

$$(s + 1)^6 = s^6 + 6s^5 + 18s^4 + 20s^3 + 15s^2 + 6s + 1 = 0, \tag{33}$$

将 (32) 式展开，并与 (33) 式比较 s 同次幂系数，得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -9 & -3 & 1 \\ 6 & -3 & 1 & -30 & 6 & -3 \\ -10 & 6 & -3 & 0 & -10 & 6 \\ 0 & -10 & 6 & -6 & 15 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & -1 & 0 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{12} \\ k_{12} \\ f_{12} \\ d_{22} \\ k_{22} \\ f_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 30 \\ 15 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{34}$$

解方程(34)，最后得

$$D=\begin{bmatrix}-21 & 0,167\\ -1s & -1,833\end{bmatrix},\quad K=\begin{bmatrix}-34 & 16,722\\ -15 & -7,667\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}-15 & -70\\ -10 & -46.722\end{bmatrix}\tag{35}$$

例 2. 已知能控能观系统参数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&-1\\0&0\\1&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix},$$
$$C=[0\quad 0\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1],\tag{36}$$

给定闭路极点皆为 -1，设计 PID-D 调节器.

解. 首先计算

$$T(s)=s(s^6+1),N(s)=[s^2\ s\ s^6\ s^5\ s^4\ s^3\ s^6-s^2+1]^\tau.\tag{37}$$

设

$$\sum_{j=1}^{4}M_js^{4-j}=[m_{11},m_{21}]s^3+[m_{12},m_{22}]s^2+[m_{13},m_{23}]s+[m_{14},m_{24}],\tag{38}$$

得闭路系统特征方程为

$$\begin{aligned}&s^9+ls^8+m_{11}s^7+m_{12}s^6+(m_{13}-m_{21})s^5+(m_{14}-m_{22})s^4\\&\quad+(m_{21}-m_{23}+1)s^3+(l+m_{22}-m_{24})s^2+m_{23}s+m_{24}=0\end{aligned}\tag{39}$$

已知

$$(s+1)^9=s^9+9s^8+36s^7+84s^6+126s^5+126s^4+84s^3+36s^2+9s+1=0,\tag{40}$$

由(39)和(40)式得

$$l=9,\ M_1=[36,92],\ M_2=[84,28],\ M_3=[218,9],\ M_4=[154,1]$$

进一步计算得

$$D=\begin{bmatrix}36\\92\end{bmatrix},K=\begin{bmatrix}-240\\-800\end{bmatrix},F=\begin{bmatrix}17,1\\0\ ,1\end{bmatrix},H=\begin{bmatrix}2361\\7209\end{bmatrix},\tag{41}$$

及动态补偿器方程

$$\dot z_2=-9z_2+(r-y)\tag{42}$$

参　考　文　献

[1] Davison, E. J. and Wang, S. H., On pcle Assignment in Linear Multivaliable Systems Using Output Feed-back, *IEEE. Trans Aut. Control.* AC-**20** (1975), 516.

[2] Djaferis, T. E., Generic Pole Assignment Using Dynamic Output Feedback, *Int. J. Control.* **37**(1983), 127—144.

[3] Seraji, H., Pole Placement in Multivariable Systems Using Proportional-derivative Output Feedback, *Int. J. Control.*, **31**(1980), 195—207.

[4] Rajagpalan, T., Pole Assignment with Output Feedback, *Automatic* **20**(1984), 1, 127—128.

[5] Novin-Hirbod S., Pole Assigument Using Proportional-plusintegral Output Feedback Control, Int. *J. Con-*

trol., 29(1979), 1035—1046·
[6]须田信英等著，曹长修译，自动控制中的矩阵理论，科学出版社，1979.

YNOMIAL MATRIX METHOD FOR ASSIGNMENT OF CLOSED LOOP POLES USING SERIES PID AND PID-D REGULATORS

ZHANG FU'EN
(*Harbin Institute of Technology*)

ABSTRACT

In this paper, the problem of pole assignment in linear multivariable time invariant systems $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \mathbf{y} = C\mathbf{x}$ using series PID and PID-D regulators is considered. First, a determinant expression of $m \times m$ polynomial matrix for the closed loop characteristic equation is developed by means of right reduced factorization of $[sI-A^\tau]^{-1}\ C^\tau$ (m = rank$C$). Based on the expression, a simple method for designing PID and PID-D regulators is constructed. The number of assignable poles is given. Second, a new algorithm for right reduced factorization of $[sI - A^\tau]^{-1}C^\tau$ is also presented.