第13卷 第2期　　自 动 化 学 报　　Vol. 13, No. 2
1987 年 3 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Mar., 1987

大系统的动态递阶控制

施志诚　高为炳
(北京航空学院)

摘　　要

本文提出了一种镇定线性大系统的动态递阶控制新方案. 对于分散控制线性大系统，如果是可控可观的,则可以设计一个上一层系统,并能确定它的最小维数，使所产生的新系统在递阶控制下无固定模,从而能够得到一个协调控制器,使整个闭环系统能任意配置极点. 这种新的大系统动态递阶控制具有实际意义,其递阶控制器的设计也简单易行.

一、引　　言

近年来由于实际应用及理论发展的需要，对大系统的分散控制和递阶控制做了很多研究工作,取得了较大的进展[1-5]. 在分散控制方面，Wang 和 Davison 于 1973 年提出了分散固定模的概念，得到了设计系统动态分散控制器镇定的充要条件[6]; Corfmat 和 Morse 于 1976 年进一步得到了设计动态分散控制器的一种方法[7]; Sezer 和 Siljak 于 1981 年又将分散固定模的概念推广到一般反馈控制的固定模[8]. 大系统递阶控制方面的大量文章内容是利用各子系统的最优控制,通过递阶算法达到整个系统的最优或次优,而递阶算法的高一层主要是最优指标的计算[5]. 分散控制和递阶控制正在实际系统的应用中取得了较好的效果,例如在交通系统、电力系统、河流污染控制问题等的应用[1-5]. 这两类控制所应用的大系统有一个共同的特点，就是各实际子系统均是同级的. 在实际应用中还存在一种大系统，它们中各子系统之间的关系并不都是同级的，而是存在上下级关系. 例如一些经济大系统、管理大系统等,各子系统之间的关系如图 1 所示. 即下一层子

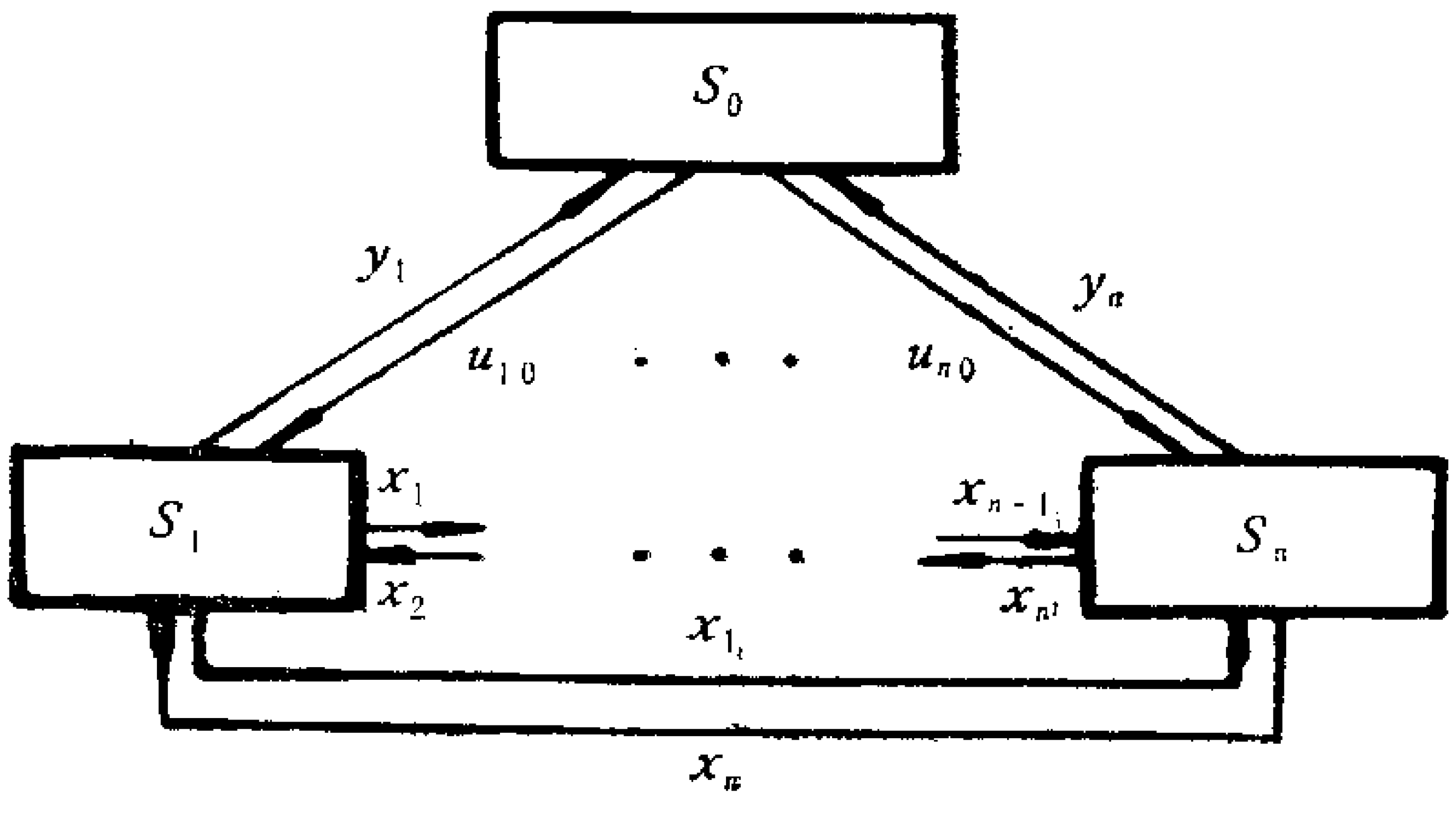

图 1

本文于 1984 年 8 月 2 日收到.

系统 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 之间通过各自的状态进行耦合，它们不仅可以依靠自己的输出信息进行控制,而且可以利用上一层子系统 S_0 的输出进行控制. 上一层子系统 S_0 主要起协调下一层各子系统的作用. 因此称为动态协调系统，将所进行的所有控制称为动态递阶控制.本文主要研究当下一层的各个子系统及其相互耦合项均给定时,如何设计上一层的动态协调系统和动态递阶控制,使得整个闭环系统达到预定的设计要求.

二、模型的建立

考虑下一层的大系统为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_i = A_{ii}\boldsymbol{x}_i + \sum\limits_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{n} A_{ij}\boldsymbol{x}_j + B_i\boldsymbol{u}_i, \\ \boldsymbol{y}_i = C_i\boldsymbol{x}_i. \end{cases} \qquad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{1}$$

上一层的动态协调系统为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_0 = A_0\boldsymbol{x}_0 + B_0\boldsymbol{u}_0, \\ \boldsymbol{y}_0 = C_0\boldsymbol{x}_0. \end{cases} \tag{2}$$

下一层大系统的控制形式为

$$\boldsymbol{u}_i = F_{ii}\boldsymbol{y}_i + F_{i0}\boldsymbol{y}_0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{3}$$

上一层动态协调系统的控制形式为

$$\boldsymbol{u}_0 = \sum_{i=1}^{n} F_{0i}\boldsymbol{y}_i + F_0\boldsymbol{y}_0. \tag{4}$$

其中 $x_i \in \boldsymbol{R}^{l_i}, u_i \in \boldsymbol{R}^{m_i}, y_i \in \boldsymbol{R}^{p_i}, i = 0, 1, \cdots n;$

$$\sum_{i=1}^{n} l_i = l; \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i = m; \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = p.$$

将式(1)和(2)联合起来可写成

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \\ \dot{x}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \cdots A_{1n} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \cdots A_{2n} & 0 \\ & \cdots & \\ A_{n1} & A_{n2} \cdots A_{nn} & 0 \\ 0 & 0 \cdots 0 & A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & 0 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & B_n & \\ & & & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_n \\ \boldsymbol{u}_0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & 0 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & C_n & \\ & & & C_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_0 \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{5}$$

将式(3)和(4)联合起来写成

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & & & & F_{10} \\ & F_{22} & & 0 & F_{20} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & F_{nn} & F_{n0} \\ F_{01} & F_{02} & \cdots & F_{0n} & F_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ y_0 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

有时为了方便也简写成

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u_0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} y \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_0 \end{bmatrix}, \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & F_\alpha \\ F_\beta & F_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y_0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

下面对大系统(1)寻求条件，使得可以设计动态协调系统(2)及反馈(3)，(4)．先引入一些预备定理．

三、预 备 定 理

考虑系统

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \sum_{i=1}^{n} \bar{B}_i \bar{u}_i, \\ \bar{y}_i = \bar{C}_i \bar{x}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n. \end{cases} \tag{9}$$

其中 $\bar{x} \in \boldsymbol{R}^l$; $\bar{u}_i \in \boldsymbol{R}^{m_i}$; $\bar{y}_i \in \boldsymbol{R}^{p_i}$, $i = 1, 2, \cdots, n$; $\sum_{i=1}^{n} m_i = m$; $\sum_{i=1}^{n} p_i = p$.

记 $\qquad \bar{B} = [\bar{B}_1, \bar{B}_2, \cdots, \bar{B}_n]$, $\bar{C} = [\bar{C}_1^T, \bar{C}_2^T, \cdots, \bar{C}_n^T]^T$.

显然系统(1)是系统(9)的一种特殊情况．

定义 1[6]. $\Lambda(\bar{C}, \bar{A}, \bar{B}, \boldsymbol{F}) = \bigcap_{F \in \boldsymbol{F}} \sigma(\bar{A} + \bar{B}F\bar{C})$

称为系统(9)的分散固定模．其中$\sigma(\cdot)$为谱集，$\boldsymbol{F} = \{F \in \boldsymbol{R}^{m\times p} \mid F = \mathrm{diag}\{F_1, F_2, \cdots, F_n\}, F_i \in \boldsymbol{R}^{m_i \times p_i}, i = 1, 2, \cdots, n\}$.

记 $\boldsymbol{N} = \{1, 2, \cdots, n\}$, $\boldsymbol{S} = \{i_1, i_2, \cdots, i_s\} \subseteq \boldsymbol{N}$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leqslant n$, $\boldsymbol{S}^\perp = \boldsymbol{N} - \boldsymbol{S}$, $\bar{B}_{\boldsymbol{S}} = [\bar{B}_{i_1}, \bar{B}_{i_2}, \cdots, \bar{B}_{i_s}]$, $\bar{C}_{\boldsymbol{S}} = [\bar{C}_{i_1}^T, \bar{C}_{i_2}^T, \cdots, \bar{C}_{i_s}^T]^T$.

定理 1[9]. 系统(9)无分散固定模的充要条件是对任意 $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{N}$,均有

$$\min_{\lambda \in \sigma(\bar{A})} \mathrm{rank} \begin{bmatrix} \lambda I_l - \bar{A} & \bar{B}_{\boldsymbol{S}} \\ \bar{C}_{\boldsymbol{S}^\perp} & 0 \end{bmatrix} \geqslant l. \tag{10}$$

定义 2[7]. 若对任意 $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{S} \neq \phi$,均有

$$\bar{C}_{\boldsymbol{S}^\perp}(\lambda I_l - \bar{A})^{-1}\bar{B}_{\boldsymbol{S}} \neq 0, \tag{11}$$

则称系统(9)是通道强关联的．

定理 2[7]. 若系统(9)是通道强关联的,则对固定的 $j\in \boldsymbol{N}$,存在 $F\in \boldsymbol{F}$,使得$(\bar{C}_j,\bar{A}+\bar{B}F\bar{C},\bar{B}_j)$ 可控可观的充要条件是 $\Lambda(\bar{C},\bar{A},\bar{B},\boldsymbol{F})=\phi$.

记 $\boldsymbol{E}=\{E=(e_{ij})\in \boldsymbol{R}^{n\times n}|\, e_{ij}$ 或为 0,或为 1,且 $e_{ii}=1,\ i,j=1,2,\cdots,n\}$.

对任意 $F\in \boldsymbol{R}^{m\times p}$,将 F 记成分块形式

$$F=\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12}\cdots F_{1n} \\ F_{21} & F_{22}\cdots F_{2n} \\ & \cdots\cdots \\ F_{n1} & F_{n2}\cdots F_{nn}\end{bmatrix}.$$

其中 $F_{ij}\in \boldsymbol{R}^{m_i\times p_j},\ i,j=1,2,\cdots,n$. 对任意 $E\in \boldsymbol{E}$,记

$$F_E=\begin{bmatrix} e_{11}F_{11} & e_{12}F_{12} & \cdots & e_{1n}F_{1n} \\ e_{21}F_{21} & e_{22}F_{22} & \cdots & e_{2n}F_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ e_{n1}F_{n1} & e_{n2}F_{n2} & \cdots & e_{nn}F_{nn}\end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{F}_E=\{F_E|\,$任意 $F\in \boldsymbol{R}^{m\times p}\}$.

定义 3[8]. 设 $E\in \boldsymbol{E}$,则

$$\Lambda(\bar{C},\bar{A},\bar{B},\boldsymbol{F}_E)=\bigcap_{F_E\in \boldsymbol{F}_E}\sigma(\bar{A}+\bar{B}F_E\bar{C})$$

称为系统(9)在反馈结构 E 下的固定模.

对系统(9)及 $E\in \boldsymbol{E}$,定义系统

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}=\bar{A}\bar{x}+\sum\limits_{i=1}^{n}\tilde{B}_i\tilde{u}_i, \\ \bar{y}_i=\bar{C}_i\bar{x}, \qquad i=1,2,\cdots,n. \end{cases} \tag{12}$$

其中 $\tilde{B}_j=[\bar{B}_{i_1},\bar{B}_{i_2},\cdots],\ \tilde{u}_j=[u_{i_1}^T,u_{i_2}^T,\cdots]^T,\ \{i_1,i_2,\cdots\}=I_j=\{i\in \boldsymbol{N}|\ e_{ij}=1\}$, $j=1,2,\cdots,n$. $\tilde{B}=[\tilde{B}_1,\tilde{B}_2,\cdots,\tilde{B}_n]$.

定理 3[8]. 设 $E\in \boldsymbol{E}$, 则系统(9)在反馈结构 E 下无固定模的充要条件是系统(12)无分散固定模.

定义 4. 设 $E\in \boldsymbol{E}$, 称系统(9) 在反馈结构 E 下是通道强关联的,是指对应的系统(12)是通道强关联的.

四、主要结果

设 $\bar{e}=(1,1,\cdots,1)^T\in \boldsymbol{R}^n$,记

$$\tilde{E}_0=\begin{bmatrix} I_n & \bar{e} \\ \bar{e}^T & 1\end{bmatrix}.$$

定理 4. 存在 A_0,B_0,C_0, 使系统(7)在反馈结构 $\tilde{E}_0$ 下无固定模的充要条件是 (C,A,B) 可控可观,且 $\bar{A}_0,\bar{B}_0,\bar{C}_0$ 的最小维数为 $\bar{n}_0=\bar{m}_0=\bar{p}_0=l-h$, 其中

$$h=\min_{S\subset N}\min_{\lambda\in\sigma(A)}\left\{\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\lambda I_l-A & \bar{B}_S\\ \bar{C}_{S^\perp} & 0\end{bmatrix}\right\},$$

$\bar{B}_i=[0,\cdots,0,B_i^T,0,\cdots,0]^T$, $\bar{C}_i=[0,\cdots 0,C_i,0,\cdots 0]$, $i=1,2,\cdots n$; $\bar{B}_S=[\bar{B}_{i_1},\bar{B}_{i_2},\cdots,\bar{B}_{i_s}]$, $\bar{C}_S=[\bar{C}_{i_1}^T,\bar{C}_{i_2}^T,\cdots,\bar{C}_{i_s}^T]^T$.

证明. “$\Rightarrow$”若存在 $\bar{A}_0$, $\bar{B}_0$, $\bar{C}_0$ 使系统(7)在反馈结构 $\tilde{E}_0$ 下无固定模，则必有

$$\left(\begin{bmatrix}C & 0\\ 0 & \bar{C}_0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & \bar{A}_0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}B & 0\\ 0 & \bar{B}_0\end{bmatrix}\right)$$

可控可观，因此 (C,A,B) 可控可观，$(\bar{C}_0,\bar{A}_0,\bar{B}_0)$ 可控可观.

“$\Leftarrow$”若 (C,A,B) 可控可观，根据定理 1 和定理3，系统(7)在反馈结构 $\tilde{E}_0$ 下无固定模的充要条件是：

(i) $$\min_{\lambda\in C}\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\lambda I_l-A & 0 & B & 0\\ 0 & \lambda I_{\bar{n}_0}-\bar{A}_0 & 0 & \bar{B}_0\end{bmatrix}=l+\bar{n}_0; \tag{13}$$

(ii) $$\min_{\lambda\in C}\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\lambda I_l-A & 0\\ 0 & \lambda I_{\bar{n}_0}-\bar{A}_0\\ C & 0\\ 0 & \bar{C}_0\end{bmatrix}=l+\bar{n}_0; \tag{14}$$

(iii) 对任意 $S\subset N$, $S\neq\phi$, 均有

$$\min_{\lambda\in C}\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\lambda I_l-A & 0 & \bar{B}_S & 0\\ 0 & \lambda I_{\bar{n}_0}-A_0 & 0 & \bar{B}_0\\ \bar{C}_{S^\perp} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \bar{C}_0 & 0 & 0\end{bmatrix}\geqslant l+\bar{n}_0. \tag{15}$$

显然只要取 $\bar{A}_0$, $\bar{B}_0$, $\bar{C}_0$ 满足 $(\bar{C}_0,\bar{A}_0,\bar{B}_0)$ 可控可观，且 $\mathrm{rank}\,\bar{B}_0\geqslant l-h$, $\mathrm{rank}\,\bar{C}_0\geqslant l-h$，就有 (i),(ii),(iii) 成立，而 $\bar{n}_0=\bar{m}_0=\bar{p}_0=l-h$ 是 $\bar{A}_0$, $\bar{B}_0$, $\bar{C}_0$ 的最小维数.

定理 5. 存在 $\bar{A}_0$, $\bar{B}_0$, $\bar{C}_0$ 使系统(7)在反馈结构 $\tilde{E}_0$ 下是通道强关联的充要条件是

$$\bar{C}_i(\lambda I_l-A)^{-1}B\not\equiv 0,\qquad i=1,2,\cdots,n. \tag{16}$$

证明. 根据定义 2 和定义4，系统(7)在反馈结构 $\tilde{E}_0$ 下是通道强关联的充要条件是

(i) 对任意 $S\subset N$, 有

$$\begin{bmatrix}\bar{C}_{S^\perp} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda I_l-A & 0\\ 0 & \lambda I_{\bar{n}_0}-\bar{A}_0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}B & 0\\ 0 & \bar{B}_0\end{bmatrix}\not\equiv 0;$$

(ii) 对任意 $S\subset N$, $S\neq\phi$, 有

$$\begin{bmatrix}\bar{C}_{S^\perp} & 0\\ 0 & \bar{C}_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda I_l-A & 0\\ 0 & \lambda I_{\bar{n}_0}-\bar{A}_0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\bar{B}_S & 0\\ 0 & \bar{B}_0\end{bmatrix}\not\equiv 0.$$

显然 (i) 成立的充要条件是式 (16) 成立，而总可选取 $\bar{A}_0$, $\bar{B}_0$, $\bar{C}_0$ 满足 $\bar{C}_0(\lambda I_{\bar{n}_0}-\bar{A}_0)^{-1}\bar{B}_0\not\equiv 0$，使得(ii)成立.

定理 6. 设 $C_i\neq 0$, $i=1,2,\cdots,n$，则存在 A_0, B_0, C_0，使系统(7)在反馈结构 $\tilde{E}_0$ 下可反馈任置极点的充要条件是 (C,A,B) 可控可观.

证明. "⇒"显然.

"⇐"若 (C, A, B) 可控可观,由定理 4,存在 $\bar{A}_0, \bar{B}_0, \bar{C}_0, (\bar{C}_0, \bar{A}_0, \bar{B}_0)$ 可控可观,使系统

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\bar{x}}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \bar{x}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & \bar{B}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \bar{\boldsymbol{u}}_0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{y} \\ \bar{\boldsymbol{y}}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & \bar{C}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \bar{x}_0 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{17}$$

在反馈结构 $\tilde{E}_0$ 下无固定模. 又 $\bar{C}_i \neq 0$ 且 (A, B) 可控必有 $\bar{C}_i(\lambda I_l - A)^{-1}B \neq 0$, 由定理 5 知系统(17)在反馈结构 $\tilde{E}_0$ 下是通道强关联的, 从而由定理 2 和定义 4 得: 对给定的 $i_0 \in \boldsymbol{N}$,存在 $\bar{F} \in \boldsymbol{F}$, 及 $\bar{F}_\alpha, \bar{F}_\beta, \bar{F}_0$,使系统

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\bar{x}}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B\bar{F}C & B\bar{F}_\alpha \bar{C}_0 \\ \bar{B}_0 \bar{F}_\beta C & \bar{A}_0 + \bar{B}_0 \bar{F}_0 \bar{C}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_{i_0} & 0 \\ 0 & \bar{B}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_{i_0} \\ \bar{\boldsymbol{u}}_0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_{i_0} \\ \bar{\boldsymbol{y}}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{i_0} & 0 \\ 0 & \bar{C}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_0 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{18}$$

可控可观. 因而可以设计动态补偿器

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{z}}_{i_0} \\ \dot{\boldsymbol{z}}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{i_0 i_0} & H_{i_0 0} \\ H_{0 i_0} & H_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_{i_0} \\ \boldsymbol{z}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{i_0 i_0} & L_{i_0 0} \\ L_{0 i_0} & L_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_{i_0} \\ \bar{\boldsymbol{y}}_0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_{i_0} \\ \bar{\boldsymbol{u}}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{i_0 i_0} & M_{i_0 0} \\ M_{0 i_0} & M_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_{i_0} \\ \boldsymbol{z}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{i_0 i_0} & F_{i_0 0} \\ F_{0 i_0} & F_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_{i_0} \\ \bar{\boldsymbol{y}}_0 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{19}$$

使闭环系统

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\bar{x}}_0 \\ \dot{\boldsymbol{z}}_{i_0} \\ \dot{\boldsymbol{z}}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B\bar{F}C + \bar{B}_{i_0} F_{i_0 i_0} \bar{C}_{i_0} & B\bar{F}_\alpha C_0 + \bar{B}_{i_0} F_{i_0 0} \bar{C}_0 & \bar{B}_{i_0} M_{i_0 i_0} & \bar{B}_{i_0} M_{i_0 0} \\ \bar{B}_0 \bar{F}_\beta C + \bar{B}_0 F_{0 i_0} \bar{C}_{i_0} & A + \bar{B}_0 \bar{F}_0 \bar{C}_0 + \bar{B}_0 F_{00} \bar{C}_0 & \bar{B}_0 M_{0 i_0} & \bar{B}_0 M_{00} \\ L_{i_0 i_0} \bar{C}_{i_0} & L_{i_0} \bar{C}_0 & H_{i_0 i_0} & H_{i_0 0} \\ L_{0 i_0} \bar{C}_{i_0} & L_{00} \bar{C}_0 & H_{0 i_0} & H_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \bar{\boldsymbol{x}}_0 \\ \boldsymbol{z}_{i_0} \\ \boldsymbol{z}_0 \end{bmatrix}$$

任置极点. 令

$$x_0 = [\bar{x}_0^T, z_{i_0}^T, z_0^T]^T, \ y_0 = [\bar{y}_0^T, z_{i_0}^T, z_0^T]^T, \ u_0 = [\bar{\boldsymbol{u}}_0^T, \boldsymbol{v}_{i_0}^T, \boldsymbol{v}_0^T]^T,$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} \bar{A}_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} \bar{B}_0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad C_0 = \begin{bmatrix} \bar{C}_0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

$$F_0 = \begin{bmatrix} \bar{F}_0 + \bar{F}_{00} & M_{0 i_0} & M_{00} \\ L_{i_0 0} & H_{i_0 i_0} & H_{i_0 0} \\ L_{00} & H_{0 i_0} & H_{00} \end{bmatrix}, \ F_\alpha = [\bar{F}_\alpha + \tilde{F}_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, F_{\alpha_3}], \ F_\beta = \begin{bmatrix} \bar{F}_\beta + \tilde{F}_\beta \\ F_{\beta_2} \\ F_{\beta_3} \end{bmatrix}.$$

其中 $\bar{F}_{00} = \mathrm{diag}\{0, \cdots, 0, F_{i_0 i_0}, 0, \cdots, 0\}$, $\tilde{F}_{\alpha_1} = [0, \cdots, 0, F_{i_0 0}^T, 0, \cdots, 0]^T$,

$F_{\alpha_2} = [0, \cdots, 0, M_{i_0 i_0}^T, 0, \cdots, 0]^T$, $F_{\alpha_3} = [0, \cdots, 0, M_{i_0 0}^T, 0, \cdots 0]^T$,

$\tilde{F}_{\beta_1} = [0, \cdots, 0, F_{0 i_0}, 0, \cdots, 0]$, $F_{\beta_2} = [0, \cdots 0, L_{i_0 i_0}, 0, \cdots, 0]$,

$F_{\beta_3}=[0,\cdots,0,L_{0i_0},0,\cdots,0]$. 这里，$F_{i_0i_0}$, F_{i_00}, $M_{i_0i_0}$, M_{i_00}, F_{0i_0}, $L_{i_0i_0}$, L_{0i_0} 均在第 i_0 位置．即得系统(7)和反馈(8).

前面考虑的问题中，要求下一层的每一个子系统都把输出传递给上一层的动态协调系统，而动态协调系统根据这些输出分别对每一个子系统进行反馈控制．但在实际应用中，这一点有时不易办到或没有必要．下面讨论当一些子系统不把输出传递给动态协调系统，且动态协调系统不对每个子系统都给以反馈控制的问题．

设 $S_1, S_2\subseteq N$, $S_1\neq\phi$, $S_2\neq\phi$，记

$$\tilde{E}_{S_1S_2}=\begin{bmatrix} I_n & \bar{e}_{S_1} \\ \bar{e}_{S_2}^T & 1 \end{bmatrix}.$$

其中 $\bar{e}_{S_k}=[e_{1k},e_{2k},\cdots,e_{nk}]^T$，当 $i\in S_k$ 时，$e_{ik}=1$；当 $i\bar{\in}S_k$ 时，$e_{ik}=0$；$k=1,2$.

类似于定理 4，有

定理 7. 存在 $\bar{A}_0$, $\bar{B}_0$, $\bar{C}_0$ 使系统(7)在反馈结构 $\tilde{E}_{S_1S_2}$ 下无固定模的充要条件是对任意 $S\supseteq S_1$，或 $S\subseteq S_2^\perp$，均有

$$\min_{\lambda\in\sigma(A)}\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \lambda I_l-A & \bar{B}_S \\ \bar{C}_{S^\perp} & 0 \end{bmatrix}\geqslant l, \tag{20}$$

且 $\bar{A}_0$, $\bar{B}_0$, $\bar{C}_0$ 的最小维数为 $\bar{n}_0=\bar{m}_0=\bar{p}_0=l-h$，其中

$$h=\min_{S\subset N}\min_{\lambda\in\sigma(A)}\left\{\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \lambda I_l-A & \bar{B}_S \\ \bar{C}_{S^\perp} & 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

证明．根据定理 1 和定理 3 得：系统(7)在反馈结构 $\tilde{E}_{S_1S_2}$ 下无固定模的充要条件是

(i) 对任意 $S\subseteq N$，均有

$$\min_{\lambda\in C}\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \lambda I_l-A & 0 & \bar{B}_{(S\cup S_1)} & 0 \\ 0 & \lambda I_{\bar{n}_0}-\bar{A}_0 & 0 & \bar{B}_0 \\ \bar{C}_{S^\perp} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\geqslant l+\bar{n}_0; \tag{21}$$

(ii) 对任意 $S\subseteq N$ 且 $S\subseteq S_2^\perp$，均有

$$\min_{\lambda\in C}\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \lambda I_l-A & 0 & \bar{B}_S \\ 0 & \lambda I_{\bar{n}_0}-\bar{A}_0 & 0 \\ \bar{C}_{S^\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{C}_0 & 0 \end{bmatrix}\geqslant l+\bar{n}_0; \tag{22}$$

(iii) 对任意 $S\subseteq N$ 且 $S\nsubseteq S_2^\perp$，均有

$$\min_{\lambda\in C}\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \lambda I_l-A & 0 & \bar{B}_S & 0 \\ 0 & \lambda I_{\bar{n}_0}-\bar{A}_0 & 0 & \bar{B}_0 \\ \bar{C}_{S^\perp} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{C}_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\geqslant l+\bar{n}_0. \tag{23}$$

易证，式(21)成立的充要条件是 $(\bar{A}_0,\bar{B}_0)$ 可控且对任意 $S\supseteq S_1$ 均有

$$\min_{\lambda\in\sigma(A)} \operatorname{rank}\begin{bmatrix} \lambda I_l - A & \bar{B}_S \\ \bar{C}_{S^\perp} & 0 \end{bmatrix} \geqslant l;$$

式(22)成立的充要条件是 (C_0, A_0) 可观且对任意 $S\subseteq S_2^\perp$ 均有

$$\min_{\lambda\in\sigma(A)} \operatorname{rank}\begin{bmatrix} \lambda I_l - A & \bar{B}_S \\ \bar{C}_{S^\perp} & 0 \end{bmatrix} \geqslant l;$$

式(23)成立的充要条件是 $\operatorname{rank} \bar{B}_0 \geqslant l-h$ 和 $\operatorname{rank} \bar{C}_0 \geqslant l-h$.

定理 8. 存在 $\bar{A}_0, \bar{B}_0, \bar{C}_0$ 使系统(7)在反馈结构 $\tilde{E}_{S_1S_2}$ 下是通道强关联的充要条件是：对任意 $S\subset N, S\neq\phi$,满足 $S\supseteq S_1$ 或 $S\subseteq S_2^\perp$ 均有

$$\bar{C}_{S^\perp}(\lambda I_l - A)^{-1}\bar{B}_S \not\equiv 0, \tag{24}$$

且当 $S_1=N$ 时,式(16)成立.

证明. 根据定义 2 和定义 4,系统(7)在反馈结构 $\tilde{E}_{S_1S_2}$ 下是通道强关联的充要条件是

(i) 对任意 $S\subset N$ 均有

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_{S^\perp} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda I_l - A & 0 \\ 0 & \lambda I_{\bar{n}_0} - \bar{A}_0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \bar{B}_{(S\cup S_1)} & 0 \\ 0 & \bar{B}_0 \end{bmatrix} \not\equiv 0;$$

(ii) 对任意 $S\subseteq S_2^\perp$ 均有

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_{S^\perp} & 0 \\ 0 & \bar{C}_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda I_l - A & 0 \\ 0 & \lambda I_{\bar{n}_0} - \bar{A}_0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \bar{B}_S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \not\equiv 0;$$

(iii) 对任意 $S\subsetneq S_2^\perp$ 均有

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_{S^\perp} & 0 \\ 0 & \bar{C}_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda I_l - A & 0 \\ 0 & \lambda I_{\bar{n}_0} - \bar{A}_0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \bar{B}_S & 0 \\ 0 & \bar{B}_0 \end{bmatrix} \not\equiv 0.$$

显然,(i) 等价于对任意 $S\subset N$,均有

$$\bar{C}_{S^\perp}(\lambda I_l - A)^{-1}\bar{B}_{(S\cup S_1)} \not\equiv 0. \tag{25}$$

当 $S_1=N$ 时,式(25)等价于式(16);当 $S_1\subset N$ 时,式(25)等价于：对任意 $S\supseteq S_1$,均有

$$\bar{C}_{S^\perp}(\lambda I_l - A)^{-1}\bar{B}_S \not\equiv 0;$$

(ii) 等价于对任意 $S\subseteq S_2^\perp$ 均有

$$\bar{C}_{S^\perp}(\lambda I_l - A)^{-1}\bar{B}_S \not\equiv 0;$$

当适当选取 $\bar{C}_0, \bar{A}_0, \bar{B}_0$, 满足

$$\bar{C}_0(\lambda I_{\bar{n}_0} - \bar{A}_0)^{-1}\bar{B}_0 \not\equiv 0.$$

则必有(iii)成立.

由定理 7 和定理 8 立即可得类似于定理 6 的结果.

定理 9. 设 $C_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n$, 且 $S_1, S_2\subseteq N$; $S_1\neq\phi$, $S_2\neq\phi$; 若对任意 $S\supseteq S_1$ 或 $S\subseteq S_2^\perp$ 均有

$$\min_{\lambda\in\sigma(A)} \operatorname{rank}\begin{bmatrix} \lambda I_l - A & \bar{B}_S \\ \bar{C}_{S^\perp} & 0 \end{bmatrix} \geqslant l,$$

$$\bar{C}_{S^{\perp}}(\lambda I_l - A)^{-1}\bar{B}_S \neq 0,$$

则存在 A_0, B_0, C_0 使系统(7)在反馈结构 $\tilde{E}_{S_1S_2}$ 下可反馈任置极点.

证明方法同定理 6,略去.

参 考 文 献

[1] Jamshidi, M., Large-Scale Systems Modeling and Control, North-Holland, New York, 1983.

[2] Sandell, N. R., Varaiya, P., Athans, M., and Safanov, M. G., Survey of Decentralized Control Methods for Large-scale Systems, *IEEE Trans. AC*-**23** (1978), 108.

[3] Siljak, D. D., Large Scale Dynamic Systems: Stability and Structure, North-Holand, New York, 1978.

[4] Singh, M. G., Decentralized Control, North-Holland, New York, 1981.

[5] Singh, M. G., Dynamical Hierachical Control, Revised Edition, North-Holland, New York, 1980.

[6] Wang, S. H., and Davison, E. J., On the Stabilization of Decentralized Control Systems, *IEEE Trans. AC*-**18** (1973), 473.

[7] Corfmat, J. P., and Morse, A. S., Decentralized Control of Linear Multi-variable Systems, *Autometica*, **12** (1976), 479.

[8] Sezer, M. E., and Siljak, D. D., On Structurally Fixed Modes, Preceedings of the IEEE Inter. Sympo. on Circu. and Systems, Chicago, Illinois, (1981), 558.

[9] Anderson, B. D. O., and Clements, D. J., Algebraic Characterization of Fixed Modes in Decentralized Control, *Automatica*, **17**(1981), 703.

DYNAMIC HIERARCHICAL CONTROL FOR LARGE-SCALE SYSTEMS

Shi Zhicheng Gao Weibing

(Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics)

Abstract

In this paper, a new scheme for stabilizing linear large-scale systems by dynamic hierarchical control is suggested. For a decentralized control linear large-scale system, a higher level system can be designed and its minimum dimension can be determined such that the resultant new system has no fixed modes under hierarchical control if the large-scale system is controllable and observable. Therefore a coordinate controller is obtained such that the overall closed-loop system can assign the poles arbitrarily.