

带有调宽采样器的控制系统稳态分析¹⁾

周 鸿 兴
(山 东 大 学)

摘 要

本文讨论了脉冲调宽(带有调宽采样器的)控制系统。文章给出了这类控制系统稳态分析的严格理论,得到了估计阶跃响应稳态精度的公式,提出了按照稳态精度选择采样周期的工程方法。文章提出的理论在一个实际温度控制系统中得到了验证。

一、调宽采样器及系统描述

考虑图1所示单位反馈控制系统,其中 $Y(s)$ 与 $U(s)$ 分别为系统的输出与控制;

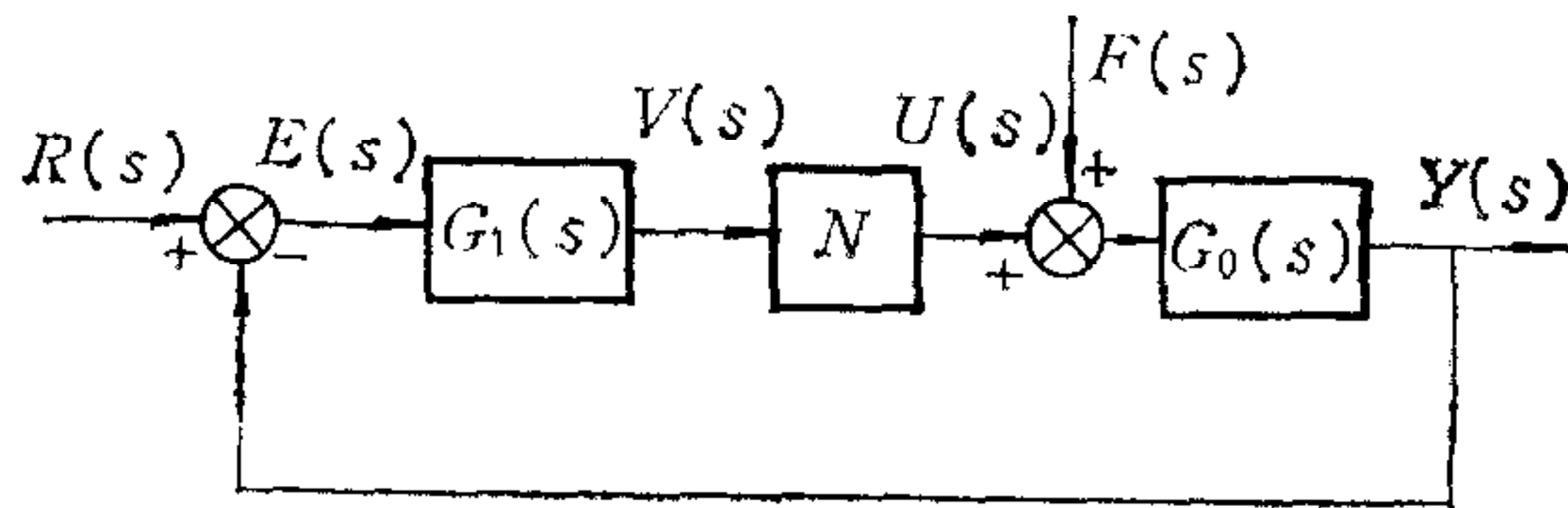


图 1

$R(s)$ 与 $F(s)$ 分别为系统的参考输入与扰动;控制对象 $G_0(s)$ 与校正装置 $G_1(s)$ 都是 s 的有理分式,且分子的最高幂次不超过分母的最高幂次。图中 N 是采样周期为 T 的调宽采样器,其输出信号 $u(t)$ 与输入信号 $v(t)$ 之间满足如下动态关系:

$$u(t) = \begin{cases} \bar{u}, & nT \leq t < (n + \alpha_n)T \\ \bar{u}, & (n + \alpha_n)T \leq t < (n + 1)T, \end{cases} \quad n = 0, 1, \dots \quad (1)$$

$$\alpha_n = K_0[v(nT) - v_{\min}], \quad n = 0, 1, \dots \quad (2)$$

其中 $\bar{u} < \bar{u}$, $K_0 = (v_{\max} - v_{\min})^{-1}$, v_{\max} 与 v_{\min} 分别表示 $v(t)$ 的最大允许值与最小允许值, $\alpha_n (0 \leq \alpha_n \leq 1)$ 称为调宽采样器 N 在第 n 个采样周期的导通率。

由于调宽采样器与调幅采样器有着本质的差别,因此无法用 Z 变换方法来研究;又因为元件 N 的非线性输入输出特性(1)、(2)不是静态的,因此也无法用描述函数法等方法来处理。正因如此,关于这类控制系统迄今还没有成熟的理论^[1,2]。本文从实际出发,提出了这类系统稳态分析的理论,证明了 I 型系统采用调宽采样器之后,仍有关于阶跃参考输

1) 科学基金资助项目。

本文于1984年6月20日收到。

入的无偏跟随能力和克服扰动的能力。

二、稳态输出的存在唯一性

本文仅考虑阶跃参考输入及阶跃扰动的情形: $r(t) = r_0 \cdot 1(t)$, $f(t) = f_0 \cdot 1(t)$ 。

定义 1. 在图 1 所示系统中, 如果存在某 $\alpha, 0 < \alpha < 1$, 使得在周期性矩形波控制信号

$$u(t) = \begin{cases} \bar{u}, & nT \leq t < (n + \alpha)T \\ \underline{u}, & (n + \alpha)T \leq t < (n + 1)T, \end{cases} \quad n = 0, 1, \dots \quad (3)$$

作用之下, 系统有周期性输出 $y(t)$, 则称它为系统的稳态输出。相应的 (3) 式称为稳态控制。定义稳态控制 (3) 式中的 α 为稳态导通率。

定义 2. 设 $f_0 = 0$, 如果 $e(t) = r_0 - y(t)$ 是一个直流分量为零的周期信号, 其中 $y(t)$ 是稳态输出, 则称该系统关于阶跃参考输入的跟随是直流无偏的。如果 $f_0 \neq 0$, $e(t)$ 的直流分量仍为零, 则称系统关于阶跃参考输入的直流无偏跟随具有抗扰动 $f_0 \cdot 1(t)$ 的能力。

定理 1. 在图 1 所示带有调宽采样器 N 的控制系统中, 假设零是 $G_1(s)$ 的一阶零点, $G_1(s)$ 的其余极点和 $G_0(s)$ 的所有极点都在左半平面内。如果阶跃参考输入与阶跃扰动满足下列条件

$$0 < \frac{r_0 - (\bar{u} + f_0) |G_0(0)|}{(\bar{u} - \underline{u}) |G_0(0)|} < 1, \quad (4)$$

则该系统有唯一的稳态输出 $y(t)$, 并且系统关于阶跃参考输入的直流无偏跟随具有抗阶跃扰动的能力。此时, 稳态导通率 α 由下式唯一确定:

$$\alpha = \frac{r_0 - (\bar{u} + f_0) |G_0(0)|}{(\bar{u} - \underline{u}) |G_0(0)|}. \quad (5)$$

因篇幅所限, 本文全部定理证明从略。

注解 1. 定理 1 的结论在下述条件之下仍成立: 设 $\pm j\hat{\omega}$ 是 $G_0(s)$ 的一对极点, 它的其余极点及 $G_1(s)$ 的所有极点都在左半平面内, 并且

$$T \neq \frac{2n\pi}{\hat{\omega}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

这里, 条件 (6) 是非常重要的, 否则系统将产生发散的自激振荡。

定理 2. 在图 1 所示系统中, 如果零是 $G_0(s)$ 的一阶极点, $G_1(s)$ 的分子与分母为同次幂多项式 ($G_1(\infty) \neq 0$), 则当阶跃扰动 $f_0 \cdot 1(t)$ 满足

$$\bar{u} \leq -f_0 \leq \underline{u} \quad (7)$$

时, 系统存在唯一稳态输出 $y(t)$, 此时

$$\alpha = \frac{-f_0 - \bar{u}}{\bar{u} - \underline{u}}, \quad (8)$$

并且只有当下列条件得到满足时, 系统才有直流无偏跟随能力:

$$G_0(\infty)G_1(\infty)(\bar{u} + f_0)v_{\min} = \frac{\bar{u} + f_0}{K_0(\bar{u} - \bar{u})}. \quad (9)$$

三、稳态精度分析和一个实例

设 $y(t)$ 是图 1 所示脉冲调宽控制系统的稳态输出, 由于 $r(t) = r_0 \cdot 1(t)$, 因此可将 $y(t)$ 写成 $y(t) = r_0 + \tilde{y}_T(t)$. 其中 $\tilde{y}_T(t)$ 表示采样周期为 T 时系统稳态输出的谐波分量. 稳态精度分析就是估计 $\tilde{y}_T(t)$ 的大小.

定理 3. 设 $G_0(s)$ 分母多项式的幂次 m 大于分子多项式的幂次, $G_0(s)$ 与 $G_1(s)$ 满足上节定理中的假设, 则存在与 T 无关的正常数 \tilde{K} , 使得

$$|\tilde{y}_T(t)| \leq \tilde{K}T^{m-1}, \quad t \geq 0. \quad (10)$$

注解 2. 由(10)式可知, 关于 $t \geq 0$ 一致地有

$$\lim_{T \rightarrow 0} |\tilde{y}_T(t)| = 0. \quad (11)$$

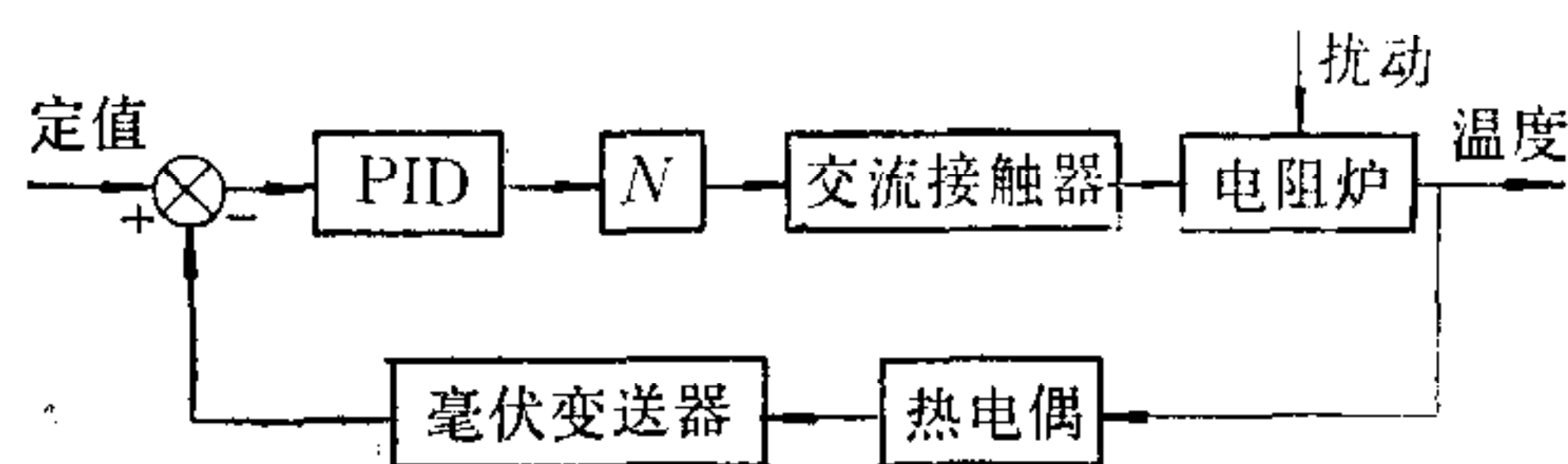
在定理 3 中, 假设 $m > l$ 是必不可少的, 否则式 (11) 不可能成立. 显然, 这一假设对绝大多数工业自动控制对象来说都成立. 此外, 在定理 3 的条件下,

$$\text{当 } m = l + 1 \text{ 时, } |\tilde{y}_T(t)| \leq 0.16M_0(\bar{u} - \bar{u})T; \quad (12)$$

$$\text{当 } m = l + 2 \text{ 时 } |\tilde{y}_T(t)| \leq 0.02M_0(\bar{u} - \bar{u})T^2. \quad (13)$$

其中 M_0 是仅与 $G_0(s)$ 有关的正常数.

实例. 作者曾对型号为 SRTX-12-9 的箱形电阻炉的温度控制进行实验. 图 2 是系



(图 2)

统方框图. N 由三角波发生器和 Smitt 触发器组成. 三角波周期 T 可调, 触发器驱动中间继电器并带动交流接触器. 通过控制交流接触器闭合及释放的时间比(导通率)来控制炉温. 这是一个典型的脉冲调宽控制系统, 控制要求是定值控制稳态误差不超过全量程的 5%.

根据估计式(10), 只要 T 足够小就能实现所需的稳态精度. 但是 T 越小继电器的使用寿命就越短, 因此我们希望 T 尽量大, 以延长继电器的使用寿命, 同时又使系统能达到所要求的稳态精度.

根据炉温飞升特性测试, 可用 $G_0(s) = e^{-\tau s}/T_a s + 1$ 近似描述电阻炉的动态特性, $T_a \approx 60$ 分, τ 约为 2—3 分. 由于纯时滞不影响 $G_0(s)$ 的幅频特性, 因此估计式(10)仍成立. 现取 $\bar{u} = 1, \bar{u} = 0$, 则(12)式成为

$$|\tilde{y}_T(t)| \leq \frac{0.16T}{T_a}.$$

于是, 只要采样周期 T

$$T \leq 6.3T_a\rho, \quad (14)$$

就能使系统输出稳态达到预先指定的相对精度 ρ 。因此, $\rho = 5\%$ 时取 $T = 1.8$ 分; $\rho = 1\%$ 时取 $T = 3.2$ 分; $\rho = 1.5\%$ 时取 $T = 5$ 分。当炉温定值为全量程的一半时, 采用三种不同采样周期时的输出相对误差实测结果分别为 0.71% 、 0.9% 及 3.1% 。由此可见, 按照(14)式选择采样周期是行之有效的。

由于(14)式是利用幅频特性并根据充分条件得到的估计式, 因此在实际选择采样周期时还可以根据计算结果在满足精度要求的同时尽量增大采样周期 T 。

作者向一起参加实验工作的济南自动化仪表厂工程师刘铁森同志表示衷心的感谢。

参 考 文 献

- [1] Kuo, B. C., Digital Control Systems, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1980.
- [2] 绪方胜彦, 现代控制工程, 科学出版社, 1981.
- [3] 彭世镒等, 水溶液育晶槽高精度的双位控温, 山东大学学报, 1978 年第 3、4 期, 66—76 页.

STEADY-STATE ANALYSIS FOR CONTROL SYSTEMS WITH A PULSE-WIDTH SAMPLER

ZHOU HONGXING
(Shandong University)

ABSTRACT

In this paper, pulse-width control systems---sampled-data control systems with a pulse-width sampler are considered. Strict theory on the steady-state analysis of this kind of system is given. A formula to estimate the steady-state accuracy of a step response is obtained while an engineering method to choose a sampling period is given according to the requirement for steady-state accuracy. The theory of steady-state analysis established in this paper is verified by an experiment on an actual temperature control system with a trigger as a pulse-width sampler and switch-heating.