第13卷 第3期 自 动 化 学 报 Vol.13, No. 3
1987 年 5 月 ACTA AUTOMATICA SINICA May, 1987

模糊系统的串联补偿解耦[1)]

徐承伟 吕勇哉
(昆 明 工 学 院)

摘 要

本文提出并解决模糊关系系统的串联补偿解耦问题，给出了串联解耦补偿器的结构、实现解耦的一个充分条件和串联补偿解耦问题的解存在的一个充要条件.

一、引 言

模糊系统理论近年来获得了相当大的进展. 一方面，对于用模糊关系方程表达的模糊关系系统进行了诸如可观性、可控性或最优控制等方面的研究[1]；另一方面，从语言化(linguistic)的途径研究模糊控制或模糊模型辨识等也得到了一定的成果[2,3]. 语言式控制器的工业应用已有了成功的报道[2]. 在一定的条件下，语言式的模糊系统与模糊关系系统实质上是等价的.

本文提出并研究模糊系统的解耦这一问题，考虑了串联补偿解耦问题，提出了模糊关系系统中串联解耦补偿器的结构，进而给出了实现解耦的一个充分条件，还给出了解耦问题有解的一个充分必要条件，并作了必要的证明.

二、模糊关系系统的串联补偿解耦问题及实现串联补偿解耦的一个充分条件

为了便于表达主要思想，避免繁琐的符号运算淹没基本概念，本文在一个二输入二输出的静态模糊关系系统的基础上展开讨论. 所使用的方法，不难推广到动态的和、或高维的系统中去.

今考虑图 1 所示的模糊关系系统. 系统的关系方程描述为

$$\begin{cases} \underset{\sim}{y}_1 = \underset{\sim}{x}_1 \circ \underset{\sim}{x}_2 \circ R_1, \\ \underset{\sim}{y}_2 = \underset{\sim}{x}_1 \circ \underset{\sim}{x}_2 \circ R_2 \end{cases} \tag{1}$$

式中，“$\circ$”定义为 max-min 合成算子；输入 $\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2$ 和输出 $\underset{\sim}{y}_1, \underset{\sim}{y}_2$ 分别为论域 X_1, X_2 和 Y_1, Y_2 上的模糊变量；R_1, R_2 为模糊关系：$R_1 \in F(X_1 \times X_2 \times Y_1)$，$R_2 \in F(X_1 \times X_2 \times Y_2)$，这儿 $F(A)$ 为集合“论域 A 上的所有模糊集合”，一般地说，R_1 和 R_2 是未解耦的模糊关系，即 $\underset{\sim}{y}_1$ 同时受到 $\underset{\sim}{x}_1$ 和 $\underset{\sim}{x}_2$ 的影响，$\underset{\sim}{y}_2$ 亦然.

本文于 1986 年 1 月 22 日收到.
1) 本研究工作获国家教委基金资助.

图 1　二输入二输出模糊系统

需要指出,因为所讨论的是模糊系统,故变量间的依存关系实指变量的隶属函数间的依存关系——因模糊变量由其隶属函数唯一确定．例如，上文中的 $\underset{\sim}{y}_1$ 同时受到 $\underset{\sim}{x}_1$，$\underset{\sim}{x}_2$ 的影响,即指 $\underset{\sim}{y}_1$ 的隶属函数同时受到 $\underset{\sim}{x}_1$ 和 $\underset{\sim}{x}_2$ 的隶属函数的影响．这样，所谓解耦，亦是指对变量的隶属函数间的依存关系的解耦．

在实际应用中,常常需要把一个模糊变量非模糊化，即把模糊集合映射为具体的数．显见,假如一个模糊系统在隶属函数的意义下是解耦的,那么它在非模糊的意义下也是解耦的．这是因为对于指定的非模糊化过程而言，同一个模糊集合不可能对应两个不同的数．

今考虑采用串联补偿方式对系统(1)解耦,可构造如图 2 的串联补偿解耦系统．其中的串联补偿器也是一个模糊关系系统,它以 $\underset{\sim}{u}_1$，$\underset{\sim}{u}_2$ 为输入，$\underset{\sim}{x}_1$，$\underset{\sim}{x}_2$ 为输出，

$$\begin{cases}\underset{\sim}{x}_1 = \underset{\sim}{u}_1\circ\underset{\sim}{u}_2\circ\tilde{R}_1, \\ \underset{\sim}{x}_2 = \underset{\sim}{u}_1\circ\underset{\sim}{u}_2\circ\tilde{R}_2.\end{cases}\tag{2}$$

这儿 $\underset{\sim}{u}_1,\underset{\sim}{u}_2$ 分别为论域 U_1,U_2 上的模糊变量．而模糊关系 $\tilde{R}_1\in F(U_1\times U_2\times X_1)$，$\tilde{R}_2\in F(U_1\times U_2\times X_2)$．$\tilde{R}_1$ 和 $\tilde{R}_2$ 完全确定了解耦补偿器(2)．

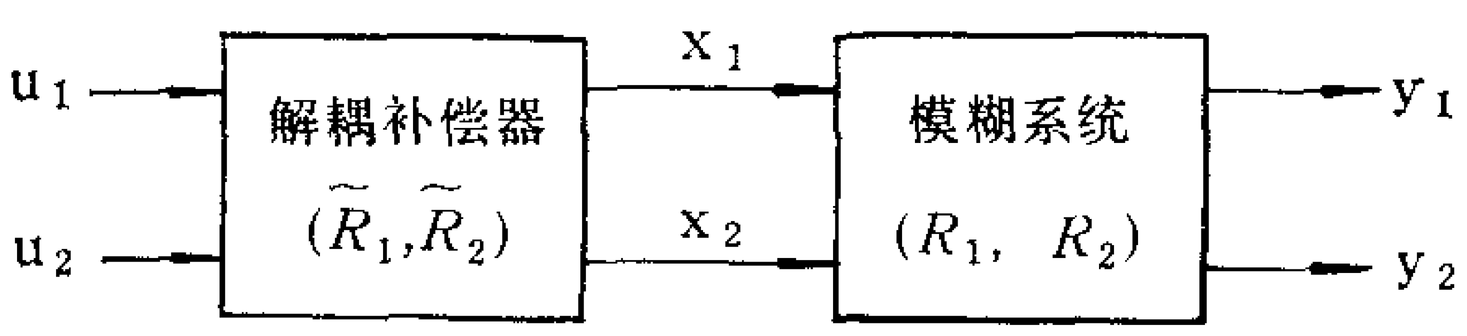

图 2　串联补偿解耦系统

解耦的目标是使 $\underset{\sim}{y}_1$ 只受 $\underset{\sim}{u}_1$ 的影响，$\underset{\sim}{y}_2$ 只受 $\underset{\sim}{u}_2$ 的影响．可以看到,适当地确定解耦补偿器(即 $\tilde{R}_1,\tilde{R}_2$) 有可能达到解耦的目的．

定理 1．解耦补偿器(2)使系统(1)解耦,如果

(1) 所有的 $\underset{\sim}{u}_1,\underset{\sim}{u}_2$ 都是正规模糊集合,即

$$\begin{cases}\forall\underset{\sim}{u}_1,\ \exists u_1\in U_1,\ \mu_{\underset{\sim}{u}_1}(u_1)=1, \\ \forall\underset{\sim}{u}_2,\ \exists u_2\in U_2,\ \mu_{\underset{\sim}{u}_2}(u_2)=1.\end{cases}\tag{3}$$

(2) 定义

$$\begin{cases}\bar{R}_1\triangleq(\tilde{R}_1\times\tilde{R}_2)\circ R_1, \\ \bar{R}_2\triangleq(\tilde{R}_1\times\tilde{R}_2)\circ R_2,\end{cases}\tag{4}$$

则

$$\forall u_1^{(1)},\ u_1^{(2)}\in U_1,\ \forall u_2^{(1)},\ u_2^{(2)}\in U_2,$$
$$\begin{cases}\mu_{\bar{R}_1}(u_1,u_2^{(1)},y_1)=\mu_{\bar{R}_1}(u_1,u_2^{(2)},y_1), \\ \mu_{\bar{R}_2}(u_1^{(1)},u_2,y_2)=\mu_{\bar{R}_2}(u_1^{(2)},u_2,y_2).\end{cases}\tag{5}$$

(5)式意味着 $\bar{R}_1(u_1,u_2,y_1)$ 是某个 $\bar{R}_1(u_1,y_1)$ 在 U_2 上的柱面扩展；$\bar{R}_2(u_1,u_2,y_2)$ 是某个 $\bar{R}_2(u_2,y_2)$ 在 U_1 上的柱面扩展.

证明. 把(2)式代入(1)式有

$$y_1=(u_1\circ u_2\circ\tilde{R}_1)\circ(u_1\circ u_2\circ\tilde{R}_2)\circ R_1, \tag{6}$$

$$y_2=(u_1\circ u_2\circ\tilde{R}_1)\circ(u_1\circ u_2\circ\tilde{R}_2)\circ R_2. \tag{7}$$

附录 1 证明了(6)、(7)式等价于

$$y_1=u_1\circ u_2\circ\bar{R}_1, \tag{8}$$

$$y_2=u_1\circ u_2\circ\bar{R}_2, \tag{9}$$

其中

$$\bar{R}_1\triangleq(\tilde{R}_1\times\tilde{R}_2)\circ R_1, \tag{10}$$

$$\tilde{R}_2\triangleq(\tilde{R}_1\times\tilde{R}_2)\circ R_2. \tag{11}$$

设有正规模糊集合 $A_1,A_2\in F(U_2)$，$B_1,B_2\in F(U_1)$，且 $A_1\neq A_2$，$B_1\neq B_2$（即存在 $u_2\in U_2$ 使 $\mu_{A_1}(u_2)\neq\mu_{A_2}(u_2)$，存在 $u_1\in U_1$ 使 $\mu_{B_1}(u_1)\neq\mu_{B_2}(u_1)$）. 由 A_1,A_2 及 B_1,B_2 的任意性，如果能证明

$$A_1\circ\bar{R}_1=A_2\circ\bar{R}_1 \tag{12}$$

及

$$B_1\circ\bar{R}_2=B_2\circ\bar{R}_2, \tag{13}$$

则定理 1 亦得证. 先看 $A_1\circ\bar{R}_1$,

$$\mu_{A_1\circ\bar{R}_1}(u_1,y_1)=\sup_{u_2}[\mu_{A_1}(u_2)\wedge\mu_{\bar{R}_1}(u_1,u_2,y_1)]. \tag{14}$$

这儿 $\wedge=\min$. 由于 $\mu_{\bar{R}_1}(u_1,u_2,y_1)$ 事实上不随 u_2 而变，若记

$$\mu_{\bar{R}_1}(u_1,y_1)=\mu_{\bar{R}_1}(u_1,u_2,y_1)\quad\forall u_2, \tag{15}$$

则(14)式可作

$$\mu_{A_1\circ\bar{R}_1}(u_1,y_1)=\mu_{\bar{R}_1}(u_1,y_1)\wedge[\sup_{u_2}\mu_{A_1}(u_2)]. \tag{16}$$

又由 A_1 的正规性有

$$\sup_{u_2}\mu_{A_1}(u_2)=1. \tag{17}$$

于是，

$$\mu_{A_1\circ\bar{R}_1}(u_1,y_1)=\mu_{\bar{R}_1}(u_1,y_1). \tag{18}$$

用完全类似的手法可以推出

$$\mu_{A_2\circ\bar{R}_1}(u_1,y_1)=\mu_{\bar{R}_1}(u_1,y_1), \tag{19}$$

即

$$\mu_{A_1\circ\bar{R}_1}(u_1,y_1)=\mu_{A_2\circ\bar{R}_1}(u_1,y_1) \tag{20}$$

或

$$A_1\circ\bar{R}_1=A_2\circ\bar{R}_1. \tag{21}$$

再利用 B_1,B_2 的正规性及(5)式，容易导出

$$B_1\circ\bar{R}_2=B_2\circ\bar{R}_2. \tag{22}$$

三、串联补偿解耦问题解的存在性

注意到 $\bar{R}_1$ 和 $\bar{R}_2$ 表示了实现解耦以后系统的模糊关系描述. $\bar{R}_1$ 和 $\bar{R}_2$ 可以人为指

定，但它们必须满足若干约束条件：(5)式，(29)式，及保证下面将要谈到的 $\tilde{R}$ 的可分解性。

对给定的 $R_1, R_2, \bar{R}_1, \bar{R}_2$，解耦问题的解就是满足(10)、(11)两式的 $\tilde{R}_1$，$\tilde{R}_2$. 现在考虑根据 $R_1, R_2, \bar{R}_1, \bar{R}_2$ 确定 $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2$ 的问题. 如果记

$$\tilde{R} \triangleq \tilde{R}_1 \times \tilde{R}_2, \tag{23}$$

这儿"×"表笛卡尔积运算，则由(10)、(11)式有

$$\bar{R}_1 = \tilde{R} \circ R_1, \tag{24}$$

$$\bar{R}_2 = \tilde{R} \circ R_2. \tag{25}$$

假定(24)、(25)式对 $\tilde{R}$ 的解集非空，则由(24)、(25)式分别有

$$\tilde{R} = (R_1 @ \bar{R}_1^{-1})^{-1}, \tag{26}$$

$$\tilde{R} = (R_2 @ \bar{R}_2^{-1})^{-1}, \tag{27}$$

即

$$(R_1 @ \bar{R}_1^{-1})^{-1} = (R_2 @ \bar{R}_2^{-1})^{-1}, \tag{28}$$

或

$$R_1 @ \bar{R}_1^{-1} = R_2 @ \bar{R}_2^{-1}. \tag{29}$$

这里的@算子定义为

$$\mu_{R_1 @ \bar{R}_1^{-1}}(u_1, x_1, x_2) = \inf_{y_1}[\mu_{R_1}(x_1, x_2, y_1) \alpha \mu_{\bar{R}_1^{-1}}(y_1, u_1)], \tag{30}$$

$$\mu_{R_2 @ \bar{R}_2^{-1}}(u_2, x_1, x_2) = \inf_{y_2}[\mu_{R_2}(x_1, x_2, y_2) \alpha \mu_{\bar{R}_2^{-1}}(y_2, u_2)]. \tag{31}$$

而 α 算子是熟悉的，

$$a \alpha b = \begin{cases} 1, & a \leqslant b, \\ b, & a > b, \end{cases} \tag{32}$$

$$a, b \in [0, 1].$$

可以看到，在(24)、(25)式中，由于 $\bar{R}_1$ 和 $\bar{R}_2$ 可以在一定范围内变化，因此可以通过调整 $\bar{R}_1$ 和 $\bar{R}_2$ 使两式中关于 $\tilde{R}$ 的解集非空. 附录 2 给出了一个定理，它表明对任意的 $R_1(R_2)$，总可以找到 $\bar{R}_1(\bar{R}_2)$，使方程

$$\bar{R}_1 = \tilde{R} \circ R_1, \quad (\bar{R}_2 = \tilde{R} \circ R_2)$$

关于 $\tilde{R}$ 的解集非空，并且给出了为使 $\tilde{R}$ 的解集非空 R_1 与 $\bar{R}_1$ (R_2 与 $\bar{R}_2$) 应满足的一个充分必要条件. 根据 Sanchez 的定理[1]，如果(24)、(25)式关于 $\tilde{R}$ 的解集非空，则由(26)、(27)式得出的正是 $\tilde{R}$ 的上界解 (greatest elements solution). 当然，也可以考虑采用上界解之外的解.

$\bar{R}_1$ 与 $\bar{R}_2$ 之间存在着由(29)式表示的约束. 因此，在确定 $\bar{R}_1, \bar{R}_2$ 时，应使之满足这一约束. 这一点看来是实现解耦时的主要困难之一.

$\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$ 确定之后，可以用(26)或(27)式算出 $\tilde{R}$，进而计算 $\tilde{R}_1$ 和 $\tilde{R}_2$. 但这儿有一个可分解性问题：在什么情况下 $\tilde{R}$ 能够被分解为 $\tilde{R}_1$ 和 $\tilde{R}_2$，使 $\tilde{R}_1 \times \tilde{R}_2 = \tilde{R}$? 即便 $\tilde{R}$ 可以分解为 $\tilde{R}_1$ 和 $\tilde{R}_2$，满足 $\tilde{R}_1 \times \tilde{R}_2 = \tilde{R}$ 的 $\tilde{R}_1$ 和 $\tilde{R}_2$ 又是否唯一? 文献[4]对前一个问题作了讨论，且给出了 $\tilde{R}$ 可分解的一个充分必要条件.

因为存在着 $\tilde{R}$ 不可分解的可能性，解耦问题的求解就变得愈加困难了. 为了克服这

些困难，设想在进行解耦设计时采用某种试差或搜索的方式．其大致步骤为：

1）给出初始的 $\bar{R}_1$ 和 $\bar{R}_2$，使(29)式成立；

2）利用(26)或(27)式计算 $\tilde{R}$；

3）检验 $\tilde{R}$ 的可分解性．若 $\tilde{R}$ 不可分解，修改 $\bar{R}_1$ 和、或 $\bar{R}_2$（修改后的 $\bar{R}_1$ 和 $\bar{R}_2$ 仍应满足(5)式及(29)式），并返回 2)，直至 $\tilde{R}$ 可分解为止．

4）利用文[4]的结果，把 $\tilde{R}$ 分解为 $\tilde{R}_1$ 和 $\tilde{R}_2$.

这儿并未考察通过调整 $\bar{R}_1$ 和 $\bar{R}_2$ 是否一定能使 $\tilde{R}$ 可分解的问题，这个问题的结论显然与 R_1, R_2 的性质有关．假定通过调整 $\bar{R}_1$ 和 $\bar{R}_2$ 必定能使 $\tilde{R}$ 可分解，那么问题的关键就是建立一种试差或搜索的方法(算法)．关于这一点，本文不拟做进一步的讨论．

四、把上述结论推广到动态系统的一个例子

设有二输入二输出离散时间模糊关系系统 (R_1, R_2)：

$$\begin{cases} \underset{\sim}{y}_1(k) = \underset{\sim}{y}_1(k-1)\circ \underset{\sim}{x}_1(k-1)\circ \underset{\sim}{x}_2(k-1)\circ \underset{\sim}{R}_1 \\ \underset{\sim}{y}_2(k) = \underset{\sim}{y}_2(k-2)\circ \underset{\sim}{x}_1(k-1)\circ \underset{\sim}{x}_2(k-2)\circ R_2, \end{cases} \tag{33}$$

式中 $\underset{\sim}{y}_1(\cdot)$ 和 $\underset{\sim}{y}_2(\cdot)$ 为输出模糊变量；$\underset{\sim}{x}_1(\cdot)$ 和 $\underset{\sim}{x}_2(\cdot)$ 为输入模糊变量：$\underset{\sim}{y}_1(\cdot)\in F(Y_1)$，$\underset{\sim}{y}_2(\cdot)\in F(Y_2)$，$\underset{\sim}{x}_1(\cdot)\in F(X_1)$，$\underset{\sim}{x}_2(\cdot)\in F(X_2)$．今构造串联解耦补偿器 $(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2)$，

$$\begin{cases} \underset{\sim}{x}_1(k) = \underset{\sim}{u}_1(k)\circ \underset{\sim}{u}_2(k)\circ \tilde{R}_1, \\ \underset{\sim}{x}_2(k) = \underset{\sim}{u}_1(k)\circ \underset{\sim}{u}_2(k)\circ \tilde{R}_2. \end{cases} \tag{34}$$

式中 $\underset{\sim}{u}_1(\cdot)$ 和 $\underset{\sim}{u}_2(\cdot)$ 是补偿器的输入，$\underset{\sim}{u}_1(\cdot)\in F(U_1)$，$\underset{\sim}{u}_2(\cdot)\in F(U_2)$，论域 U_1, U_2, X_1, X_2, Y_1, Y_2 的一般元素分别记为 u_1, u_2, x_1, x_2, y_1, y_2．于是，有以下结论：

1. 解耦补偿器(34)使系统(33)解耦(即 $\underset{\sim}{y}_1(\cdot)$ 只受 $\underset{\sim}{u}_1(\cdot)$ 的影响，$y_2(\cdot)$ 只受 $\underset{\sim}{u}_2(\cdot)$ 的影响)，如果

1）$\underset{\sim}{u}_1(\cdot)$，$\underset{\sim}{u}_2(\cdot)$ 都是正规模糊集合，即

$$\begin{cases} \forall k, \ \exists u_1\in U_1, \ \mu_{\bar{u}_1(k)}(u_1) = 1, \\ \forall k, \ \exists u_2\in U_2, \ \mu_{\bar{u}_2(k)}(u_2) = 1. \end{cases} \tag{35}$$

2）定义

$$\begin{aligned} \bar{R}_1 &\triangleq (\tilde{R}_1\times \tilde{R}_2)\circ R_1, \\ \bar{R}_2 &\triangleq (\tilde{R}_1\times \tilde{R}_2)\circ R_2, \end{aligned} \tag{36}$$

则

$$\forall u_1^{(1)}, \ u_1^{(2)}\in U_1, \ u_2^{(1)}, \ u_2^{(2)}\in U_2,$$

$$\begin{cases} \mu_{\bar{R}_1}(y_1, u_1, u_2^{(1)}) = \mu_{\bar{R}_1}(y_1, u_1, u_2^{(2)}), \\ \mu_{\bar{R}_2}(y_2, u_1^{(1)}, u_2) = \mu_{\bar{R}_2}(y_2, u_1^{(2)}, u_2), \end{cases} \tag{37}$$

即 $\bar{R}_1(y_1, u_1, u_2)$ 是某个 $\bar{R}_1(y_1, u_1)$ 在 U_2 上的柱面扩展，$\bar{R}_2(y_2, u_1, u_2)$ 是某个 $\bar{R}_2(y_2, u_2)$ 在 U_1 上的柱面扩展．应该指出，这一结论在整个叙述上已做了简化，因此它在形式上与定理 1 几乎完全相同．但实际上，这儿的 $\bar{R}_1, \bar{R}_2$, $\tilde{R}_1$, $\tilde{R}_2$, R_1, R_2 与定理 1 中的是不一样的．例如，在(37)式中，$\bar{R}_2$ 事实上是某个与 $u_1(\cdot)$ 无关的 $\bar{R}_2$ 在和 $\underset{\sim}{u}_1(k-1)$，$\underset{\sim}{u}_1(k-2)$ 对应的两个 U_1 上的柱面扩展．

2. 如果限于考虑模糊关系方程的上界解，则所选取的 $\bar{R}_1, \bar{R}_2$ 还应满足

$$R_1 @ \bar{R}_1^{-1} = R_2 @ \bar{R}_2^{-1}. \tag{38}$$

3. 定义

$$\tilde{R} = \tilde{R}_1 \times \tilde{R}_2. \tag{39}$$

如果方程

$$\bar{R}_1 = \tilde{R} \circ R_1 \tag{40}$$

和

$$\bar{R}_2 = \tilde{R} \circ R_2 \tag{41}$$

关于 $\tilde{R}$ 的解集非空，则可以解出 $\tilde{R}$ 的上界解，

$$\tilde{R} = (R_1 @ \bar{R}_1^{-1})^{-1} \tag{42}$$

或

$$\tilde{R} = (R_2 @ \bar{R}_2^{-1})^{-1}. \tag{43}$$

当然，在解出 $\tilde{R}$ 以前应保证

$$R_1 @ \bar{R}_1^{-1} = R_2 @ \bar{R}_2^{-1}. \tag{44}$$

五、结　语

模糊系统的解耦是一个新的领域．显然，除了串联补偿方式外，还可以考虑反馈解耦等方式．对于多变量模糊系统，如何简化解耦算法，使之实用化是一个重要的课题．本文所做的工作，只是一个开端．

附　录　1

只要证明

$$\underline{y}_1 = (\underline{u}_1 \circ \underline{u}_2 \circ \tilde{R}_1) \circ (\underline{u}_1 \circ \underline{u}_2 \circ \tilde{R}_2) \circ R_1 = \underline{u}_1 \circ \underline{u}_2 \circ [(\tilde{R}_1 \times \tilde{R}_1) \circ R_1] = \underline{u}_1 \circ \underline{u}_2 \circ \bar{R}_1 \tag{a-1}$$

就可以了．现考察 $\underline{y}_1$ 的隶属函数表达式，

$$\begin{aligned}
\mu_{\underline{y}_1}(y_1) &= \mu_{(\underline{u}_1 \circ \underline{u}_2 \circ \tilde{R}) \circ (\underline{u}_1 \circ \underline{u}_2 \circ \tilde{R}_2) \circ R_1}(y_1) \\
&= \sup_{x_1}\{(\sup_{u_1}[\mu_{\underline{u}_1}(u_1) \wedge (\sup_{u_2}(\mu_{\underline{u}_2}(u_2) \wedge \mu_{\tilde{R}_1}(u_1, u_2, x_1)))]) \\
&\quad \wedge \sup_{x_2}[(\sup_{u_1}[\mu_{\underline{u}_1}(u_1) \wedge (\sup_{u_2}(\mu_{\underline{u}_2}(u_2) \wedge \mu_{\tilde{R}_2}(u_1, u_2, x_2)))]) \wedge \mu_{R_1}(x_1, x_2, y_1)]\} \\
&= \sup_{x_1}\{[\sup_{u_1}\sup_{u_2}(\mu_{\underline{u}_1}(u_1) \wedge \mu_{\underline{u}_2}(u_2) \wedge \mu_{\tilde{R}_1}(u_1, u_2, x_1))] \\
&\quad \wedge \sup_{x_2}[(\sup_{u_1}\sup_{u_2}(\mu_{\underline{u}_1}(u_1) \wedge \mu_{\underline{u}_2}(u_2) \wedge \mu_{\tilde{R}_2}(u_1, u_2, x_2))) \wedge \mu_{R_1}(x_1, x_2, y_1)]\} \\
&= \sup_{x_1}\sup_{x_2}\{[\sup_{u_1}\sup_{u_2}(\mu_{\underline{u}_1}(u_1) \wedge \mu_{\underline{u}_2}(u_2) \wedge \mu_{\tilde{R}_1}(u_1, u_2, x_1))] \\
&\quad \wedge [\sup_{u_1}\sup_{u_2}(\mu_{\underline{u}_1}(u_1) \wedge \mu_{\underline{u}_2}(u_2) \wedge \mu_{\tilde{R}_2}(u_1, u_2, x_2))] \wedge \mu_{R_1}(x_1, x_2, y_1)\} \\
&= \sup_{x_1}\sup_{x_2}[\sup_{u_1}\sup_{u_2}(\mu_{\underline{u}_1}(u_1) \wedge \mu_{\underline{u}_2}(u_2) \vee \mu_{\tilde{R}_1}(u_1, u_2, x_1) \\
&\quad \wedge \mu_{\tilde{R}_2}(u_1, u_2, x_2) \wedge \mu_{R_1}(x_1, x_2, y_1)] \\
&= \mu_{\underline{u}_1 \circ \underline{u}_2 \circ [(\tilde{R}_1 \times \tilde{R}_2) \circ R_1]}(u_1, u_2, y_1).
\end{aligned} \tag{a-2}$$

于是有

$$\underset{\sim}{y}_1 = \underset{\sim}{u}_1 \circ \underset{\sim}{u}_2 \circ [(\tilde{R}_1 \times \tilde{R}_2) \circ R_1] = \underset{\sim}{u}_1 \circ \underset{\sim}{u}_2 \circ \bar{R}_1. \tag{a-3}$$

用完全类似的方法可以证明

$$\underset{\sim}{y}_2 = \underset{\sim}{u}_1 \circ \underset{\sim}{u}_2 \circ \bar{R}_2.$$

证毕.

附　录　2

定理　对于模糊关系 $\bar{R}_1 \in F(U_1 \times U_2 \times Y_1)$, $\tilde{R} \in F(U_1 \times U_2 \times X_1 \times X_2)$, $R_1 \in F(X_1 \times X_2 \times Y_1)$, 方程

$$\bar{R}_1 = \tilde{R} \circ R_1 \tag{a-4}$$

存在关于 $\tilde{R}$ 的非空解集，当且仅当 $\forall u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$, $y_1 \in Y_1$ $\exists x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, 使

$$\mu_{R_1}(x, x_2, y_1) \geqslant \mu_{\bar{R}_1}(u_1, u_2, y_1). \tag{a-5}$$

证明. 不妨记满足 (a-5) 式的 x_1, x_2 为 x_1^*, x_2^*, 即

$$\mu_{R_1}(x_1^*, x_2^*, y_1) \geqslant \mu_{\bar{R}_1}(u_1, u_2, y_1). \tag{a-6}$$

今取

$$\mu_{\tilde{R}}(u_1, u_2, x_1, x_2) = \begin{cases} \mu_{\bar{R}_1}(u_1, u_2, y_1), & x_1 = x_1^*, \ x_2 = x_2^*, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} \tag{a-7}$$

于是有

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{R} \circ R_1}(u_1, u_2, y_1) &= \sup_{x_1, x_2} [\mu_{\tilde{R}}(u_1, u_2, x_1, x_2) \wedge \mu_{R_1}(x_1, x_2, y_1)] \\ &= \mu_{\tilde{R}}(u_1, u_2, x_1^*, x_2^*) \wedge \mu_{R_1}(x_1^*, x_2^*, y_1) = \mu_{\bar{R}_1}(u_1, u_2, y_1), \end{aligned} \tag{a-8}$$

即

$$\tilde{R} \circ R_1 = \bar{R}_1. \tag{a-9}$$

另一方面，假定 (a-5) 式不成立，则由 (a-8) 式可见，必然存在某些 (u_1, u_2, y_1), 使得

$$\mu_{\tilde{R} \circ R_1}(u_1, u_2, y_1) < \mu_{\bar{R}_1}(u_1, u_2, y_1),$$

从而

$$\tilde{R} \circ R_1 \neq \bar{R}_1.$$

容易看到，只要做少量符号变换，定理中的 R_1 和 $\bar{R}_1$ 换成 R_2 和 $\bar{R}_2$ 后定理仍然成立.

参　考　文　献

[1] Dubois D. and Prade H., Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, Academic, New York, 1980.

[2] Mamdani E. H. and Gaines B. R., Eds, Fuzzy Reasoning and Its Applications, Academic, London, 1981.

[3] Pedrycz W., An Identification Algorithm in Fuzzy Relational Systems, *Fuzzy Sets and Systems* 13(1984), 153—167.

[4] Nola A. D. et al., When Is a Fuzzy Relation Decomposable in Two Fuzzy Sets? *Fuzzy Sets and Systems* 16(1985), 87—90.

DECOUPLING IN FUZZY SYSTEMS——A CASCADE COMPENSATION APPROACH

Xu Chengwei　　Lü Yongzai

(Kunming Institute of Technology)

Abstract

In this paper, the decoupling problem of cascade compensation in fuzzy relational systems is proposed and solved. The structure of the cascade decoupling compensator and the sufficient condition for realizing the decoupling are given and proved. Furthermore, a necessary and sufficient condition for the existence of solution to the decoupling problem with cascade compensation is also given and proved.