第13卷 第3期 自 动 化 学 报 Vol.13, No. 3
1987 年 5 月 ACTA AUTOMATICA SINICA May, 1987

关于 MRAS Landau 设计方法的一个注记

王礼信 周俊荣
(北京轻工业学院)

摘 要

本文给出了一些新的自适应规律族,从而扩展了这一方法的适用范围.

一、问题的提出

MRAS 的超稳定性设计方法是由 I. D. Landau 首先提出的. 它与其他方法相比较,具有一系列优点[1]. 用 Landau 引理[2,3],可以方便地获得许多满足完全渐近自适应条件[2]的自适应规律族. 这是该方法突出的优点.

然而, Landau 引理在其适用范围内[2],仅给出系统实现渐近超稳定性的充分条件,而不是充要条件. 因此,除 Landau 引理规定的自适应规律族外,必然还存在许多能使系统满足渐近超稳定性条件的规律族. 本文以 Landau 引理为基础, 导出了一些新的自适应规律族,从而扩展了 Landau 方法的优点.

二、主要结果

Landau 引理给出了 MRAS 等效非线性时变反馈系统的反馈块满足 POPOV 积分不等式第二分量 $\eta_2(0, t_1) \geqslant -\gamma_2^2$, $\gamma_2^2 > 0$, $\forall t_1 \geqslant 0$ 的解 $\phi_2(\boldsymbol{v}(t), t)$ 的形式[2]:

$$\phi_2(\boldsymbol{v}(t), t) = F'(t)\boldsymbol{v}(t)[G'(t)\boldsymbol{y}(t)]^T. \tag{1}$$

式中 $F'(t), G'(t)$ 是正半定时变矩阵, $\forall t \geqslant 0$, $\boldsymbol{v}(t)$ 是线性补偿器的输出矢量(n 维)[2], $\boldsymbol{y}(t)$ 是可调系统的状态矢量 (q 维).

$$\phi_2^{ij}(\boldsymbol{v}(t), t) = \alpha_{ij}(t)v_i(t)y_j(t), \tag{2}$$

$$i = 1, 2, \cdots, n, \; j = 1, 2, \cdots, q.$$

式中 $\phi_2^{ij}(\boldsymbol{v}(t), t)$ 是 $\phi_2(\boldsymbol{v}(t), t)$ 的第 i 行第 j 列的元素, $\alpha_{ij}(t) \geqslant 0$, $\forall t \geqslant 0$, $v_i(t)$ 是矢量 $\boldsymbol{v}(t)$ 的第 i 个分量, $y_j(t)$ 是矢量 $\boldsymbol{y}(t)$ 的第 j 个分量.

命题 1. 当

$$\phi_2(\boldsymbol{v}(t), t) = (F_1^T(t)F_1(t)\boldsymbol{v}(t)y_1(t), \cdots, F_q^T(t)F_q(t)\boldsymbol{v}(t)y_q(t))$$

时,有 $\eta_2(0, t_1) \geqslant 0$. 式中 $F_j(t)$ 是任意有 n 列的时变矩阵,它的每一个元素当 $t \geqslant 0$ 时是 t 的连续函数或分段连续函数.

本文于 1985 年 4 月 19 日收到。

证. 因为

$$\eta_2(0, t_1) = \int_0^{t_1} \boldsymbol{v}^T(t)\phi_2(\boldsymbol{v}(t), t)\boldsymbol{y}(t)dt$$

$$= \sum_{j=1}^{q} \int_0^{t_1} \boldsymbol{v}^T(t)F_j^T(t)F_j(t)\boldsymbol{v}(t)y_j^4(t)dt,$$

而 $F_j^T(t)F_j(t)$ 是正半定的 n 阶方阵,所以 $\boldsymbol{v}^T(t)F_j^T(t)F_j(t)\boldsymbol{v}(t)$ 是正半定二次型,故

$$\eta_2(0, t_1) \geqslant 0, \ \forall t_1 \geqslant 0.$$

命题 2. 当

$$\phi_2(\boldsymbol{v}(t), t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}^T(t)G_1^T(t)G_1(t)v_1(t) \\ \boldsymbol{y}^T(t)G_2^T(t)G_2(t)v_2(t) \\ \cdots\cdots \\ \boldsymbol{y}^T(t)G_n^T(t)G_n(t)v_n(t) \end{pmatrix}$$

时,有 $\eta_2(0, t_1) \geqslant 0$. 式中 $G_i(t)$ 是有 q 列的时变矩阵,当 $t \geqslant 0$ 时它的每一个元素是 t 的连续函数或分段连续函数.

证. 因为

$$\eta_2(0, t_1) = \int_0^{t_1} \boldsymbol{v}^T(t)\phi_2(\boldsymbol{v}(t), t)\boldsymbol{y}(t)dt$$

$$= \int_0^{t_1} [\boldsymbol{v}^T(t)\phi_2(\boldsymbol{v}(t), t)\boldsymbol{y}(t)]^T dt$$

$$= \int_0^{t_1} \boldsymbol{y}^T(t)\phi_2^T(\boldsymbol{v}(t), t)\boldsymbol{v}(t)dt$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_0^{t_1} \boldsymbol{y}^T(t)G_i^T(t)G_i(t)\boldsymbol{y}(t)v_i^2(t)dt,$$

而 $G_i^T(t)G_i(t)$ 是正半定的 q 阶方阵,所以 $\boldsymbol{y}^T(t)G_i^T(t)G_i(t)\boldsymbol{y}(t)$ 是正半定二次型,故

$$\eta_2(0, t_1) \geqslant 0, \ \geqslant V t_1 0.$$

命题 3. 当

$$\phi_2^{ij}(\boldsymbol{v}(t), t) = \alpha_{ij}(t)v_i(t)y_j(t), \ i = 1, \cdots, n, \ j = 1, \cdots, q$$

时,有 $\eta_2(0, t_1) \geqslant -\gamma_2^2$. 当 $t \geqslant 0$ 时, 式中 $\alpha_{ij}(t)$ 是 t 的连续函数或分段连续函数, 且 $\alpha_{ij}(t) \geqslant -b_{ij}/(a_{ij} + t)^{p_{ij}}$. 其中常数 $a_{ij} > 0$, $b_{ij} > 0$, $p_{ij} > 1$, 又 $v_i^2(t)y_j^2(t)$ 对 $\forall t \geqslant 0$ 有上界 $M > 0$.

证. 因为

$$\eta_2(0, t_1) = \int_0^{t_1} \boldsymbol{v}^T(t)\phi_2(\boldsymbol{v}(t), t)\boldsymbol{y}(t)dt$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{q} \int_0^{t_1} v_i^2(t)y_j^2(t)\alpha_{ij}(t)dt,$$

又因为

$$\alpha_{ij}(t) \geqslant \frac{-b_{ij}}{(a_{ij} + t)^{p_{ij}}}, \ \text{又} \ 0 \leqslant v_i^2(t)y_j^2(t) \leqslant M.$$

所以

$$v_i^4(t)y_j^2(t)\alpha_{ij}(t) \geqslant \frac{-b_{ij}M}{(a_{ij} + t)^{p_{ij}}}, \forall t \geqslant 0,$$

$$\eta_2(0, t_1) \geqslant -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q}\int_0^{t_1}\frac{b_{ij}M}{(a_{ij}+t)^{p_{ij}}}dt$$
$$= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q}\frac{b_{ij}M}{p_{ij}-1}\left[\frac{1}{a_{ij}^{p_{ij}-1}}-\frac{1}{(a_{ij}+t)^{p_{ij}-1}}\right]$$
$$\geqslant -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q}Mb_{ij}a_{ij}^{1-p_{ij}}/(p_{ij}-1).$$

令 $r_2^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q}Mb_{ij}a_{ij}^{1-p_{ij}}/(p_{ij}-1)$，则 $r_2^2>0$，故有 $\eta_2(0, t_1)\geqslant -r_2^2$.

参　考　文　献

[1] 王礼信，模型参考自适应控制（MRAC）的现状和前景，北京轻工业学院学报，**1**(1983)，55—61.

[2] Landau I. D., Adaptive Control, The Model Reference Approach, Marcel Dekker, New York, 1979, 55—61, 97—112, 391—401.

[3] Landau I. D., A Generalization of The Hyperstability Conditions for Model Reference Adaptive Systems, *IEEE, Trans. Autom. Control*, AC-**17** (1972), 246—247.

AN ANNOTATION ON LANDAU'S MATHOD FOR DESIGNING MRAS

Wang Lixin　　Zhou Junrong

(Beijing Institute of Light Industry)

Abstract

In this paper, some new families of adaptation laws are given. Therefore, the suitable range of Landau's mathod is extended.