分布系统的单管热交换器传递函数的本性奇点

曹 广 益
(上 海 交 通 大 学)

摘 要

大多数的工业生产过程是分布参数系统，用偏微分方程描述．本文以常用的分布参数典型装置——单管热交换器为例，介绍在考虑其传热壁的影响后，传递函数中出现的特殊奇点，即“本性奇点”的性质及系统进行比例反馈情况下本性奇点的根轨迹．

一、单管热交换器的传递函数

单管热交换器的示意图如图1所示

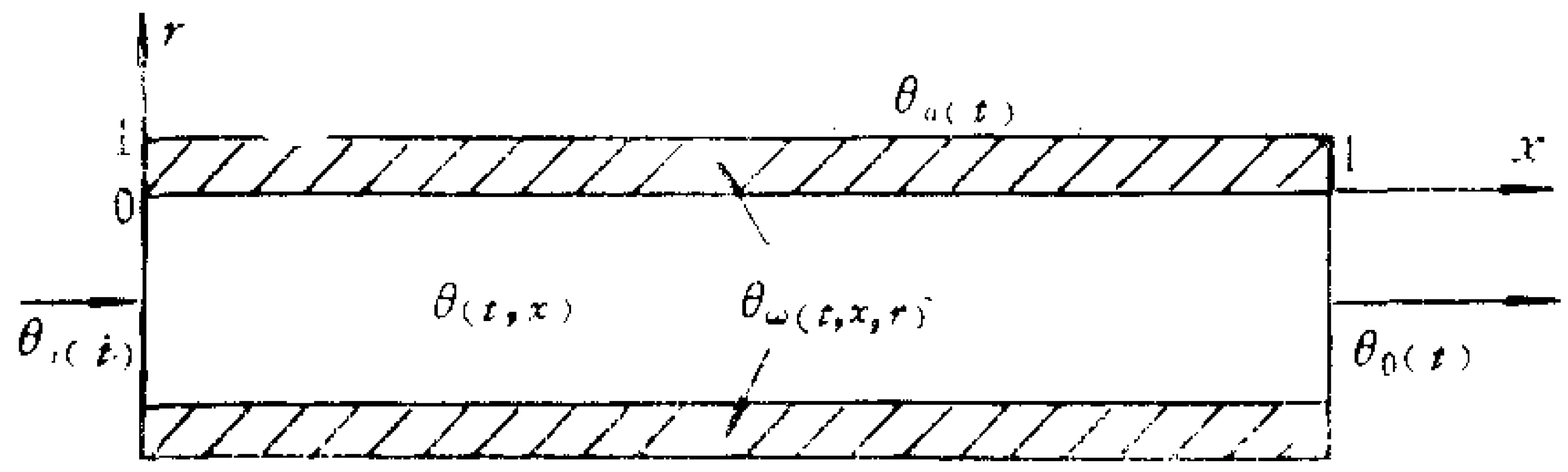

图1 单管热交换器示意图

假设传热壁的半径方向 (r) 的热分布为均匀的，其微分方程式为[1]

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\theta}{\partial t}+\dfrac{\partial\theta}{\partial X}=a_1(\theta_\omega-\theta),\\ \dfrac{\partial\theta_\omega}{\partial t}=b_1(\theta-\theta_\omega)+b_2(\theta_a-\theta_\omega).\end{cases} \tag{1}$$

a_1, b_1, b_2 是表征传热器的材料、结构及流体性质、流速等的综合参数．

初始条件及边界条件为

$$\begin{cases}\theta(0,x)=\theta_\omega(0,x)=\theta_a(0)=0,\\ \theta(t,0)=\theta_i(t),\ \theta(t,1)=\theta_0(t).\end{cases} \tag{2}$$

其中 θ 是流体温度；θ_ω 是传热壁温度；θ_a 为外部温度；θ_i 为入口温度(输入)；θ_0 为出口温度(输出)．

本文于1985年1月22日收到．

由 (1), (2) 式求得输出、输入的传递函数为

$$G(s)=\frac{\theta(s,1)}{\theta(s,0)}=\exp(-(s+a_1H_1(s))),\quad H_1(s)=\frac{s+b_2}{s+b_1+b_2}. \tag{3}$$

从 (3) 式中可以看出，点 $s=-(b_1+b_2)$ 即是 $G(s)$ 的本性奇点，一群根轨迹将从这里出发，一群根轨迹将在此终止。

对单管热交换器进行比例反馈，得闭环特征方程为

$$F(s)=1+K\exp(-(s+a_1H_1(s))). \tag{4}$$

其中 K 为放大系数。

当令 K 变化，每取一个 N 值，即可得到一组根轨迹，如图 2 所示。其中 $N=\pm1,\pm3,\pm5,\cdots\cdots$。

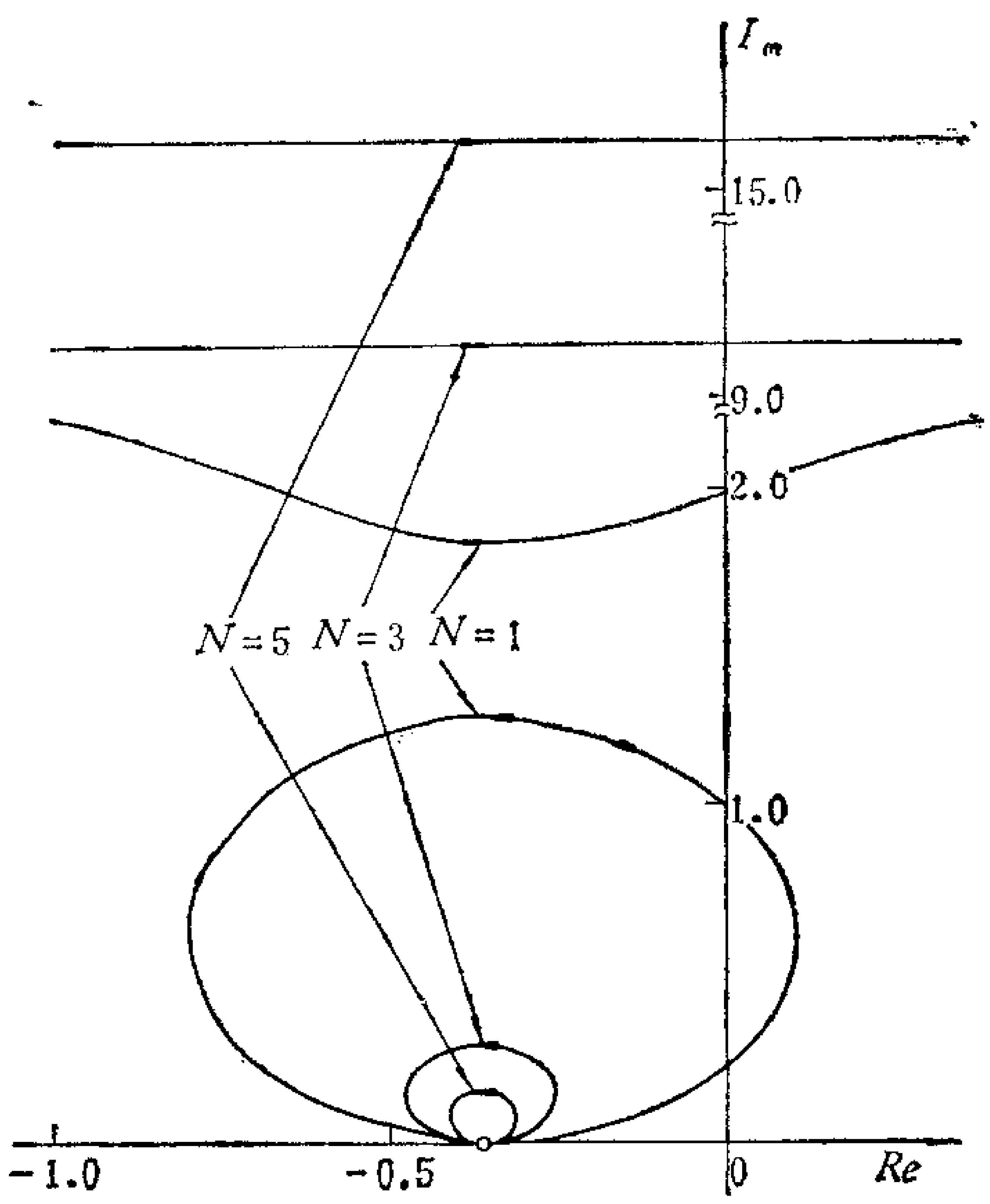

图 2　单管热交换器根轨迹图

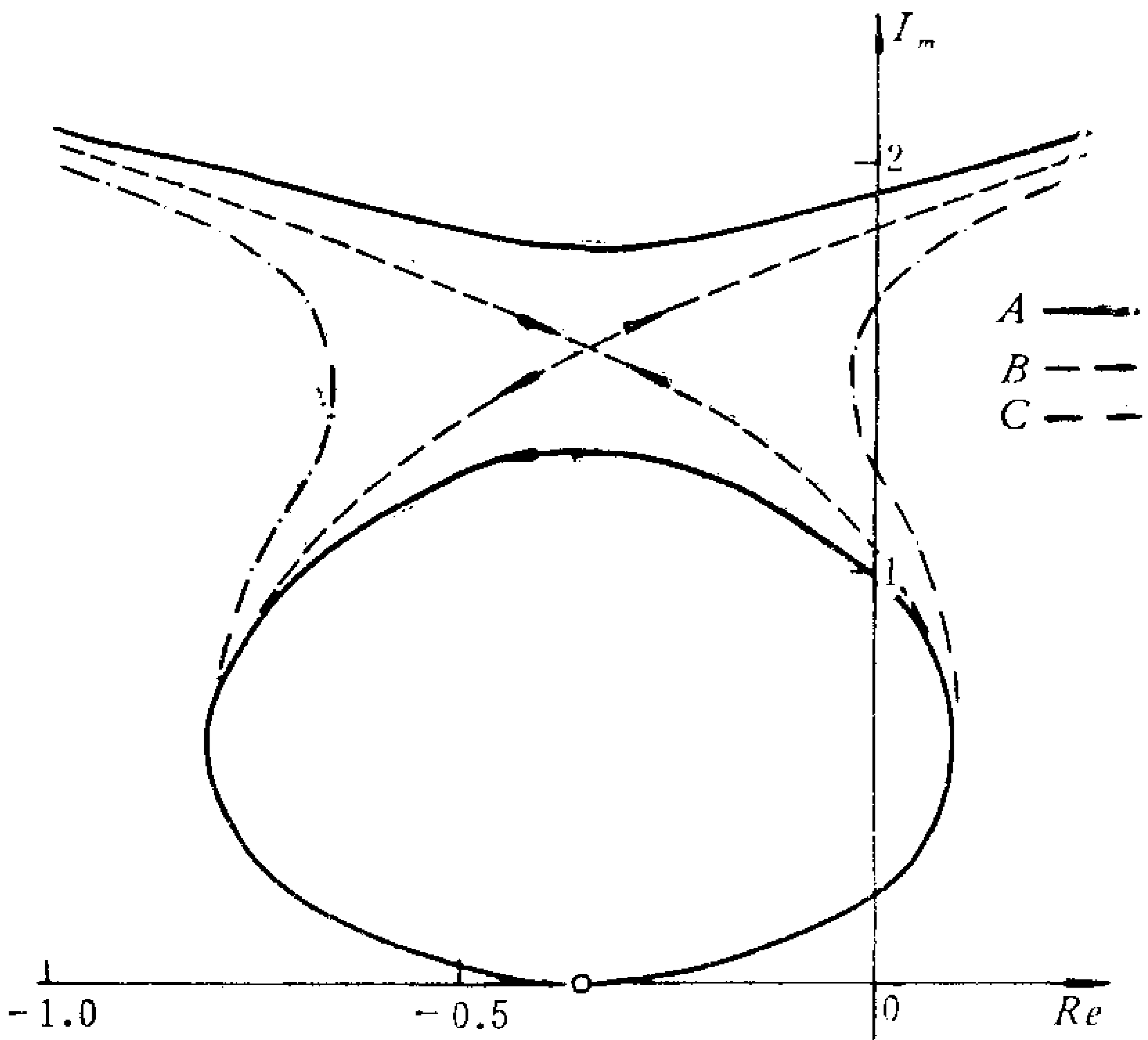

图 3　根轨迹的形状

图中画出 $N=1, 3, 5$ 时根轨迹。$N=-1, -3, -5$ 时其以实轴对称。此热交换器参数为 $a_1=8,\ b_1=0.3,\ b_2=0.06$。参数不同，其根轨迹的形状也不同，现有下列三组参数：A：$a_1=8,\ b_1=0.30,\ b_2=0.06$；

B：$a_1=8,\ b_1=0.32,\ b_2=0.04$；

C：$a_1=8,\ b_1=0.31,\ b_2=0.05$。

这三组参数的 $N=1$ 时根轨迹示于图 3。

图中 A 参数时，根轨迹分成上下两部分：环状的与曲线状的，可称之为一周根。而 C 参数时，根轨迹又可分为成以 $(-(b_1+b_2), I_m)$ 轴对称的左右两条轨迹，称之为左右根。而参数 B 则为临界情况。

根轨迹形状与参数之间有以下关系：

$4a_1b_1>(N\pi)^2$ 时为左右根；$4a_1b_1<(N\pi)^2$ 时为一周根；而 $4a_1b_1=(N\pi)^2$ 时为临界状态。

二、考虑传热壁的半径方向的温度分布后，单管热交换器的本性奇点及根轨迹

当传热壁较厚或热传导率较小时，传热壁的温度分布不能忽视[2]. 这种情况下基本方程为(参照图 1)

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\theta(t,x)}{\partial t}+\dfrac{\partial\theta(t,x)}{\partial x}=a_1(\theta_\omega(t,x,0)-\theta(t,x)),\\ \dfrac{\partial\theta_\omega(t,x,r)}{\partial t}=a'\dfrac{\partial^2\theta_\omega(t,x,r)}{\partial r^2}.\end{cases}\tag{5}$$

初始条件与边界条件为

$$\begin{cases}\theta(0,x)=\theta_\omega(0,x,r)=0,\\ \theta(t,0)=\theta_i(t),\ \theta(t,1)=\theta_0(t),\\ \left.\dfrac{\partial\theta_\omega(t,x,r)}{\partial r}\right|_{r=0}=\alpha(\theta_\omega(t,x,0)-\theta(t,x)),\\ \left.\dfrac{\partial\theta_\omega(t,x,r)}{\partial r}\right|_{r=1}=\beta(\theta_a(t)-\theta_\omega(t,x,1)).\end{cases}\tag{6}$$

a_1, a', α, β 都是系统参数，这时系统的传递函数为

$$G(s)=\exp(-(s+a_1H_2(s))).\tag{7}$$

其中

$$H_2(s)=\frac{\beta\cosh\sqrt{\dfrac{s}{a'}}+\sqrt{\dfrac{s}{a'}}\sinh\sqrt{\dfrac{s}{a'}}}{(\alpha+\beta)\cosh\sqrt{\dfrac{s}{a'}}+\left(\sqrt{\dfrac{s}{a'}}+\alpha\beta\sqrt{\dfrac{a'}{s}}\right)\sinh\sqrt{\dfrac{s}{a'}}}.\tag{8}$$

这时，本性奇点如何变化呢？

从 (8) 式可知，本性奇点为其分母为零时 s 的解，即

$$(\alpha+\beta)\cosh\sqrt{\frac{s}{a'}}+\left(\sqrt{\frac{s}{a'}}+\alpha\beta\sqrt{\frac{a'}{s}}\right)\sinh\sqrt{\frac{s}{a'}}=0\tag{9}$$

的解，令 $\sqrt{\dfrac{s}{a'}}=x+jy$ 代入方程，整理可得 $x=0$，经化简，求得本性奇点为 $s=-a'y^2$，由 y 可求出 s.

$s=a'y^2$ 是一个负实数. 其中 $y=0$ 虽是 (9) 式的解，因是 (8) 式中的可除去极点，因而不是本性奇点.

由上可知，考虑传热壁温度分布后，传递函数中出现的本性奇点有两个特点：1，负实数；2，有无限多个. 这样当系统进行比例反馈后，一些不同参数的单管热交换器的根轨迹如图 4 所示. 图中实线、虚线、点划线各表示某单管热交换器的根轨迹.

由图 4 可知，接近虚轴部分的根轨迹与图 2 中所示形状大致相近，而离开实轴的第二、第三……本性奇点周围的根轨迹有了较大变化. 随着本性奇点的远离原点，其一周根渐渐减少，左右根渐渐增加，同时一周根的环也渐渐增大. 从图中可知，对系统影响最大

的当然是离原点最近的本性奇点。因此，一般研究系统的稳定性及动特性时，只研究离原点最近的第一、第二本性奇点即可。

方程中的 a' 是综合表示壁的传热性能，a' 越大则表示壁薄或传热性能好，从研究中可以了解到，a' 变小，本性奇点接近原点，且本性奇点与本性奇点之间距离也减小，原点附近本性奇点出发的一周根增加，左右根减少，并且根轨迹与虚轴的交点（ω）也逐渐变小，相应放大倍数 K 也变小。因此 a' 越小，系统的特性越坏。

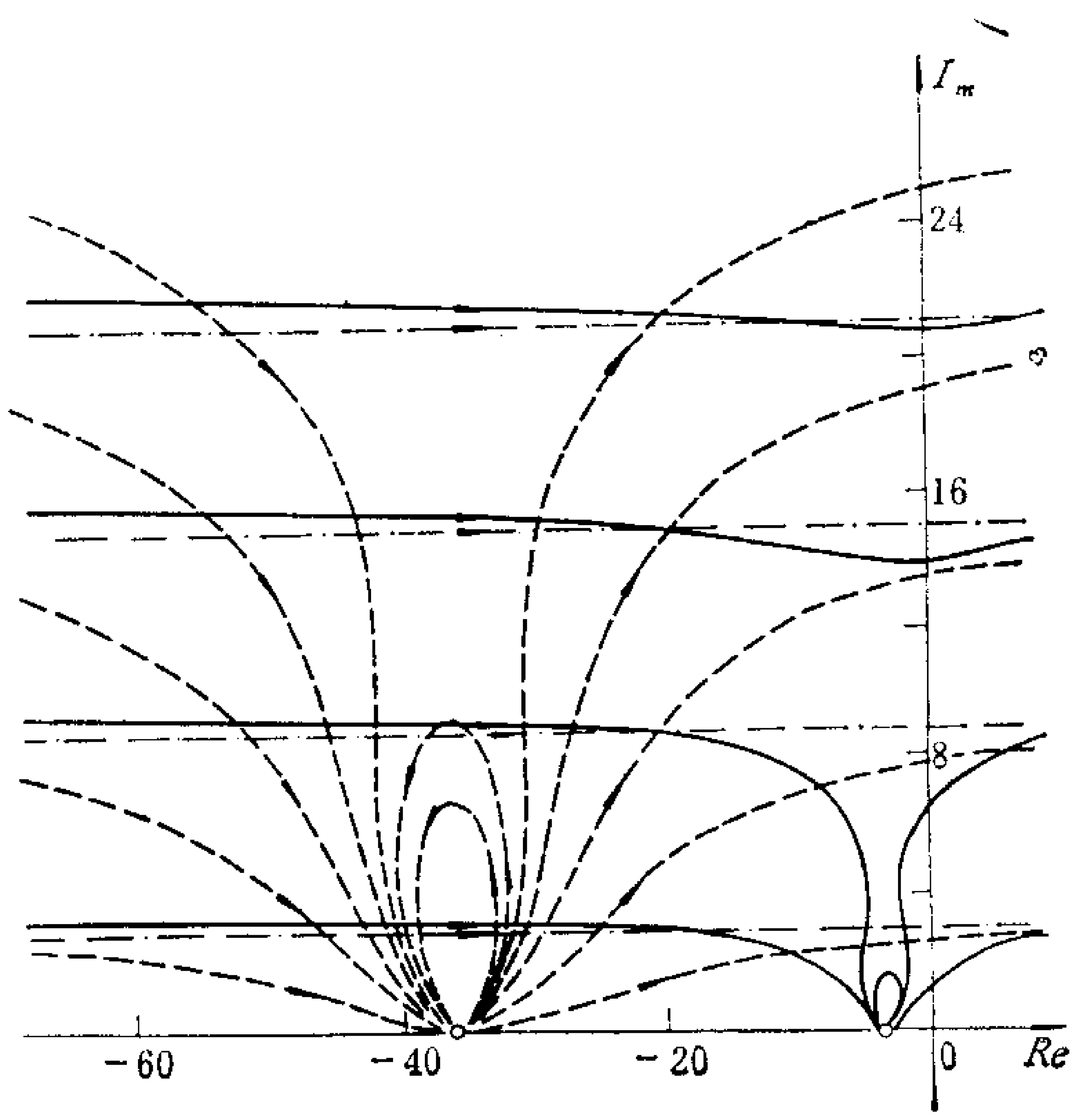

图 4 一些单管热交换器的根轨迹

三、结束语

本文很简单地讨论了在分布参数系统的单管热交换器中，当考虑了传热壁的影响后，出现一个或者无限个的本性奇点。这种本性奇点，在集中参数系统或不考虑壁的影响时一般不出现。由于这种点的出现，对系统进行控制时，出现了一周根或左右根。由于它的出现，在某种参数情况下，可能很小的 K 时，根轨迹进入右半平面，相应的在波德图上，$-180°$ 处相移曲线出现很大凹坑，严重影响系统性能，甚至破坏了系统稳定性[3]，这是研究分布参数系统时必须注意的问题。

参考文献

[1] 增淵正美，熱交換器，その動特性と制御，計测と制御，173—179.

[2] 藤堂勇雄，並流れよび向流熱交換器の流量变化に対する動特性，計測自動制御学会论文集，第 11 卷，第 5 号，600—606.

[3] 曹广益、嘉纳秀明，壁の熱容量の大きい分布系熱交換器の位相進み要素による制御性の改善．第 22回 SICE 学術講演会.

ESSENTIAL SINGULAR POINTS OF TRANSFER FUNCTION OF SINGLE TUBE HEAT EXCHANGERS IN DISTRIBUTED SYSTEMS

CAO GUANGYI

(*Shanghai Jiao Tong University*)

ABSTRACT

Most of the industrial control processes are distributed parameter systems, and they are discribed by differential partial equations. In this paper, a typical distributed parameter system——the single tube heat exchanger, is presented. Taking into consideration the effect on the wall of the heat exchanger, properties of a kind of special singular points, the 'Essential Singular Points', is introduced. And their root loci in such systems under feedback are also studied.