第13卷 第4期 自 动 化 学 报 Vol. 13, No. 4
1987年7月 ACTA AUTOMATICA SINICA July, 1987

具有根轨迹渐近特性不变的广义补偿的一种综合算法

王 胜 国
(西南交通大学)

摘 要

本文提出了用动态前馈和线性状态变量反馈(d. f. &l. s. v. f.)使根轨迹渐近特性不变的一种综合算法. 此算法是对 Wolovich 广义综合算法作内部修正,使所得系统同时具有根轨迹渐近特性不变性. 本文还将此综合算法(内设法)与文献[4]所述的综合算法(外设法)进行了比较,得出了由这两种综合算法补偿所得的系统阶次相等时的充分必要条件.

符号说明

$T(s)$ 为 $p\times m$ 有理式矩阵;

$\partial r(s)=\partial\left[\sum_{i=-\infty}^{\rho} r_i s^i\right]=\rho$ 为有理式 $r(s)$ 的阶次;

$\partial T(s)$ 为 $T(s)$ 中元素的最高阶次;

$\partial_{ci}T(s)$ 为 $T(s)$ 中第 i 列元素的最高阶次;

$\partial_c T_1(s)\leqslant\partial_c T_2(s)$——$\partial_{ci}T_1(s)\leqslant\partial_{ci}T_2(s)$, $i=1,\cdots,m$.

一、引 言

多变量系统根轨迹的研究正在进展，它是 Evans[1] 的经典的单变量根轨迹方法对于多变量系统的推广. Kauvaritakis, MacFarlane 和 Owens 等在这方面发表了不少文章. Brockett 和 Byrnes[2] 用几何观点研究了单参数族增益矩阵下的多变量根轨迹. Owens[3] 曾研究了带有内回路反馈的严格真的多变量系统的根轨迹渐近特性的不变性. 文献[4]研究了 d. f. &l. s. v. f. 的真(Proper)多变量系统的根轨迹渐近特性的不性变,亦即某种 Robust 性. 并导出了一种新的广义补偿设计综合算法，首先对系统对象运用 Wolovich[5] 广义补偿技术，然后进行根轨迹渐近特性不变性补偿和渐近线校正. 是否有可能对 Wolovich 广义补偿作些内部修正，使广义补偿的同时保证根轨迹渐近特性具有不变性. 如果可能,由新算法补偿所得系统的阶次与文献[4]所述算法所得系统的阶次(亦即代价)哪个低些,何时相等,相等时的充要条件是什么,本文将对此进行讨论.

本文于1985年3月14日收到.

二、回 顾

Wolovich 的 d. f. &l. s. v. f. 广义补偿综合算法可归纳成 4 步,所得系统如图 1 所示. 其中所用符号和所含关系式均同文献 [4, 5] 所述.

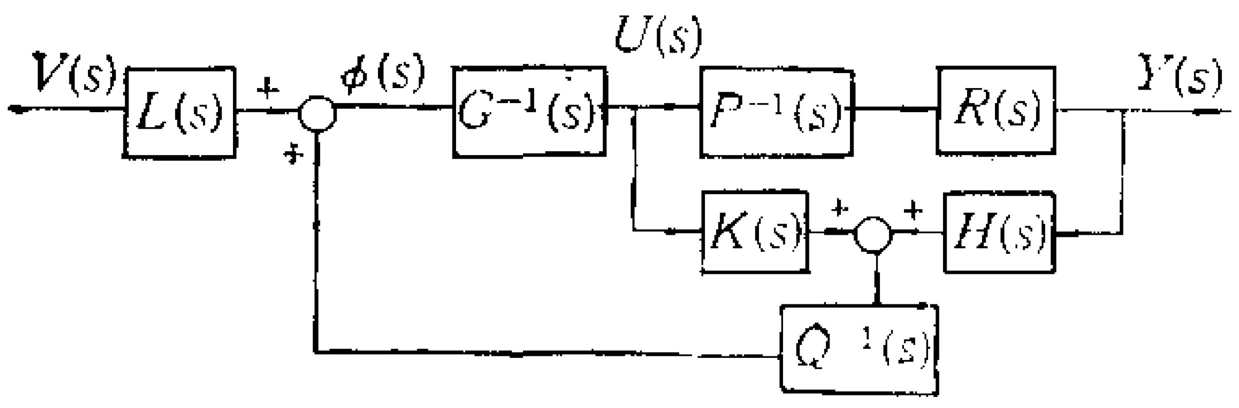

图 1 广义补偿方框图 (d. f. &l. s. v. f.)

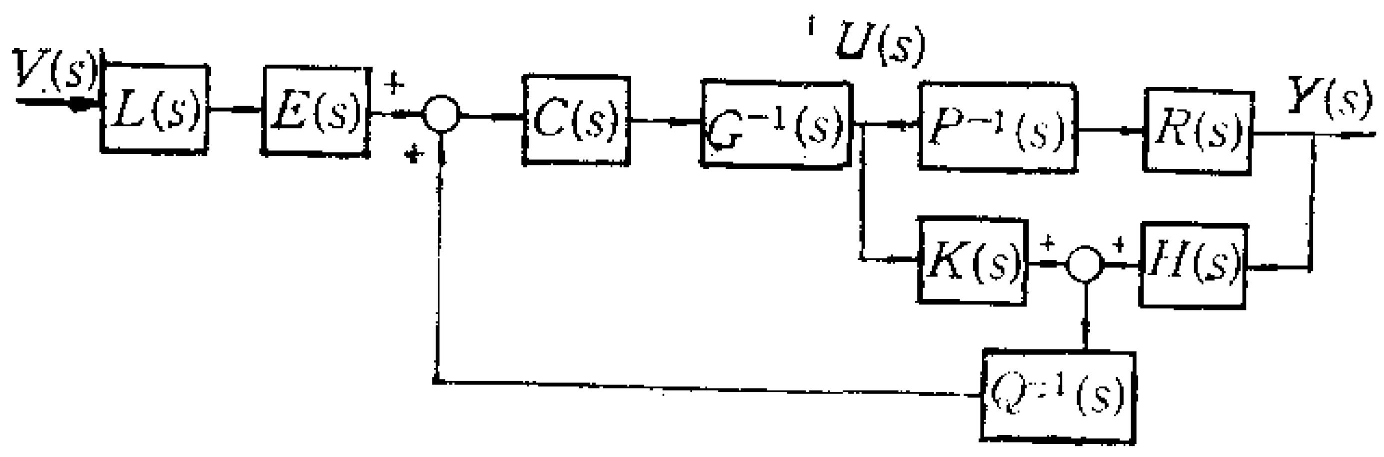

图 2 带根轨迹渐近特性补偿的 d. f. &l. s. v. f. 广义补偿方框图

关于根轨迹渐近特性不变性,已知道[4]需

$$Q^{-1}(s)H(s)R(s)P^{-1}(s)G^{-1}(s) = O(s^{-2}), \tag{2.1}$$

$$Q^{-1}(s)K(s)G^{-1}(s) = O(s^{-2}) \tag{2.2}$$

成立,若

$$G^{-1}(s) = O(s^{-j}), \tag{2.3}$$

$$j = \begin{cases} 1, & T(s) = R(s)P^{-1}(s) \ \text{为严格真} \\ 2, & \text{为真,} \end{cases} \tag{2.4}$$

则条件(2.1)和(2.2)必然成立. 进行根轨迹渐近特性补偿后系统如图 2 所示, $C(s)$ 中起不变性补偿作用的部分为 $C_1(s)$

$$C_1(s) = \mathrm{diag}\{(s+b_i)^{-\omega_i}\}_{1\leqslant i\leqslant m}, \tag{2.5}$$

$$\omega_i = \max\{\partial_{ci}[Q^{-1}(s)H(s)R(s)P^{-1}(s)G^{-1}(s)] + 2,\ \partial_{ci}[Q^{-1}(s)K(s)G^{-1}(s)] + 2, 0\}. \tag{2.6}$$

$b_i > 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$. 这种在 Wolovich 广义补偿之后进行的不变性补偿, 作者称为外设的根轨迹渐近特性不变性补偿.

三、内设的根轨迹渐近特性不变性补偿

观察条件(2.3),可设想修正 Wolovich 广义补偿,使 $G^{-1}(s)$ 满足条件(2.3), 而内含根轨迹渐近特性不变性补偿,我们称之为内设的根轨迹渐近特性不变性补偿.

首先考察 $G^{-1}(s)$ 的阶次——级数指标 $-j$[4]. 注意到 $G_L(s)$ 为对角矩阵以及其它性质,可以证明

$$G^{-1}(s) = P(s)[G_L(s)P_c(s) + F(s)]^{-1} \tag{3.1}$$

$$= P(s)[G_L(s)P_c(s)]^{-1}[I + O(s^{-1})]^{-1}, \tag{3.2}$$

$$\partial_c G^{-1}(s) = \partial_c[P(s)P_c^{-1}(s)] - \partial_c G_L(s). \tag{3.3}$$

现不妨将式(2.3)更普遍地设为要求其满足

$$G^{-1}(s)=[\boldsymbol{o}(s^{-l_1}),\boldsymbol{o}(s^{-l_2}),\cdots,\boldsymbol{o}(s^{-l_m})],\tag{3.4}$$

其中 $l_i\geqslant 0$ 为指定的整数，$\boldsymbol{o}(s^{-l_i})$ 为列向量．由式(3.3)，若令

$$\partial g_i(s)=\partial_{ci}[P(s)P_c^{-1}(s)]+l_i,\ 1\leqslant i\leqslant m,\tag{3.5}$$

则式(3.4)满足．为此将 Wolovich 算法中的第 2 步修改为

$$(2^*)\ \ P(s)P_c^{-1}(s)=O(s^{-j})\tag{3.6}$$

成立否？若是，就令

$$\bar{P}(s)=P_c(s),\qquad L(s)=L_c(s),\tag{3.7}$$

转第(3)步；若非，构造稳定的 $G_L(s)$

$$G_L(s)=\operatorname{diag}\{g_i(s)\}_{1\leqslant i\leqslant m}.\tag{3.8}$$

其中 $\det G_L(s)\not\equiv 0$，且令

$$\partial g_i(s)=\max\{\partial_{ci}[P(s)P_c^{-1}(s)]+j,0\},\tag{3.9}$$

$$\bar{P}(s)=G_L(s)P_c(s),\ \ L(s)=G_L(s)L_c(s).\tag{3.10}$$

原 Wolovich 算法中的第(2) 步实质上是对应于修正算法 (2*) 中令 $j=0$ 而已．而其他几步均不变，即可保证由此算法综合所得的系统满足式(2.3)，具有根轨迹渐近特性不变性．

四、比　　较

从算法的简便性来看，内设算法比外设算法要略为简便些，程序可简化．

从补偿所可能引起的阶次升高 D_h 来看（首先规定由内设法所得系统的补偿环节的传递函数均用头加"～"符号表示，以与外设法所得的系统区别)，由文献 [4] 知补偿环节 $C_1(s)$ 是使系统具有根轨迹渐近特性不变性的最小阶对角型矩阵补偿，而内设法补偿实质上亦等价于一个对角型矩阵补偿 ($G_L(s)$ 是对角型)，并且条件(2.3)强于 (2.1) 和 (2.2)，所以必然有 $D_h\leqslant\tilde{D}_h$．亦可通过如下思路证明．为了书写简洁，对多项式和有理式矩阵采用缩写，略去 (s)．

$$D_h=\deg\ \det C_1^{-1}=\sum_{i=1}^{m}\omega_i,\tag{4.1}$$

$$\tilde{D}_h=\deg\det\tilde{Q}+\deg\det\tilde{G}-\deg\det Q-\deg\det G.\tag{4.2}$$

用 Wolovich 算法找到的矩阵对中显然有

$$\deg\ \det\tilde{Q}=\deg\ \det Q,\tag{4.3}$$

$$\deg\ \det G(s)=\deg\ \det P_c+\deg\ \det G_L-\deg\ \det P,\tag{4.4}$$

$$\tilde{D}_h=\deg\ \det\tilde{G}_L-\deg\ \det G_L=\sum_{i=1}^{m}\{\max(\pi_i+j,0)-\max(\pi_i,0)\}.\tag{4.5}$$

其中 $\pi_i=\partial_{ci}[P(s)P_c^{-1}(s)]$，$1\leqslant i\leqslant m$．令

$$\tilde{\omega}_i=\max(\pi_i+j,0)-\max(\pi_i,0),\tag{4.6}$$

$$\tilde{D}_h=\sum_{i=1}^{m}\tilde{\omega}_i.\tag{4.7}$$

由式(2.6)，(3.3)和 Wolovich 算法，以及若 RP^{-1} 为严格真时，$Q^{-1}K$ 亦为严格真[4]，于是可推知

$$\partial_{ci}G^{-1} = \partial_{ci}(PP_c^{-1}) - \deg g_i = \begin{cases}\pi_i, & \pi_i < 0,\\ 0, & \pi_i \geqslant 0,\end{cases} \tag{4.8}$$

$$\omega_i \leqslant \max\{\partial_{ci}G^{-1} + j, 0\}. \tag{4.9}$$

于是 $\omega_i \leqslant \tilde{\omega}_i$, $i = 1, \cdots, m$. 进而有如下定理和推论:

定理 4.1. 外设根轨迹不变性补偿所引起的系统阶次升高 D_h 与内设根轨迹不变性补偿所引起的系统阶次升高 $\widetilde{D}_h$ 之间有关系式

$$D_h \leqslant \widetilde{D}_h, \tag{4.10}$$

$$\omega_i \leqslant \tilde{\omega}_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{4.11}$$

定理 4.2. $D_h = \widetilde{D}_h$ 的充分必要条件为

$$\omega_i = \tilde{\omega}_i = \begin{cases}0, & \pi_i \leqslant -j,\\ \pi_i + j, & -j < \pi_i < 0,\\ j, & 0 \leqslant \pi_i,\end{cases} \quad i = 1, \cdots, m. \tag{4.12}$$

定理 4.3. $D_h = \widetilde{D}_h$ 的充分必要条件为

$$\max\{\partial_{ci}(Q^{-1}HRP^{-1}G^{-1}) + 2, \partial_{ci}(Q^{-1}KG^{-1}) + 2, 0\} = \max\{\partial_{ci}G^{-1} + j, 0\},$$
$$i = 1, \cdots, m. \tag{4.13}$$

推论 4.1. 下述三式中任一式均可作为 $D_h = \widetilde{D}_h$ 的充分必要条件，其中 $i = 1, \cdots, m$,

$$\begin{aligned}&\max\{\partial_{ci}(Q^{-1}HRP^{-1}G^{-1}), \partial_{ci}(Q^{-1}KG^{-1}), -2\} + 2\\ &= \max\{\partial_{ci}G^{-1}, -j\} + j,\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}&\max\{\partial_{ci}(Q^{-1}HRP^{-1}G^{-1}), \partial_{ci}(Q^{-1}KG^{-1}), -2\}\\ &= \begin{cases}\max(\partial_{ci}G^{-1} - 1, -2), & RP^{-1} \text{ 为严格真}\\ \max(\partial_{ci}G^{-1}, -2), & RP^{-1} \text{ 为真},\end{cases}\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}&\max\{\partial_{ci}(Q^{-1}HRP^{-1}G^{-1}), \partial_{ci}(Q^{-1}KG^{-1})\}\\ &= \begin{cases}\leqslant -2 \text{ 的整数}, & RP^{-1} \text{ 严格真}, \pi_i \leqslant -1; \text{或 } RP^{-1} \text{ 真}, \pi_i \leqslant -2,\\ -1, & RP^{-1} \text{ 严格真}, \pi_i \geqslant 0; \text{或 } RP^{-1} \text{ 真}, \pi_i = -1,\\ 0, & RP^{-1} \text{ 真}, \pi_i \geqslant 0.\end{cases}\end{aligned} \tag{4.16}$$

例 1[4]. 对象的传递矩阵为 $T(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 1\\ 0 & s+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}^{-1}$,

设计一个带根轨迹渐近特性不变性补偿的广义综合补偿 (d. f. &l. s. v. f.) 系统，使闭环传递矩阵为 $T_d(s) = (s+1)^{-1}I_2$ (渐近特性校正暂不考虑).

解. 由外设法[4]有

$$PP_c^{-1} = s(s+1)^{-3}\begin{bmatrix} s+1 & 1\\ 0 & s+1\end{bmatrix},$$

$$\{L, G_L, G, G^{-1}, \bar{P}, F\} = \left\{I_2, I_2, \begin{bmatrix} s+2 & 1\\ 0 & s+2\end{bmatrix}, (s+2)^{-2}\begin{bmatrix} s+2 & -1\\ 0 & s+2\end{bmatrix},\right.$$

$$(s+1)\begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\Big\},$$

$$\{Q, H, K\} = \{I_2, -I_2, I_2\},$$

$$C_1 = (s+4)^{-1}I_2, \quad \omega_1 = \omega_2 = 1.$$

下面采用内设算法. 因 $T(s)$ 为真，$j=2$.

$$\{\tilde{L}, \tilde{G}_L, \tilde{G}, \tilde{G}^{-1}, \tilde{\bar{P}}, \tilde{F}\} = \Big\{(s+4)I_2, (s+4)I_2, \begin{bmatrix} (s+3)^2 & s+5 \\ 0 & (s+3)^2 \end{bmatrix},$$

$$(s+3)^{-4}\begin{bmatrix} (s+3)^2 & -(s+5) \\ 0 & (s+3)^2 \end{bmatrix},$$

$$(s+4)(s+1)\begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}, -4\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\Big\},$$

$$\{\tilde{Q}, \tilde{H}, \tilde{K}\} = \{I_2, -4I_2, 4I_2\}.$$

可见 $D_h = \tilde{D}_h = 2$，$\omega_i = \tilde{\omega}_i = 1$，$i = 1, 2$. 这可由定理 4.2，4.3 或推论 4.1，甚至直接考察得到. 内设法在算法上简便些，如不作渐近线校正，还可免去计算 $E(s)$ ($E(s) = I$).

例 2. 对象为 $T(s) = s^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，要求 $T_d(s) = (s+1)^{-1}I_2$.

解. 运用外设算法有 $PP_c^{-1} = s(s+1)^{-1}I_2$，

$$\{L, G_L, G, G^{-1}, \bar{P}, F\} = \Big\{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_2, I_2, I_2, (s+1)I_2, -I_2\Big\},$$

$$\{Q, H, K\} = \Big\{\begin{bmatrix} -s-1 & 0 \\ 0 & -s-1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_2\Big\}.$$

$Q^{-1}(s)$ 是稳定的，有极点 -1 和 -1. $\omega_i = 1$，$i = 1, 2$. 选 $C_1 = (s+2)^{-1}I_2$.

运用内设算法有 $j = 1$，$\pi_i = 0$，$i = 1, 2$. 选

$$\{\tilde{L}, \tilde{G}_L, \tilde{G}, \tilde{G}^{-1}, \tilde{\bar{P}}, \tilde{F}\} = \Big\{(s+1)\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, (s+1)I_2, (s+2)I_2, (s+2)^{-1}I_2,$$

$$(s+1)^2I_2, -I_2\},$$

$$\{\tilde{Q}, \tilde{H}, \tilde{K}\} = \Big\{-(s+1)I_2, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_2\Big\}.$$

$\tilde{\omega}_i = 1$，$i = 1, 2$. 由定理 4.2 有 $D_h = \tilde{D}_h$.

五、结　　论

外设法[4]补偿是在 Wolovich 的 d. f. &l. s. v. f. 广义补偿之后进行；而此内设法是仅对 Wolovich 广义补偿算法的第二步作修正，使综合所得的 d. f. &l. s. v. f. 系统具有根轨迹渐近特性不变性. 其不变性的重要含义文献 [4] 已述.

内设法与外设法比较，算法简便，而补偿所可能引起的系统阶次升高总要大于等于外设法. 定理 4.2，4.3 及推论给出了阶次升高相同时的充分必要条件. 由例子可见它们常

常是相等的. 内设法类同外设法,仍可直接用文献 [4] 中所述的根轨迹渐近特性(渐近线方向和原点)校正,以求同时获得更佳的根轨迹渐近特性.

本文曾得到中国科学院系统科学研究所韩京清老师的亲切指点和帮助,特致以衷心的感谢!

参 考 文 献

[1] Evans, W. R., Graphical Analysis of Control System, *AIEE Trans.*, **67**(1948), 547—551.

[2] Brockett, R. W. and Byrnes, C. I., Multivariable Nyquist Criteria, Root Loci, and Pole Placement: a Geometric Viewpoint, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-**26**(1981), 271—284.

[3] Owens, D. H., Multivariable Root-loci and Inverse Transfer-function Matrix, *Int. J. Control,* 28(1978), 345—351.

[4] 王胜国、张念村, 带动态前馈和线性状态变量反馈的多变量系统的根轨迹, 自动化学报, **11**(1985), 增刊 No.1, 8—16.

[5] Wolovich, W. A., Linear Multivariable Systems, *Applied Mathematical Sciences,* **11**(1974), Springer-Verlag.

A SYNTHESIS ALGORITHM FOR GENERAL COMPENSATION WITH INVARIANT ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF MULTIVARIABLE ROOT LOCUS

WANG SHENGGUO

(*Southwest Jiaotong University*)

ABSTRACT

This paper presents a synthesis algorithm with invariant asymptotic behavior of multivariable root locus via d. f. & l. s. v. f.. It is a modified algorithm based on Wolovich's general synthesis algorithm. The paper also compares this connotative algorithm with that appendant algorithm described in article [4] . The necessary and sufficient conditions under which the system orders are the same from those two algorithms are deduced.