

# 动态系统的频率点拟合建模

胡锡恒

(贵州工学院)

## 摘要

本文提出一种人机交互的动态系统频率点拟合建模方法, 给出模型信息资源的分配和选点原则, 该方法在选点问题上具有“鲁棒性”, 可以直接应用于系统辨识和模型阶降. 同过去方法比较, 该方法计算工作量小, 拟合精度较高. 论文还简介了基于点拟合建模的自适应控制方案, 显示出该方法的应用潜力.

## 一、引言

本文研究从动态系统的频率特性建立系统数学模型(传递函数)的方法. 一般解决这类参数估计的方法是通过极小化某一事先确定的误差准则, 获得某种最优意义下的估计. 这类方法的特点是“平等”地使用所有量测数据, 力图用一条曲线整体全面地拟合实际系统的特性. 虽然也有人讨论过加权问题, 但都不甚明确<sup>[1-3]</sup>.

## 二、频率点拟合方程

笔者在文献[4]中提出频率点拟合方程及其应用的构思, 并在模型降阶和建模研究中得到成功的应用<sup>[5-11]</sup>.

传递函数的频率点拟合问题, 实质上属于带复值条件的有理插值.

考虑下述  $r$  组插值条件

$$(j\omega_1, g_1 e^{i\theta_1}), \dots, (j\omega_r, g_r e^{i\theta_r}), \quad (2.1)$$

欲求一有理函数

$$\begin{aligned} G(a_0, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n; x) &= \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \\ &= \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m}{1 + b_1 x + \dots + b_n x^n}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

使

$$G(a_0, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n; j\omega_i) = \frac{P_m(j\omega_i)}{Q_n(j\omega_i)} = g_i e^{i\theta_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (2.3)$$

成立. 其中  $a_0, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$  均为实常数. 按惯例, 称  $G$  为  $n$  阶 (或  $[m/n]$  阶) 的, 称  $\lambda = n - m$  为  $G$  的秩. 并设

$$r = \text{Int}((m+n)/2 + 1). \quad (2.4)$$

其中  $\text{Int}(\cdot)$  表示取整, 称  $r$  为  $G$  的序. 这一问题称为带复值条件的有理插值问题.

在复数域, 只要  $j\omega_i$  不落在式(2.2)的极点上, 即  $Q_n(j\omega_i) \neq 0, (i = 1, \dots, r)$ , 则不难将式(2.3)化为  $2r$  维实线性方程组<sup>[4,5]</sup>.

$$\begin{bmatrix} -\sin\theta_i & \omega_i \cos\theta_i & \omega_i^2 \sin\theta_i & -\omega_i^3 \cos\theta_i & \dots & -\omega_i g_i & 0 & \omega_i^3 g_i & 0 & \dots \\ \cos\theta_i & \omega_i \sin\theta_i & -\omega_i^3 \cos\theta_i & -\omega_i^3 \sin\theta_i & \dots & 0 & \omega_i^2 g_i & 0 & -\omega_i^4 g_i & \dots \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, r. \quad (2.5)$$

式中

$$\mathbf{a} = [a_0, a_1, \dots, a_m]^T, \quad \mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T.$$

称式(2.5)为上述插值问题的伴随方程组, 其系数阵为伴随矩阵. 则有

**定理 1.** 对于序为  $r$  的有理函数  $G_{m/n}$ , 必存在满足式(2.3)的  $r$  个组数  $(j\omega_i, g_i e^{j\theta_i})$ ,  $i = 1, \dots, r$ , 使方程(2.5)有唯一解.

证明. 有理函数(2.2)在除去有限个极点以外的全平面解析. 据解析函数的唯一性和可延性定理, 式(2.2)可以由其在复平面上(除去有限个极点)的任一组凝聚点列的数值通过解析开拓完全确定. 故只要在  $j$  轴上取  $r$  个凝聚点列的数值, 必使方程(2.5)有唯一解. 证毕.

### 三、信息资源的分配——选点问题

#### 1. 几个概念

在降阶研究中, 笔者提出了几个模型化的概念, 对其它建模工作亦有意义<sup>[8-10]</sup>. 它们是

- 1) 尽可能准确地反映系统的特征中频<sup>[10]</sup>;
- 2) 中、低频段分别处理的原则;
- 3) 有限信息资源的合理分配和充分利用.

从频域分析的角度看, 系统的动态特性往往主要体现于两个频段, 即低频段和中频段. 低频特性反映系统的稳态特性和慢模式, 而中频特性则直接与系统的稳定性、过渡过程及快模式有关. 一些系统则根据其中频特性而具有某些特殊功能, 如低通、带通、陷波、高通特性等等. 故可称之为特征中频<sup>[10]</sup>. 而其它频段(如低频与特征中频间的过渡频段、衰减很快的高频段等)则处于相对次要的地位.

在模型化问题中, 称  $[m/n]$  阶 SISO 系统的  $m+n+1$  个独立系数为系统的信息资源. 所谓合理分配和充分利用有限信息资源, 就是研究如何利用这有限个系数有目的地反映系统在上述两个频段的主要信息. 这里强调了有目的地, 因为其它一些方法通常只是笼统地或者说带有某种盲目性地以整个模型去实现某种逼近.

## 2. 信息资源的分配和选点原则

频率点拟合方法 (FPF 法, 即 Frequency-Point-Fitting Method) 利用系统的  $m+n+1$  个频率特性数据, 通过点拟合方程(2.5)建立系统的  $[m/n]$  阶传递函数模型. 如何选取拟合点是 FPF 建模成功的关键. 如果毫无根据地选点, 不仅建模结果不理想, 甚至会导至稳定系统的模型失稳.

通过大量研究, 一般可将对象的频率特性曲线分解为几种图素, 并总结出对应的信息资源分配和选点原则. 实践证明, 这些原则是有效和实用的.

1) 低频特性. 一般较平坦, 用两个系数即可很好地反映这一频段的特性, 故只需一个拟合点.

2) 单调下降的中频特性. 可据下降的速率选择一个 (或两个) 拟合点. 为了正确反映对象的相对稳定性, 可在穿越频率处选点.

3) 谐振峰. 包括频率特性的中频尖峰 (它表明系统含阻尼较小的复极点) 和较为平坦的驼峰 (往往由多个极、零点, 尤其是多重极、零点的复合作用造成)<sup>[10]</sup>. 一个谐振峰包含四项信息: 谐振频率、阻尼、振幅和相位. 因此需要两个拟合点来实现. 它们可在振峰附近 (两侧) 选取.

4) 振谷. 即系统的陷波特性的. 模型中常常对应于阻尼较小的复零点. 因此, 同振峰一样, 需要在振谷附近取两个拟合点. 若相邻的图素已基本确定, 亦可只在谷底取一点拟合.

建议在下述邻域内选取特征中频的拟合点  $\omega_i$

$$\omega_B \leq \omega_i \leq \omega_H. \quad (3.1)$$

其中  $\omega_B$  和  $\omega_H$  位于振峰频率  $\omega_p$  或振谷频率  $\omega_v$  的两侧, 且

$$|G(\omega_B)| = |G(\omega_H)| = |G(\omega_p)| - 0.7 g_0 \quad (\text{对于振峰}), \quad (3.2a)$$

$$|G(\omega_B)| = |G(\omega_H)| = |G(\omega_v)| + 0.7 g_0 \quad (\text{对于振谷}). \quad (3.2b)$$

式中  $g_0$  为相邻的峰与谷之相对幅差.

当图素规划和资源分配完成后, 模型的阶次就确定了.

**例 1.** 图 1 为具有陷波特性的幅频特性, 它来自一个  $[5/6]$  阶系统. 现按上述原则分配信息资源并选取拟合点.

低频: 一个点, 0.1.

振谷: 两个点, 0.43 和 0.5 (或一个点即谷底 0.47).

驼峰: 两个点, 3 和 10.

从而对应的  $[4/5]$  或  $[3/4]$  阶 FPF 模型为

$$\hat{G}_{4/5}^{\text{FPF}}(s) = \frac{1.0013 + 0.6280s + 9.1109s^2 + 2.8037s^3 + 20.2954s^4}{1 + 7.7098s + 20.3338s^2 + 18.8618s^3 + 5.3741s^4 + 0.4687s^5}, \quad (3.3)$$

$$\hat{G}_{3/4}^{\text{FPF}}(s) = \frac{1.0387 + 1.2042s + 4.7368s^2 + 5.2467s^3}{1 + 8.5735s + 5.4953s^2 + 1.4824s^3 + 0.1174s^4}. \quad (3.4)$$

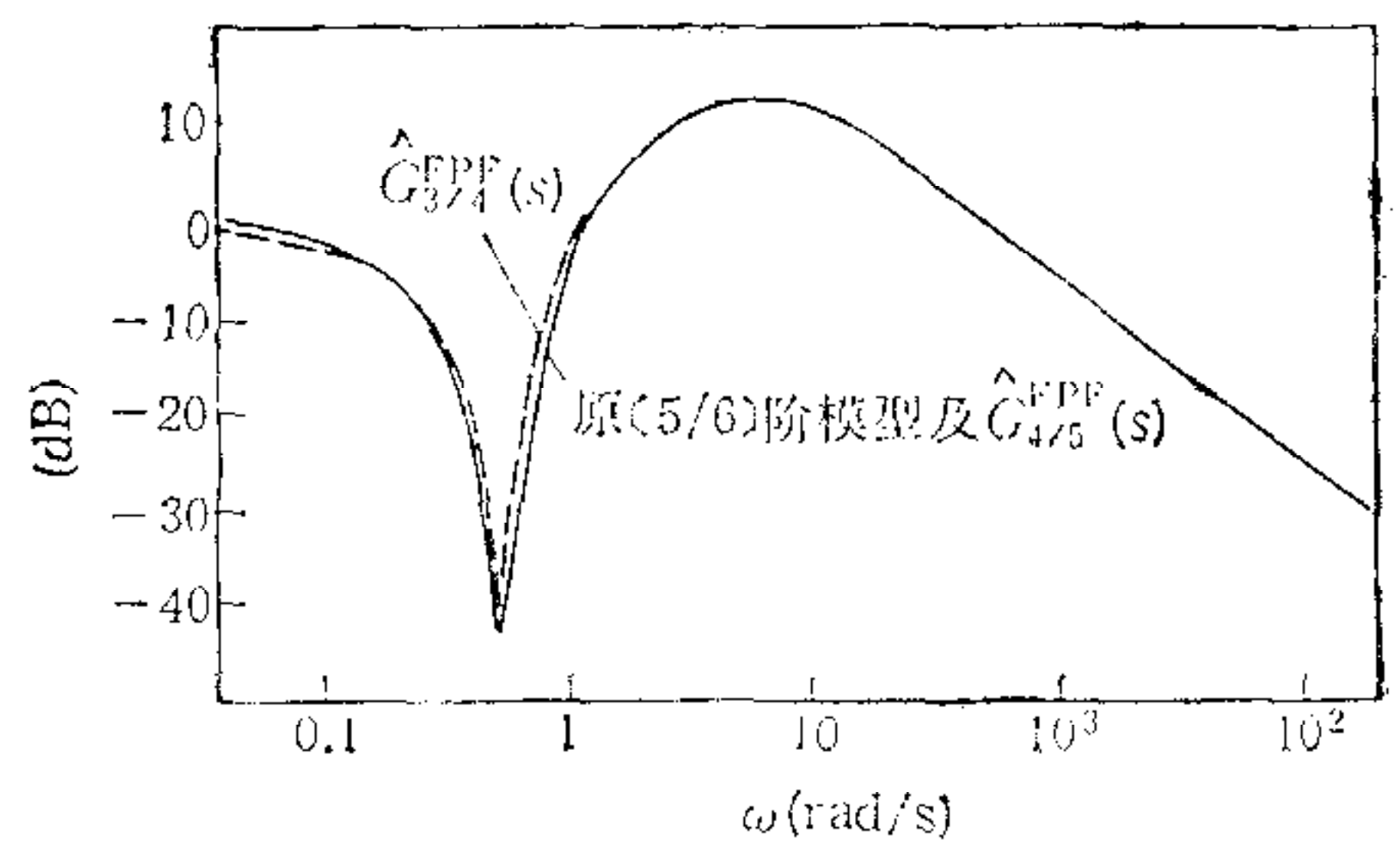


图 1 具有陷波波特性的幅频特性

式 (3.3), (3.4) 与用 FF-Padé 法降阶的结果<sup>[10]</sup>十分接近。  $G_{FF}^{FPF}(s)$  的特性曲线与对象已基本重合。

### 3. 三点拟合模型

大量计算表明, 三点拟合的 [2/3] 阶模型具有很强的表现能力, 能相当好地描述通常所遇到的对象。 三防系统的控制研究亦较成熟, 故一般情况下推荐使用三点拟合模型。 其选点原则是: 低频一个点; 中频两个点。

## 四、点拟合问题的“鲁棒性”

“鲁棒性”指控制器对被控对象参数变化的不敏感性。 在此, 借用“鲁棒性”一词表示 FPF 建模对拟合点选取的不敏感性。 即只要按上节所提原则选点, 在一定范围内, 所得结果是相当接近的。 现通过例子说明。

**例 2.** 图 2 为一个 [7/8] 阶系统的频率特性<sup>[5-9]</sup>。 现将其看作实际测得的曲线, 用三点拟合建模。 表 1 列出一定范围内不同拟合点的建模结果, 它们十分接近。 由表 1 还可看出, 低频拟合点只影响模型的稳态增益和实极点, 而中频拟合点只影响复极点。

图 3 为拟合点  $\omega_1 \in [0.1, 1.5]$ ,  $\omega_2, \omega_3 \in [5.5, 8]$ , 且  $\omega_3/\omega_2 \approx 1.1 \sim 1.2$  时模型的极、零点分布。

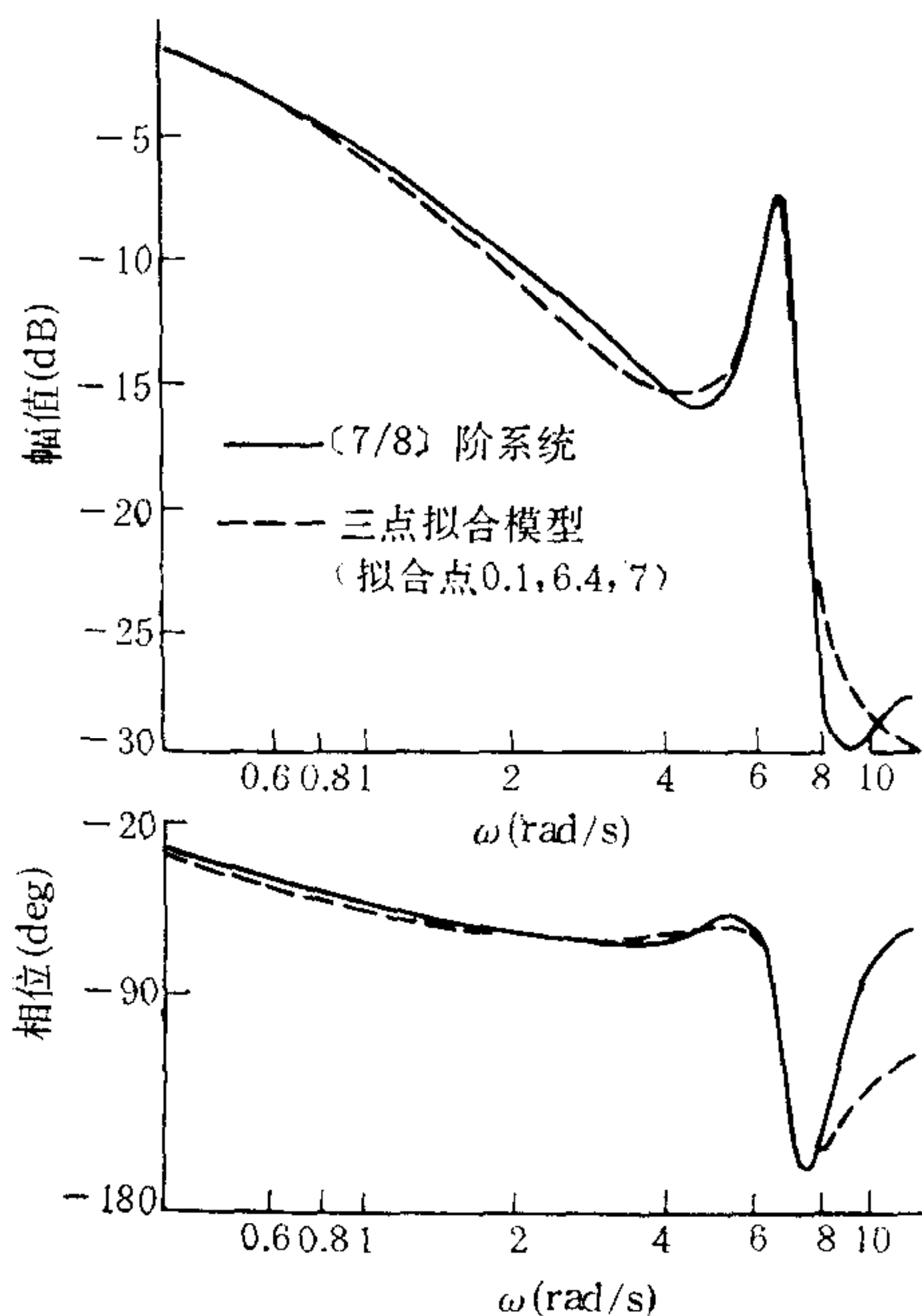


图 2 [7/8] 阶系统及三点拟合模型的频率特性

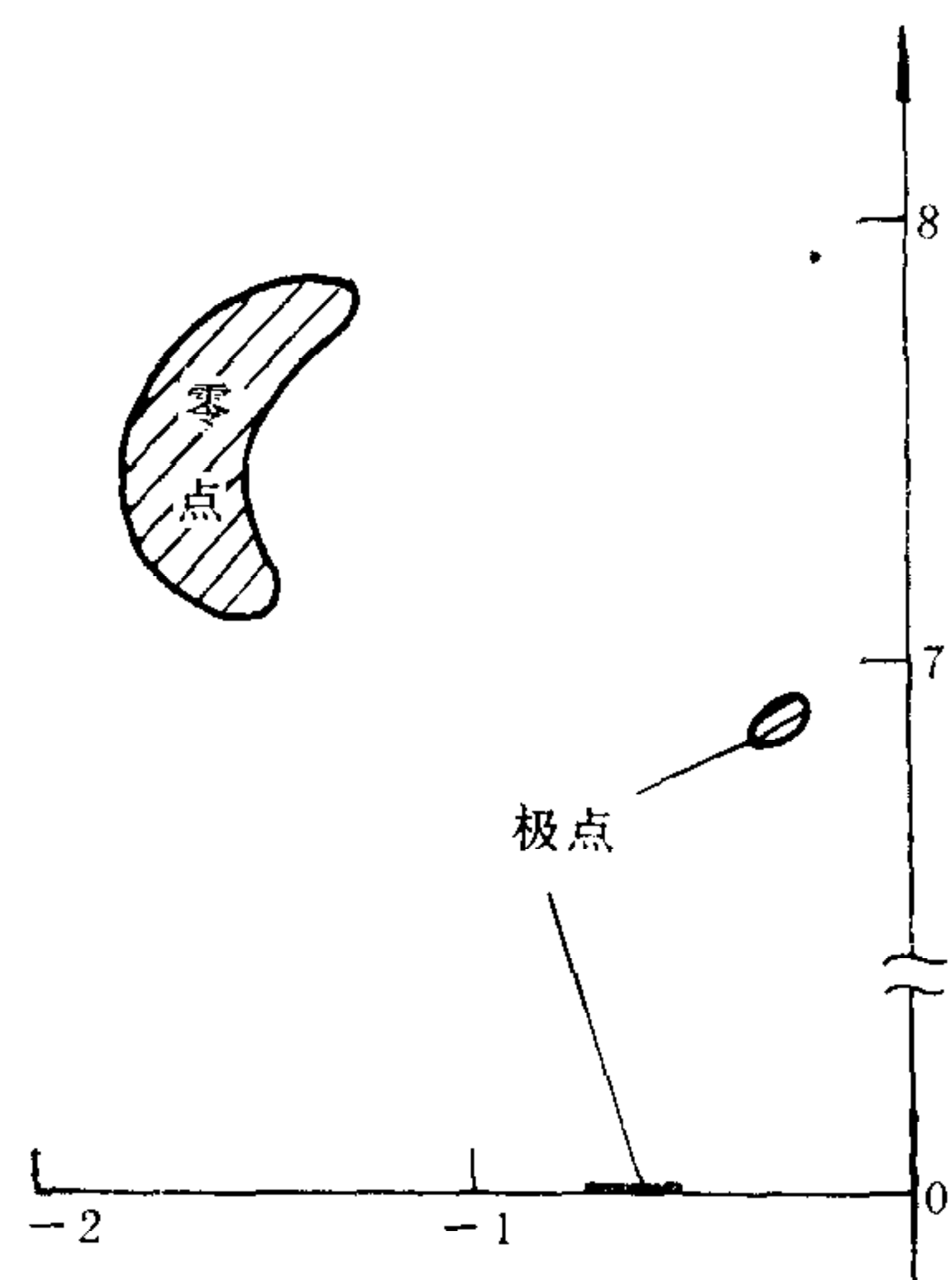


图 3 极、零点的取值范围(上半平面)

这种“鲁棒性”使 FPF 方法易于获得满意的结果, 并为在线估计和自整定设计提供了可能。

表 1 不同拟合点的建模结果

拟合点 (rad/s)	模 型		
	放大倍数	零 点	极 点
0.1, 6.4, 7	0.9976	$-1.7858 \pm j7.5557$	$-0.5729, -0.3176 \pm j6.7733$
0.1, 5.5, 6.8	0.9977	$-1.8229 \pm j7.2462$	$-0.5710, -0.3247 \pm j6.7288$
0.1, 7.2, 8	0.9972	$-1.1436 \pm j7.9779$	$-0.5810, -0.3287 \pm j6.956$
0.8, 6.4, 7	0.9285	$-1.6624 \pm j7.5457$	$-0.6500, -0.3114 \pm j6.7776$
1.5, 6.4, 7	0.8759	$-1.5199 \pm j7.5387$	$-0.7190, -0.3066 \pm j6.7814$

## 五、基于点拟合建模的自适应控制

对于线性系统,有

$$S_y(\omega) = |G(j\omega)|^2 S_x(\omega). \quad (5.1)$$

其中  $S_x(\omega)$ ,  $S_y(\omega)$  分别为系统输入、输出的功率谱密度. 由式(5.1)很易确定  $|G(j\omega)|^2$ . 现简介由  $|G(j\omega)|^2$  以点拟合思想建立传递函数的方法. 设

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|^2 &= G(j\omega)G(-j\omega) \\ &= P_m(j\omega)P_m(-j\omega)/Q_n(j\omega)Q_n(-j\omega) = A(\omega)/B(\omega) \\ &= \frac{A_0 + A_2\omega^2 + \dots + A_{2m}\omega^{2m}}{1 + B_2\omega^2 + \dots + B_{2n}\omega^{2n}}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

式(5.2)两边同乘  $B(\omega)$ , 比较等号两边  $\omega$  的同次幂项系数, 可得一个类似式(2.5)的线性伴随方程组. 只要参照本文第三节的原则选定  $m+n+1$  个拟合点, 则可解出多项式  $B(\omega)$  和  $A(\omega)$ . 由谱分解定理, 必可由  $A(\omega)/B(\omega)$  分解出稳定的传递函数  $P_m(j\omega)/Q_n(j\omega)$ .

因此, 基于点拟合建模的自适应控制方案可用图 4 表示.

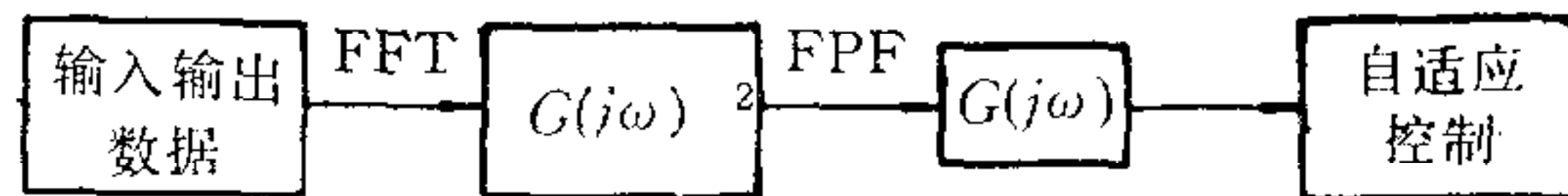


图 4 基于点拟合建模的自适应控制

拟合式(5.2)只使用了  $m+n+1$  个幅频特性数据, 这种处理可节省大量在线计算相频特性的时间. 而选点又具有一定的“鲁棒性”, 从而使在线实现成为可能. 有关结果将另文介绍.

## 六、实 例

图 5 为某原子反应堆沸腾炉的频率特性, 记号“○”为实测数据, 要通过它们建立系统的数学模型. Sanathan and Koerner (1963)<sup>[2]</sup> 和 Stahl (1984)<sup>[3]</sup> 的结果  $\hat{G}_{6/7}^{\text{San}}(s)$ ,  $\hat{G}_{6/7}^{\text{Sta}}(s)$  分别列于图 5 及表 2, 同时还给出了 Levy 法<sup>[1]</sup>的结果  $\hat{G}_{6/7}^{\text{Le}}(s)$ .

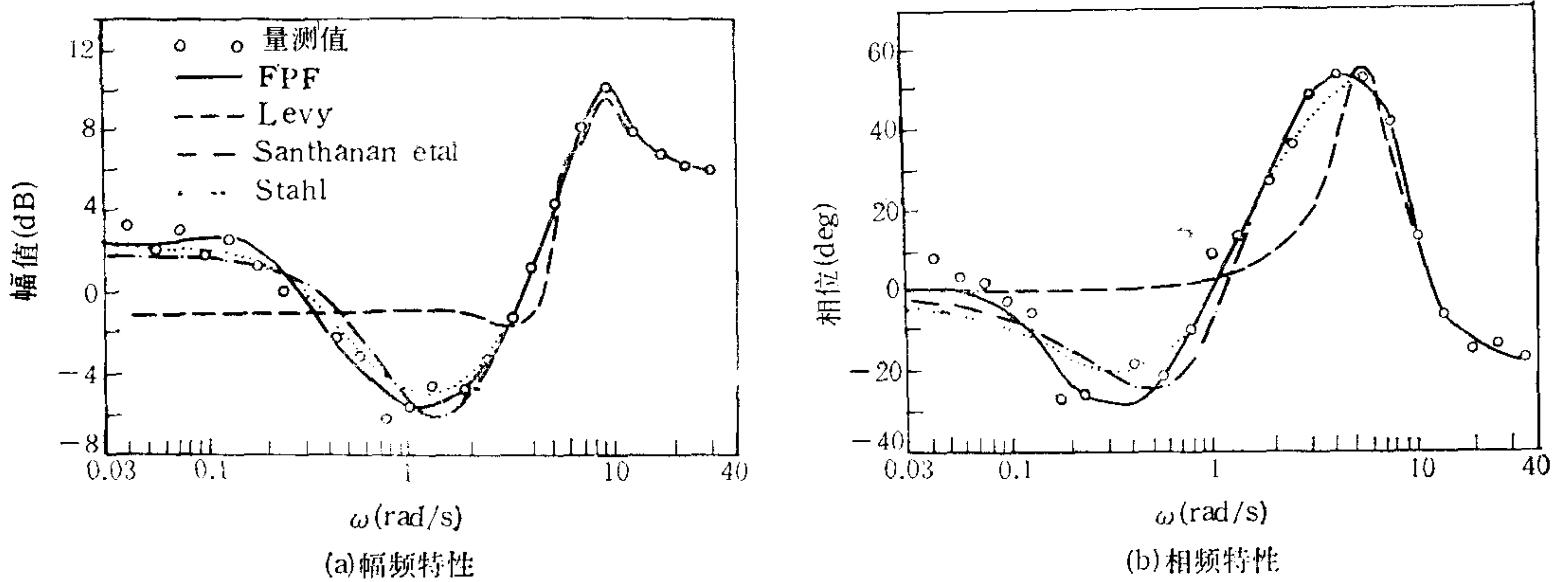


图5 反应堆沸腾炉频率特性  
(a) 幅频特性; (b) 相频特性

现采用 FPF 法建模。首先人工平滑数据(与最小二乘平滑的结果十分接近), 据本文第三节的资源分配和选点原则, 确定采用五点拟合的 [4/5] 阶模型。拟合点在平滑后的曲线上选取, 它们按  $\omega_i, g_i, \theta_i$  排列如下:

- 0.1, 2.8, -6; (低频)
- 0.7, -5, -15; } (中频振谷)
- 2, -4.5, 32; }
- 7.4, 8.05, 42; } (中频振峰)
- 12.5, 7.8, -7. }

表2 各种方法的建模结果及误差指标比较

	Levy 法 (1959)	San. & Ko. (1963)	Stahl (1984)	FPF (1985)
$a_0$	9.2894E - 1	1.2768	1.3333	1.2270
$a_1$	1.7123E - 1	1.2803	2.2142	10.9170
$a_2$	1.1254E - 1	7.8236E - 1	1.0229	18.0184
$a_3$	1.0363E - 2	7.9196E - 2	8.2012E - 2	8.2703
$a_4$	1.6044E - 3	8.0901E - 3	3.8629E - 3	7.510E - 1
$a_5$	8.8747E - 6	2.8952E - 4	-6.8146E - 5	-
$a_6$	4.7145E - 6	2.0144E - 5	1.4663E - 5	-
$b_0$	1	1	1	1
$b_1$	2.1108E - 1	2.5313	3.8363	8.6337
$b_2$	8.7539E - 2	4.2704E - 1	4.6395E - 1	32.7837
$b_3$	5.6295E - 3	5.4648E - 2	5.2067E - 2	3.5165
$b_4$	1.0042E - 3	4.5377E - 3	2.3687E - 3	4.337E - 1
$b_5$	1.1678E - 5	1.9841E - 4	-1.2982E - 5	2.8669E - 3
$b_6$	2.5212E - 6	1.1451E - 5	7.0255E - 6	-
$b_7$	2.2947E - 8	1.0522E - 7	7.0684E - 8	-
ER	229.1	318.1	320.2	313.5
EI	292.6	47.1	47.1	46.9
EG	180.3	16.1	9.4	10.0
E $\theta$	5648.6	1315.0	958.3	618.5

建模结果  $\hat{G}_{i}^{\text{FPF}}(s)$  列于图 5 和表 2. 由此可得下述几点比较:

1)  $\hat{G}_{i}^{\text{FPF}}(s)$  为 [4/5] 阶, 比其它模型低 2 阶.

2)  $\hat{G}_{i}^{\text{FPF}}(s)$  是稳定的, 而其它模型均不稳定(原系统稳定).

3) FPF 需建立和解一个 10 阶线性方程组, 而 San. and Ko. 和 Stahl 的方法都是迭代法, 每次迭代需建立和解一个 14 阶矩阵方程. 表 2 是十次迭代的结果. 即 FPF 比它们减少了几十乃至百倍的计算工作量.

4) 为了进一步作精度比较, 设误差准则

$$ER = \sum_{i=1}^N (R_{\hat{G}_i} - R_{G_i})^2, \quad EI = \sum_{i=1}^N (I_{\hat{G}_i} - I_{G_i})^2,$$

$$EG = \sum_{i=1}^N (|\hat{G}_i| - |G_i|)^2, \quad E\theta = \sum_{i=1}^N (\hat{\theta}_i - \theta_i)^2.$$

其中  $R_{\hat{G}_i}, I_{\hat{G}_i}, |\hat{G}_i|, \hat{\theta}_i$  分别表示所建模型在  $\omega_i$  处的实部, 虚部, 幅值和相位,  $R_{G_i}, I_{G_i}, |G_i|, \theta_i$  则为相应的实测值,  $N = 23$  为量测样本数. 所有结果都列于表 2. 即使对于这些误差准则,  $\hat{G}_{i}^{\text{FPF}}(s)$  亦优于前人的 [6/7] 阶模型.

## 七、结 语

动态系统 FPF 建模方法可以直接应用于系统辨识和模型降阶. 虽然本文只讨论了 SISO 系统的一般情况, 但并不难向 MIMO 系统推广. 对于积分型和含纯滞后的对象, 文献[4]亦作过初步的讨论. 而在线估计及其在实时控制系统中的实用性, 则是一个值得进一步探讨的课题.

FPF 方法高度地总结了实践经验, 并充分发挥了使用者的智慧. 而这种发挥, 是建立在一定的数学工具和经过提炼的逻辑判断准则的基础之上的. 本文方法无论从简易性、灵活性和拟合精度上, 都优于一些具有某种最优准则的“全自动”方法. 事实上, 由于方法的易学性和工程实用性, 相信更易于为工程人员所接受.

钱钟韩先生、周其鉴先生一直给予关怀和指导, 深表感谢.

## 参 考 文 献

- [1] Levy, E. C., Complex Curve Fitting, *IRE. Trans. Automatic Contr.* May (1959), 37—44.
- [2] Sanathan, C. K. and J. Koerner, Complex Function Synthesis as a Ration of Two Complex Polynomials, *IEEE Trans. Automatic Contr.*, T-AC 8(1963), 56—58.
- [3] Stahl, H., Transfer Function Synthesis Using Frequency Response Data, *Int. J. Contr.*, 39(1984), 541—550.
- [4] 胡锡恒, 一类含幅、相等式的非线性方程组的线性化及其应用, *应用数学与力学*, 3(1982), 519—527.
- [5] 胡锡恒, 频率拟合——Padé 联合降阶, *信息与控制*, 12(1983), 第 2 期, 1—8.
- [6] 胡锡恒, 保留主模式的 FF-Padé 法降阶, *信息与控制*, 13(1984), 第 6 期, 32—34, 57.
- [7] 周其鉴, 李祖枢, 便于动态系统设计的模型降阶, *信息与控制*, 11(1982), 第 2 期, 1—7.
- [8] 钱钟韩, 周其鉴, 胡锡恒, 模型降阶的机理探讨及几种新方法, *自动化学报*, 11(1985), 44—52.
- [9] Hu Xiheng, An Investigation on the Methodology and Technique of Model Reduction, 7th IFAC Symp. Identification and System Parameter Estimation, Preprints, 1985, York, UK, 1701—1706.
- [10] Hu Xiheng, The ,FF-Padé Method of Model Reduction in Frequency Domain, *IEEE Trans. Automatic Contr.*, to be published .
- [11] 沙万乾, 二阶线性逼近系统的参数估算及其工程应用, *信息与控制*, 13(1984), 第 6 期, 35—38.

## A METHOD FOR DYNAMIC SYSTEM MODELING BY FREQUENCY-POINT-FITTING

HU XIHENG

*(Guizhou Institute of Technology)*

### ABSTRACT

In this paper, an interactive method for dynamic system modeling by frequency-point-fitting is presented. The concepts of the allocation of information resources and the criterion for choosing fitting points are given. The new method has robustness in choosing fitting points. It can be directly used for identification or model reduction with much simpler computation but higher accuracy under error indexes when compared with previous methods. An adaptive control strategy based on this method is also introduced to exhibit its wide application potentials.