第13卷 第5期　　自 动 化 学 报　　Vol. 13, No. 5
1987 年 9 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Sept., 1987

换热网络的一般结构模型

王 建　潘日芳　蒋慰孙
（华东化工学院自动化研究所）

摘　　要

本文在定义了矩阵的元积运算和网络参数状态矩阵，推导了相应的运算法则之后，在单台换热器的热量、质量平衡基础上，推导了适用于任意结构的换热网络模型. 同时，提出了一种新的建模方法.

一、引　　言

热交换网络以换热器作为网络构成的基本单元. 不同的单元数目，不同的连接方式和流量分配，形成结构相异的网络形态. 为了合理地设计、仿真、优化和综合换热网络，往往需要构造网络的数学模型.

就网络的可能结构看，可以说是千变万化. 当然，对已定结构的网络系统，必能写出相应的数学模型[1]. 但这是一种专用模型，更换网络结构时，必须重新列写. 其次，从专用模型中，未必能全面反映网络结构与网络性能之间的联系与影响. 因此，应当建立一种适用于任意台换热器、任意连接方式的通用网络数学模型，即换热网络的一般结构模型.

与通常的建模方式不同，网络的一般结构模型不仅要考虑全网络的物料平衡和热量平衡，而且要考虑在模型中反映网络结构的因素. 本文在定义了矩阵的元积运算和网络的参数状态矩阵，推导了相应的运算法则之后，建立起网络结构矩阵与参数状态矩阵间的联系. 根据单台换热器的物料、热量平衡关系以及矩阵元积运算法则，推导了一般结构下的全网络物料、热量平衡的数学模型. 与此时同，给出了一种新的建模方法.

二、矩阵的元积及网络参数状态矩阵

定义 1. 设 $\underline{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$，若

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{节点 } i \text{ 到节点 } j \text{ 存在联接},\\ 0 & \text{节点 } i \text{ 到节点 } j \text{ 不存在联接},\end{cases}$$

则称 $\underline{A}$ 为网络的结构矩阵.

定义 2. 设 $\underline{\theta}\in R^{m\times n}$，若 θ_{ij} 表示节点 i 到节点 j 的物流参数状态，则称 $\underline{\theta}$ 为网络的参数状态矩阵.

本文于 1985 年 10 月 17 日收到.

若 $\theta_{ij}=\begin{cases} f_{ij}, & \text{为流量参数状态矩阵.} \\ t_{ij}, & \text{为温度参数状态矩阵.} \\ c_{ij}, & \text{为比热参数状态矩阵.}\end{cases}$

定义 3. 设 $\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}\in R^{m\times n}$，定义矩阵 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 之元积运算为 $\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}=[a_{ij}\times b_{ij}]_{m\times n}$.

显然,它具有以下性质:

(1) $\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}\odot\underset{\sim}{A}$,

(2) $\underset{\sim}{A}\odot(\underset{\sim}{B}\odot\underset{\sim}{C})=(\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B})\odot\underset{\sim}{C}$,

(3) $\underset{\sim}{A}\odot(\underset{\sim}{B}+\underset{\sim}{C})=\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}+\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{C}$,

(4) $(\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B})^T=\underset{\sim}{A}^T\odot\underset{\sim}{B}^T$,

(5) 若 $\underset{\sim}{D}$ 为对角矩阵,则

$$(\underset{\sim}{D}\underset{\sim}{A})\odot\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{D}(\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}),\ \underset{\sim}{A}\odot(\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{D})=(\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B})\underset{\sim}{D}.$$

这里，$\underset{\sim}{D}\underset{\sim}{A}$ 表示 $\underset{\sim}{D}$ 与 $\underset{\sim}{A}$ 的普通矩阵乘法.

(6) 若 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 同划分,即 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 各对应子阵的行列维数相等,则

$$\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}=\begin{bmatrix} \underset{\sim}{A}_{11}\odot\underset{\sim}{B}_{11}\cdots\cdots\underset{\sim}{A}_{1k}\odot\underset{\sim}{B}_{1k} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \underset{\sim}{A}_{l1}\odot\underset{\sim}{B}_{l1}\cdots\cdots\underset{\sim}{A}_{lk}\odot\underset{\sim}{B}_{lk}\end{bmatrix}.$$

定义 4. 设 $\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}\in R^{m\times n}$，定义矩阵 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 之元商运算为

$$\underset{\sim}{A}\oslash\underset{\sim}{B}=[a_{ij}/b_{ij}]_{m\times n},\ b_{ij}\neq 0.$$

显然,它具有以下性质:

(1) $(\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{B})\oslash\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\oslash\underset{\sim}{C}+\underset{\sim}{B}\oslash\underset{\sim}{C}$,

(2) $(\underset{\sim}{A}\oslash\underset{\sim}{B})^T=\underset{\sim}{A}^T\oslash\underset{\sim}{B}^T$,

(3) $(\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B})\oslash\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}$,

(4) $(\underset{\sim}{A}\oslash\underset{\sim}{B})\oslash\underset{\sim}{C}=(\underset{\sim}{A}\oslash\underset{\sim}{C})\oslash\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}\oslash(\underset{\sim}{B}\odot\underset{\sim}{C})$,

(5) $\underset{\sim}{A}\oslash(\underset{\sim}{B}\oslash\underset{\sim}{C})=(\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{C})\oslash\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{C}\oslash(\underset{\sim}{B}\oslash\underset{\sim}{A})$,

(6) 设 $\underset{\sim}{A}\in R^{m\times n}$, $\underset{\sim}{X}=R^{n\times 1}$, 则

$$(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{X})\oslash\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{C}\underset{\sim}{X}.$$

式中 $\underset{\sim}{C}\in R^{m\times n}$, $c_{ij}=a_{ij}/x_i$.

(7) 若 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 同划分,则

$$\underset{\sim}{A}\oslash\underset{\sim}{B}=\begin{bmatrix} \underset{\sim}{A}_{11}\oslash\underset{\sim}{B}_{11}\cdots\cdots\underset{\sim}{A}_{1k}\oslash\underset{\sim}{B}_{1k} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \underset{\sim}{A}_{l1}\oslash\underset{\sim}{B}_{l1}\cdots\cdots\underset{\sim}{A}_{lk}\oslash\underset{\sim}{B}_{lk}\end{bmatrix}.$$

三、网络结构矩阵的一般形式

由任意 n 台换热器构成的系统，可以将它按热流(加热物流)和冷流(被加热物流)分开,各自构成一个网络，分别称之为热流网络(符号中以右上角的 h 表示)和冷流网络(以右上角 c 表示). 根据分析可知,在一般结构情况下,若有 n 台热交换器，m^h 个热流输入节点,m^c 个冷流输入节点,p^h 个热流输出节点，p^c 个冷流输出节点,则热流网络的结构矩

阵的一般形式为

$$\begin{array}{c} I_1^h \\ \vdots \\ I_{m^h}^h \\ o_1^h \\ \vdots \\ o_{p^h}^h \\ v_1^h \\ \vdots \\ v_n^h \end{array}\left[\begin{array}{c|c} \underset{(m^h+p^h)\times(m^h+p^h)}{\underline{0}} & \underset{(m^h+p^h)\times n}{\underline{A}_1^h} \\ \hline \underset{n\times(m^h+p^h)}{\underline{A}_2^h} & \underset{n\times n}{\underline{A}_v^h} \end{array}\right],$$
$$I_1^h\cdots I_{m^h}^h o_1^h\cdots o_{p^h}^h v_1^h\cdots v_n^h$$

其中，

$$\underline{A}_1^h=\left[\begin{array}{c} \underset{m^h\times n}{\underline{A}_I^h} \\ \hline \underset{p^h\times n}{\underline{0}} \end{array}\right],\qquad \underline{A}_2^h=\left[\begin{array}{c|c} \underset{n\times m^h}{\underline{0}} & \underset{n\times p^h}{\underline{A}_o^h} \end{array}\right].$$

对冷流网络，只须将右上角标记 h 换为 c 即可.

四、热交换网络的一般结构模型

作为网络的一般结构模型，应当满足：全网络的物料平衡，全网络的热量平衡，模型有统一的表达式而不论结构如何.

要满足全网络的平衡关系，首先应当分析网络各节点的平衡关系，然后再考虑节点的联接方式.

在冷、热流网络中，对于网络的输入节点集 $\{I_1^h,\cdots,I_{m^h}^h\}$ 和 $\{I_1^c,\cdots,I_{m^c}^c\}$，仅有物料从这些点流出；而对输出节点集 $\{o_1^h,\cdots,o_{p^h}^h\}$ 和 $\{o_1^c,\cdots,o_{p^c}^c\}$，只有物料流入这些点，而无流出．自然，对输入输出点集，不满足物料平衡与热量平衡关系；而与换热器对应的内部点集 $\{v_1,\cdots,v_n\}$，应当达到物料与热量的平衡.

1. 物料平衡

对热流网络上的每个节点，输入物流(以左上角的 i 表示)的流量参数向量为

$$\begin{aligned} {}^i\underline{f}^h &= [{}^if_{I_1}^h,\cdots,{}^if_{I_{m^h}}^h \vdots {}^if_{o_1}^h,\cdots,{}^if_{o_{p^h}}^h \vdots {}^if_{v_1}^h,\cdots,{}^if_{v_n}^h]^T \\ &= \left[\begin{array}{c} {}^i\underline{f}_I^h \\ \hline {}^i\underline{f}_o^h \\ \hline {}^i\underline{f}_v^h \end{array}\right] = (\underline{A}^h\odot\underline{F}^h)^T\underline{E}^h = \left[\begin{array}{c} \underline{0} \\ \hline (\underline{A}_o^h\odot\underline{F}_o^h)^T\underline{E} \\ \hline \underline{D}_I^{hT}\underline{E}_m^h+\underline{D}_v^{hT}\underline{E} \end{array}\right]. \end{aligned}$$

式中，$\underline{E}^h=[1,1,\cdots,1]^T_{(m^h+p^h+n)\times 1}$，$\underline{E}=[1,1,\cdots,1]^T_{n\times 1}$，

$\underline{E}_m^h=[1,1,\cdots,1]^T_{m^h\times 1}$，$\underline{D}_I^h=\underline{A}_I^h\odot\underline{F}_I^h$，$\underline{D}_v^h=\underline{A}_v^h\odot\underline{F}_v^h$.

对每个节点，输出物流(以左上角 o 表示)的流量参数向量为

$${}^o\underline{f}^h=[{}^of_{I_1}^h,\cdots,{}^of_{Imh}^h \vdots {}^of_{o_1}^h,\cdots,{}^of_{o_{p^h}}^h \vdots {}^of_{v}^h,\cdots,{}^of_{v_n}^h]^T$$

$$=\begin{bmatrix} {}^{o}\underline{t}_{l}^{h} \\ \hline {}^{o}\underline{t}_{o}^{h} \\ \hline {}^{o}\underline{t}_{v}^{h} \end{bmatrix} = (\underline{A}^{h}\odot\underline{F}^{h})\underline{E}^{h} = \begin{bmatrix} (\underline{A}_{l}^{h}\odot\underline{F}_{l}^{h})\underline{E} \\ \hline \underline{0} \\ \hline \underline{D}_{o}^{h}\underline{E}_{p}^{h} + \underline{D}_{v}^{h}\underline{E} \end{bmatrix}.$$

式中，$\underline{E}_{p}^{h} = [1,1,\cdots,1]_{p^{h}\times 1}^{T}$，$\underline{D}_{o}^{h} = \underline{A}_{o}^{h}\odot\underline{F}_{o}^{h}$，$\underline{F}^{h}$ 与 $\underline{A}^{h}$ 同划分.

因 ${}^{i}\underline{t}_{v}^{h} = {}^{o}\underline{t}_{v}^{h}$，故 $\underline{D}_{l}^{hT}\underline{E}_{m}^{h} + \underline{D}_{v}^{hT}\underline{E} = \underline{D}_{o}^{h}\underline{E}_{p}^{h} + \underline{D}_{v}^{h}\underline{E}$. (1)

对冷流网络，只须将(1)式中的 h 换为 c 即可.

2. 热量平衡

假设所考虑的是一个无相变的液体换热系统，则流体的焓流量为

$$H = tcf.$$

一般情况下，比热 c 不为常数，通常可以表示为温度 t 的函数(具体的函数形式可从物性手册中查得). 因此，可考虑将 t 与 c 的乘积作为新的函数变量:

$$x(t) = tc(t),$$

其物理含义为温度 t 下单位流体的焓. 注意到在各节点中，同一输出流的温度相等，即在温度参数状态矩阵 $\underline{T}$ 中，恒有 $t_{ij} = t_{ik}$; 在参数状态矩阵 $\underline{X}$ 中，恒有 $x_{ij} = x_{ik}$.

对全部热流节点，其流入焓为

$${}^{i}\underline{H}^{h} = [{}^{i}H_{l_1}^{h},\cdots,{}^{i}H_{l_{m^h}}^{h} \vdots {}^{i}H_{o_1}^{h},\cdots,{}^{i}H_{o_{p^h}}^{h} \vdots {}^{i}H_{v_1}^{h},\cdots,{}^{i}H_{v_n}^{h}]^{T}$$

$$=\begin{bmatrix} {}^{i}\underline{H}_{l}^{h} \\ \hline {}^{i}\underline{H}_{o}^{h} \\ \hline {}^{i}\underline{H}_{v}^{h} \end{bmatrix} = (\underline{A}^{h}\odot\underline{F}^{h}\odot\underline{X}^{h})^{T}\underline{E}^{h} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \hline (\underline{D}_{o}^{h}\odot\underline{X}_{o}^{h})^{T}\underline{E} \\ \hline (\underline{D}_{l}^{h}\odot\underline{X}_{l}^{h})^{T}\underline{E}_{m}^{h} + (\underline{D}_{v}^{h}\odot\underline{X}_{v}^{h})^{T}\underline{E} \end{bmatrix}.$$

在上式中，

因 $x_{ij} = x_{ik}$，则

$$\underline{X}_{o}^{h} = \begin{bmatrix} {}^{o}x_{v_1}^{h} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & {}^{o}x_{v_n}^{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 1 \cdots 1 \\ \vdots \quad \vdots \\ 1 1 \cdots 1 \end{bmatrix},$$

故

$$(\underline{D}_{o}^{h}\odot\underline{X}_{o}^{h})^{T}\underline{E} = \left\{ \underline{D}_{o}^{hT}\odot\left\{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} {}^{o}x_{v_1}^{h} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & {}^{o}x_{v_n}^{h} \end{bmatrix}\right\}\right\}\underline{E}.$$

运用元积法则(5)，可将上式化为

$$(\underline{D}_{o}^{h}\odot\underline{X}_{o}^{h})^{T}\underline{E} = \underline{D}_{o}^{hT}\begin{bmatrix} {}^{o}x_{v_1}^{h} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & {}^{o}x_{v_n}^{h} \end{bmatrix}\underline{E}$$

$$= \underline{D}_{o}^{hT}[{}^{o}x_{v_1}^{h},\cdots,{}^{o}x_{v_n}^{h}]^{T} = \underline{D}_{o}^{hT\,o}\underline{x}_{v}^{h}.$$

用同样方法可得

$$(\underline{D}_{l}^{h}\odot\underline{X}_{l}^{h})^{T}\underline{E}_{m}^{h} + (\underline{D}_{v}^{h}\odot\underline{X}_{v}^{h})^{T}\underline{E} = \underline{D}_{l}^{hT}\underline{x}_{l}^{h} + \underline{D}_{v}^{hT\,o}\underline{x}_{v}^{h}.$$

式中， ${}^{o}\underline{x}_{v}^{h} = [{}^{o}x_{v_1}^{h},\cdots,{}^{o}x_{v_n}^{h}]^{T}$，$\underline{x}_{l}^{h} = [x_{l_1}^{h},\cdots,x_{l_{m^h}}^{h}]^{T}$，

因此，

$$
{}^{i}\underline{H}^{h}=\begin{bmatrix} {}^{i}\underline{H}_{I}^{h} \\ \hdashline {}^{i}\underline{H}_{o}^{h} \\ \hdashline {}^{i}\underline{H}_{v}^{h} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \underline{0} \\ \hdashline \underline{D}_{o}^{hT\circ}\underline{x}_{v}^{h} \\ \hdashline \underline{D}_{I}^{hT}\underline{x}_{I}^{h}+\underline{D}_{v}^{hT\circ}\underline{x}_{v}^{h} \end{bmatrix}.
$$

热流网络节点的流出焓为

$$
\begin{aligned}
{}^{o}\underline{H}^{h} &= [{}^{o}H_{I_1}^{h},\cdots,{}^{o}H_{I_{m^h}}^{h}\vdots{}^{o}H_{o_1}^{h},\cdots,{}^{o}H_{o_{p^h}}^{h}\vdots{}^{o}H_{v_1}^{h},\cdots,{}^{o}H_{v_n}^{h}]^{T} \\
&= \begin{bmatrix} {}^{o}\underline{H}_{I}^{h} \\ \hdashline {}^{o}\underline{H}_{o}^{h} \\ \hdashline {}^{o}\underline{H}_{v}^{h} \end{bmatrix} = (\underline{A}^{h}\odot\underline{F}^{h}\odot\underline{X}^{h})\underline{E}^{h} = \begin{bmatrix} \tilde{\underline{D}}_{I}^{h}\underline{x}_{I}^{h} \\ \hdashline \underline{0} \\ \hdashline \tilde{\underline{D}}_{o}^{h\circ}\underline{x}_{v}^{h}+\tilde{\underline{D}}_{v}^{h\circ}\underline{x}_{v}^{h} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

式中，

$$\tilde{\underline{D}}_{I}^{h}=\mathrm{dig}[\underline{d}_{I_1}^{h}\underline{E},\cdots\underline{d}_{I_{m^h}}^{h}\underline{E}], \tag{2}$$

$\underline{d}_{I_j}^{h}(j=1,2,\cdots,m^{h})$ 为 $\underline{D}_{I}^{h}$ 的第 j 行；

$$\tilde{\underline{D}}_{o}^{h}=\mathrm{dig}[\underline{d}_{o_1}^{h}\underline{E}_{p}^{h},\cdots,\underline{d}_{o_{p^h}}^{h}\underline{E}_{p}^{h}], \tag{3}$$

$\underline{d}_{o_j}^{h}(j=1,2,\cdots,p^{h})$ 为 $\underline{D}_{o}^{h}$ 的第 j 行；

$$\tilde{\underline{D}}_{v}^{h}=\mathrm{dig}[\underline{d}_{v_1}^{h}\underline{E},\cdots,\underline{d}_{v_n}^{h}\underline{E}], \tag{4}$$

$\underline{d}_{v_j}^{h}(j=1,2,\cdots,n)$ 为 $\underline{D}_{v}^{h}$ 的第 j 行；

$\underline{E}_{p}^{h}=[1,1,\cdots,1]_{p^h\times 1}^{T}$。

因此，对内部节点集，其热流焓变为

$$\Delta\underline{H}_{v}^{h}={}^{i}\underline{H}_{v}^{h}-{}^{o}\underline{H}_{v}^{h}=\underline{D}_{I}^{hT}\underline{x}_{I}^{h}+(\underline{D}_{v}^{hT}-\tilde{\underline{D}}_{o}^{h}-\tilde{\underline{D}}_{v}^{h})^{\circ}\underline{x}_{v}^{h}.$$

同理，可推得冷流网络中的内部节点焓变为

$$\Delta\underline{H}_{v}^{c}=\underline{D}_{I}^{cT}\underline{x}_{I}^{c}+(\underline{D}_{v}^{cT}-\tilde{\underline{D}}_{o}^{c}-\tilde{\underline{D}}_{v}^{c})^{\circ}\underline{x}_{v}^{c}$$

按热量平衡原理，每个节点的冷、热流总焓变应为零，即

$$\Delta\underline{H}_{v}=\Delta\underline{H}_{v}^{h}+\Delta\underline{H}_{v}^{c}=\underline{0}.$$

因此，

$$\underline{D}_{I}^{hT}\underline{x}_{I}^{h}+(\underline{D}_{v}^{hT}-\tilde{\underline{D}}_{o}^{h}-\tilde{\underline{D}}_{v}^{h})^{\circ}\underline{x}_{v}^{h}+\underline{D}_{I}^{cT}\underline{x}_{I}^{c}+(\underline{D}_{v}^{cT}-\tilde{\underline{D}}_{o}^{c}-\tilde{\underline{D}}_{v}^{c})^{\circ}\underline{x}_{v}^{c}=\underline{0} \tag{5}$$

3. 由热量衡算求取 ${}^{i}\underline{x}$

为了建立每台换热器的传热量与热流节点焓变之间的平衡关系，还应知道每台换热器的输入流温度，这可从节点的输入单位焓 ${}^{i}x_{v}$ 求取，先由热衡算法推导 ${}^{i}\underline{x}_{v}$。

设节点的热流输入单位焓为

$$
\begin{aligned}
{}^{i}\underline{x}^{h} &= [{}^{i}x_{I_1}^{h},\cdots,{}^{i}x_{I_{m^h}}^{h}\vdots{}^{i}x_{o_1}^{h},\cdots{}^{i}x_{o_{p^h}}^{h}\vdots{}^{i}x_{v_1}^{h},\cdots,{}^{i}x_{v_n}^{h}]^{T} \\
&= [{}^{i}\underline{x}_{I}^{hT}\vdots{}^{i}\underline{x}_{o}^{hT}\vdots{}^{i}\underline{x}_{v}^{hT}]^{T},
\end{aligned}
$$

则

$$
{}^{i}\underline{H}^{h}=\begin{bmatrix} {}^{i}\underline{H}_{I}^{h} \\ \hdashline {}^{i}\underline{H}_{o}^{h} \\ \hdashline {}^{i}\underline{H}_{v}^{h} \end{bmatrix}={}^{i}x^{h}\odot\begin{bmatrix} {}^{i}\underline{f}_{I}^{h} \\ \hdashline {}^{i}\underline{f}_{o}^{h} \\ \hdashline {}^{i}\underline{f}_{v}^{h} \end{bmatrix}.
$$

对输入输出点集，因

$$\begin{bmatrix} {}^i\underline{H}_I^h \\ \hdashline {}^i\underline{H}_o^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^i\underline{x}_I^h \\ \hdashline {}^i\underline{x}_o^h \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \hdashline \underline{D}_o^{hT}\underline{E} \end{bmatrix}, \text{ 故 } {}^i\underline{H}_o^h = {}^i\underline{x}_o^h \odot (\underline{D}_o^{hT}\underline{E}).$$

由热平衡得知，

$$^i\underline{H}_o^h = \underline{D}_o^{hTo}\underline{x}_v^h, \text{ 故 } {}^i\underline{x}_o^h = (\underline{D}_o^{hTo}\underline{x}_v^h) \oslash (\underline{D}_o^{hT}\underline{E}). \tag{6}$$

对内部点集，有

$$^i\underline{H}_v^h = (\underline{D}_I^{hT}\underline{E}_m^h + \underline{D}_v^h\underline{E}) \odot {}^i\underline{x}_v^h.$$

由热量平衡得知，

$$^i\underline{H}_v^h = \underline{D}_I^{hT}\underline{x}_I^h + \underline{D}_v^{hTo}\underline{x}_v^h,$$

故得

$$^i\underline{x}_v^h = (\underline{D}_I^{hT}\underline{x}_I^h + \underline{D}_v^{hTo}\underline{x}_v^h) \oslash (\underline{D}_I^{hT}\underline{E}_m^h + \underline{D}_v^{hT}\underline{E}). \tag{7}$$

对冷流网络，同理可得

$$^i\underline{x}_o^c = (\underline{D}_o^{cTo}\underline{x}_v^c) \oslash (\underline{D}_o^{cT}\underline{E}), \tag{8}$$

$$^i\underline{x}_v^c = (\underline{D}_I^{cT}\underline{x}_I^c + \underline{D}_v^{cTo}\underline{x}_v^c) \oslash (\underline{D}_I^{cT}\underline{E}_m^c + \underline{D}_v^{hT}\underline{E}). \tag{9}$$

4. 节点焓变与换热器传热量的平衡

根据 $^o\underline{x}_v^h$、$^o\underline{x}_v^c$、$^i\underline{x}_v^h$、$^i\underline{x}_v^c$，便可由 x 与 t 的函数关系直接确定 $^o\underline{t}_v^h$、$^o\underline{t}_v^c$、$^i\underline{t}_v^h$、$^i\underline{t}_v^c$（热交换器的出、进口温度向量）.

根据换热器的传热量方程，换热器的传热量为

$$\Delta H_{cv} = \underline{K} \odot \underline{S} \odot \{[({}^i\underline{t}_v^h - {}^o\underline{t}_v^c) - ({}^o\underline{t}_v^h - {}^i\underline{t}_v^c)] \oslash \overset{LN}{=\!=} [({}^i\underline{t}_v^h - {}^o\underline{t}_v^c) \oslash ({}^o\underline{t}_v^h - {}^i\underline{t}_v^c)]\}.$$

式中，$\underline{K} = [K_{v_1}, \cdots, K_{v_n}]^T$ 为换热器传热系数向量，

$\underline{S} = [S_{v_1}, \cdots, S_{v_n}]^T$ 为换热器传热面积向量，

$^i\underline{t}_v^h = [{}^it_{v_1}^h, \cdots, {}^it_{v_n}^h]^T$，$^o\underline{t}_v^h = [{}^ot_{v_1}^h, \cdots, {}^ot_{v_n}^h]^T$，

$^i\underline{t}_v^c = [{}^it_{v_1}^c, \cdots, {}^it_{v_n}^c]^T$，$^o\underline{t}_v^c = [{}^ot_{v_1}^c, \cdots, {}^ot_{v_n}^c]^T$，

$\underline{F}[\underset{m\times n}{\underline{A}}] \triangleq [f(a_{ij})]_{m\times n}$.

根据传热平衡，热交换器的传热量应等于内部节点的热流焓变，即

$$\Delta\underline{H}_{cv} = \Delta\underline{H}_v^h,$$

故得

$$\underline{D}_I^{hT}\underline{x}_I^h + (\underline{D}_v^{hT} - \tilde{\underline{D}}_o^h - \tilde{\underline{D}}_v^h){}^o\underline{x}_v^h = \underline{K} \odot \underline{S} \odot \{[({}^i\underline{t}_v^h - {}^o\underline{t}_v^c) - ({}^o\underline{t}_v^h - {}^i\underline{t}_v^c)] \oslash \overset{LN}{=\!=} [({}^i\underline{t}_v^h - {}^o\underline{t}_v^c) \oslash ({}^o\underline{t}_v^h - {}^i\underline{t}_v^c)]\}. \tag{10}$$

五、模型算例和应用

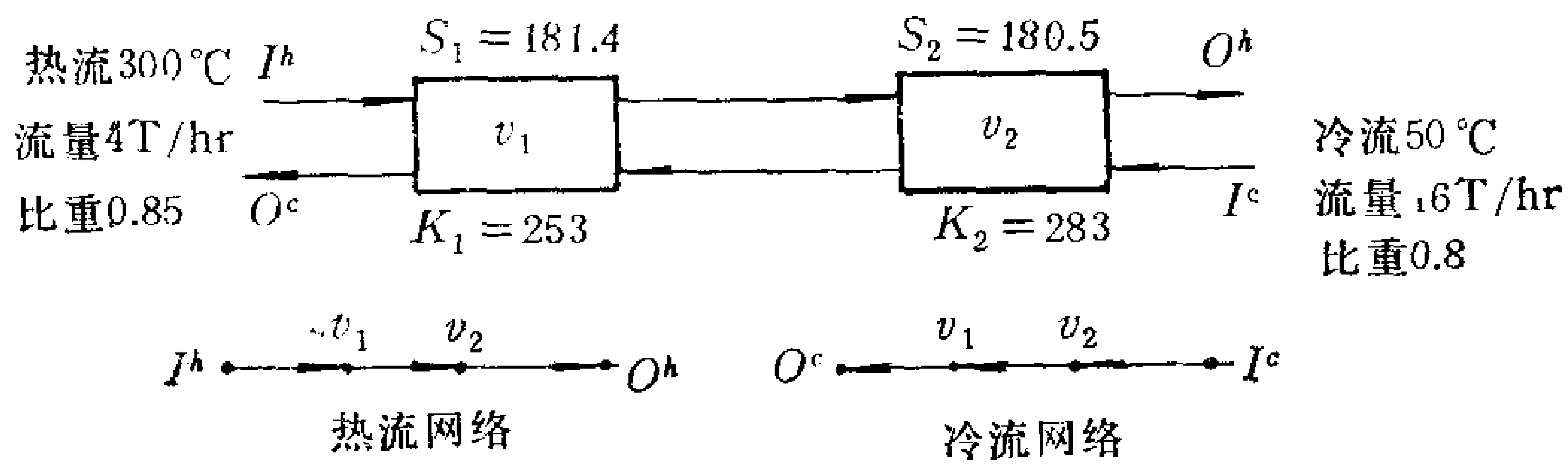
1. 算例

为便于理解及验证模型的正确性，这里给出了一个用本模型计算由两台换热器构成网络的实际算例.

网络见下图. 热流和冷流均为油料，可查得比热的函数式为

$$c(t) = (0.403 + 0.0081t)/d^{-0.5},$$

而单位焓为 $x = (0.403 + 0.0081t^2)/d^{-0.5}$，（$d$ 为比重）. (11)



本例中，结构矩阵之子阵为

$$\underline{A}_I^h = [1, 0],\ \underline{A}_o^h = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \underline{A}_v^h = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\underline{A}_I^c = [0, 1],\ \underline{A}_o^c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \underline{A}_v^c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

热流流量参数状态矩阵之子阵为

$$\underline{F}_I^h = [f_{I^h v_1}^h, f_{I^h v_2}^h],\ \underline{F}_o^h = [f_{v_1 o^h}^h, f_{v_2 o^h}^h]^T,$$

$$\underline{F}_v^h = \begin{bmatrix} f_{v_1 v_1}^h & f_{v_1 v_2}^h \\ f_{v_2 v_1}^h & f_{v_2 v_2}^h \end{bmatrix},$$

$$\underline{D}_I^h = \underline{A}_I^h \odot \underline{F}_I^h = [f_{I^h v_1}, 0] = [4, 0],$$

$$\underline{D}_o^h = \underline{A}_o^h \odot \underline{F}_o^h = \begin{bmatrix} 0 \\ \hline 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{d}_{o_1}^h \\ \hline \underline{d}_{o_2}^h \end{bmatrix},$$

$$\underline{D}_v^h = \underline{A}_v^h \odot \underline{F}_v^h = \begin{bmatrix} 0 & f_{v_1 v_2}^h \\ \hline 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{d}_{v_1}^h \\ \hline \underline{d}_{v_2}^h \end{bmatrix}.$$

同理可得：$\underline{D}_I^c = [0, 16]$,

$$\underline{D}_o^c = \begin{bmatrix} 16 \\ \hline 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{d}_{o_1}^c \\ \hline \underline{d}_{o_2}^c \end{bmatrix},$$

$$\underline{D}_v^c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hline f_{v_2 v_1}^c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{d}_{v_1}^c \\ \hline \underline{d}_{v_2}^c \end{bmatrix},$$

$$x_I^h = (0.403 \times 300 + 0.0081 \times 300^2)\sqrt{0.85} = 783.57,$$

$$x_I^c = (0.403 \times 50 + 0.0081 \times 50^2)\sqrt{0.8} = 36.14.$$

利用物料平衡关系模型(1)可算得

$$f_{v_1 v_2}^h = 4,\ f_{v_2 v_1}^c = 16.$$

用上述结果及(2)、(3)、(4)式得

$$\tilde{\underline{D}}_o^h = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},\quad \tilde{\underline{D}}_v^h = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\underline{D}}_o^c = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \tilde{\underline{D}}_v^c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}.$$

由热量平衡式(5)得

$$\begin{bmatrix} 3134.4 - 4{}^{o}x_{v_1}^{h} - 16{}^{o}x_{v_1}^{c} + 16{}^{o}x_{v_2}^{c} \\ 578.24 + 4{}^{o}x_{v_1}^{h} - 4{}^{o}x_{v_2}^{h} - 16{}^{o}x_{v_2}^{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

由(7)、(9)、(11)得

$${}^{i}\underline{t}_{v}^{h} = \begin{bmatrix} {}^{i}t_{v_1}^{h} \\ {}^{i}t_{v_2}^{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ {}^{o}t_{v_2}^{h} \end{bmatrix}, \quad {}^{i}\underline{t}_{v}^{c} = \begin{bmatrix} {}^{i}t_{v_1}^{c} \\ {}^{i}t_{v_2}^{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{o}t_{v_2}^{c} \\ 50 \end{bmatrix}.$$

由传热平衡(10)得

$$\begin{bmatrix} (300 - {}^{o}t_{v_1}^{c} - {}^{o}t_{v_1}^{h} + {}^{o}t_{v_2}^{c})/\ln[(300 - {}^{o}t_{v_1}^{c})/({}^{o}t_{v_1}^{h} - {}^{o}t_{v_2}^{c})] \\ ({}^{o}t_{v_2}^{h} - {}^{o}t_{v_2}^{c} - {}^{o}t_{v_2}^{h} + 50)/\ln[({}^{o}t_{v_2}^{h} - {}^{o}t_{v_2}^{c})/({}^{o}t_{v_2}^{c} - 50)] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3134.4 - 4[0.403{}^{o}t_{v_1}^{h} + 0.0081\,({}^{o}t_{v_1}^{h})^2]\sqrt{0.85} \\ [4[0.403{}^{o}t_{v_1}^{h} + 0.0081({}^{o}t_{v_1}^{h})^2] - 4(0.403{}^{o}t_{v_2}^{h} + 0.0081({}^{o}t_{v_2}^{h})^2]\sqrt{0.85} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

联立(12)、(13)式，求该非线性方程组得

$${}^{o}\underline{t}_{v}^{h} = \begin{bmatrix} {}^{o}t_{v_1}^{h} \\ {}^{o}t_{v_2}^{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \end{bmatrix}({}^{\circ}c), \qquad {}^{o}\underline{t}_{v}^{c} = \begin{bmatrix} {}^{o}t_{v_1}^{c} \\ {}^{o}t_{v_2}^{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 143 \\ 96 \end{bmatrix}({}^{\circ}c).$$

由(6)、(8)、(11)式得

$$t_{o}^{h} = {}^{o}t_{v_2}^{h} = 100({}^{\circ}c), \quad t_{o}^{c} = {}^{o}t_{v_1}^{c} = 143({}^{\circ}c).$$

至此，求出了所有的网络参数.

2. 实际应用

由算例可见，在给定了网络的结构和一部分输入流工艺数据后，即可利用一般结构模型求出网络的其它参数，故该模型可用于任意结构换热网络的仿真. 目前已经利用该模型开发了一套任意结构换热网络的仿真程序系统，国内某炼油厂的一个五十多台换热器构成的工程网络的实际应用表明了该模型和程序系统的可靠性及正确性.

此外，基于本文的模型，文献[3]推出了一套任意结构换热网络的大系统递阶优化算法和一种"后向关联协调"的网络优化方法. 目前已经设计了这两种算法的优化程序系统，只须输入系统结构矩阵和必要的工艺参数，即能对网络进行优化.

参 考 文 献

[1] G. 格隆，过程系统工程，上册(中译本)，化学工业出版社，1983.
[2] 卢开澄，图论及其应用，清华大学出版社，1981.
[3] 王建，潘日芳，蒋慰孙，一般结构换热网络的两种优化方法——目标协调及后向关联协调法，华东化工学院学报，1986 年，第 12 期(增刊)，第 71—81 页.

MODELLING OF HEAT EXCHANGER NETWORK WITH ARBITRARY STRUCTURE

Wang Jian　Pan Rifang　Jiang Weisun

(Research Centre of Automatic Control East China Institute of Chemical Technology)

Abstract

Having defined the element product operation of matrix and the network parameter state matrix, and developed their operation rules, on the base of heat and mass balance of heat exchanger, the model of heat exchanger network with arbitrary structure is deduced. Meanwhile, a new modelling approach is presented.