

# 非线性系统的自适应推广的 Kalman 滤波

邓自立 王建国

(黑龙江省计算机应用开发研究中心) (湖北大学)

## 摘 要

本文提出了未知噪声统计的非线性系统中新的自适应推广的 Kalman 滤波算法。作者提出了用虚拟时变噪声统计<sup>[1,2]</sup>, 补偿线性化模型误差的新思想。

在本文中, 作者指出了文献[3]中, 用 Sage 和 Husa 的常值噪声统计估值器来估计虚拟噪声是不合理的。另外, 即使原非线性系统的噪声统计是零均值的, 但线性化的模型的噪声统计一般是非零均值的。两个数值模拟例子说明了本文方法的有效性。

## 一、引 言

对于非线性系统的状态估计问题, 人们常用的工具是推广的 Kalman 滤波算法<sup>[4]</sup>, 这种算法要求先验的噪声统计。然而, 实际上它们常常是未知的, 而用错误的噪声统计会产生很大的滤波误差, 甚至使滤波发散<sup>[4]</sup>。迄今, 对于非线性系统的自适应滤波问题, 很少报道<sup>[3,7]</sup>。1974年, Sharma 和 Mahalanbis<sup>[3]</sup> 曾考虑过特殊的非线性系统的自适应滤波问题, 他们用 Sage 和 Husa<sup>[5]</sup> 的常值噪声统计估值器来估计未知虚拟噪声。作者在此指出: 即使原非线性系统的噪声是常的, 但线性化的系统的虚拟噪声统计应该是时变的。因而, 文献[3]用 Sage 和 Husa<sup>[5]</sup> 的常值噪声统计估值器来估计虚拟噪声是不合理的。另外, 即使原非线性系统的噪声统计是零均值的, 但线性化的系统的虚拟噪声统计一般是非零均值的, 这些是文献[3]的滤波精度不高的原因所在。

在这篇论文中, 作者提出了用虚拟时变噪声<sup>[1,2,6]</sup>统计补偿线性化模型误差的新思想。对于带未知噪声统计的非线性系统, 作者导出了新的自适应推广的 Kalman 滤波算法。

本文提出的算法比 Sharma 和 Mahalanbis<sup>[3]</sup> 的算法更合理, 应用更广泛, 并能有效地克服滤波发散, 因而适用性较强。模拟例子说明了本文方法的有效性以及本文方法在时变参数系统辨识问题中的应用。

## 二、问题的提出和解决

考虑下列离散时间非线性系统:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_k, k) + \mathbf{w}_k, \quad (1)$$

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1}, k+1) + \mathbf{v}_{k+1}. \quad (2)$$

这里,  $\mathbf{x}_k$  是  $n$  维状态向量,  $\boldsymbol{\phi}$  是  $n$  维可微向量函数;  $\mathbf{z}_k$  是  $m$  维观测向量,  $\mathbf{h}$  是  $m$  维可微向量函数.  $\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_k$  分别是  $n, m$  维的高斯白噪声, 且它们是彼此独立的.

$$E\mathbf{w}_k = \mathbf{q}, \quad \text{Cov}[\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_j] = Q\delta_{kj}$$

$$E\mathbf{v}_k = \mathbf{r}, \quad \text{Cov}[\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j] = R\delta_{kj}$$

这里,  $E$  是数学期望符号,  $\text{Cov}$  是协方差符号,  $\delta_{kj}$  是 Kronecker 函数.

假设  $\mathbf{q}, Q, \mathbf{r}$  和  $R$  都是未知的. 如果在量测时刻  $k$  以前已经得到状态估值  $\hat{\mathbf{x}}_k$ , 我们把方程(1)中的  $\boldsymbol{\phi}$  围绕  $\hat{\mathbf{x}}_k$  展开成 Taylor 级数:

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_k, k) = \boldsymbol{\phi}(\hat{\mathbf{x}}_k, k) + \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_k} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) + \text{H.O.T.},$$

这里, H. O. T. 代表 Taylor 展式中的所有高阶项, 则(1)式改写成:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_k} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k + \boldsymbol{\xi}_k, \quad (3)$$

$$\text{这里,} \quad \mathbf{u}_k = \boldsymbol{\phi}(\hat{\mathbf{x}}_k, k) - \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_k} \hat{\mathbf{x}}_k, \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\xi}_k = \mathbf{w}_k + \text{H.O.T.}, \quad (5)$$

显然, 即使  $\mathbf{w}_k$  是零均值的, 但  $\boldsymbol{\xi}_k$  一般来说是非零均值的. 根据虚拟噪声补偿技术<sup>[2,6]</sup>,  $\boldsymbol{\xi}_k$  近似为带未知时变噪声统计的白噪声, 称为虚拟状态噪声, 置:

$$E\boldsymbol{\xi}_k = \mathbf{q}_k, \quad \text{Cov}[\boldsymbol{\xi}_k, \boldsymbol{\xi}_j] = Q_k\delta_{kj}.$$

同理, 将  $\mathbf{h}$  在  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}$  处展开, 得到线性化的观测模型:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{y}_{k+1} + \boldsymbol{\eta}_{k+1}, \quad (6)$$

这里,

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}, k+1) - \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}} \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}, \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\eta}_{k+1} = \mathbf{v}_{k+1} + \text{H.O.T.}, \quad (8)$$

这里,  $\boldsymbol{\eta}_{k+1}$  近似为带未知时变噪声统计的白噪声<sup>[2,6]</sup>, 称为虚拟观测噪声, 置:

$$E\boldsymbol{\eta}_{k+1} = \mathbf{r}_{k+1}, \quad \text{Cov}[\boldsymbol{\eta}_{k+1}, \boldsymbol{\eta}_{j+1}] = R_k\delta_{kj},$$

于是, 对非线性系统(1)、(2)的状态估值问题转化为带未知时变噪声统计的线性化系统(3)、(6)的自适应滤波问题. 应用文献[1]的结果, 得到下列自适应推广的 Kalman 滤波方程<sup>[1]</sup>:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} + \mathbf{k}_{k+1} \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}, \quad (9)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} = \boldsymbol{\phi}(\hat{\mathbf{x}}_k, k) + \hat{\mathbf{q}}_k, \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} = \mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}, k+1) - \hat{\mathbf{r}}_k, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{k+1} = & P_{k+1/k} \left( \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}} \right)^T \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}} \right) \right. \\ & \left. \times P_{k+1/k} \left( \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}} \right)^T + \hat{R}_k \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (12)$$



$$P_{k+1/k} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{x}_k} \right) P_k \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{x}_k} \right)^T + \hat{Q}_k, \quad (13)$$

$$P_{k+1} = \left[ I - \mathbf{k}_{k+1} \left( \frac{\partial h}{\partial \hat{x}_{k+1/k}} \right) \right] P_{k+1/k}. \quad (14)$$

时变噪声统计估计器为<sup>[1]</sup>:

$$\hat{q}_{k+1} = (1 - d_k) \hat{q}_k + d_k [\hat{x}_{k+1} - \phi(\hat{x}_k, k)], \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{k+1} = & (1 - d_k) \hat{Q}_k + d_k \left[ \mathbf{k}_{k+1} \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}^T \mathbf{k}_{k+1}^T \right. \\ & \left. + P_{k+1} - \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{x}_k} \right) P_k \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{x}_k} \right)^T \right], \end{aligned} \quad (16)$$

$$\hat{r}_{k+1} = (1 - d_k) \hat{r}_k + d_k [\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{h}(\hat{x}_{k+1/k}, k + 1)], \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \hat{R}_{k+1} = & (1 - d_k) \hat{R}_k + d_k \left[ \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}^T \right. \\ & \left. - \left( \frac{\partial h}{\partial \hat{x}_{k+1/k}} \right) P_{k+1/k} \left( \frac{\partial h}{\partial \hat{x}_{k+1/k}} \right)^T \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

这里,

$$d_k = \frac{(1 - b)}{(1 - b^{k+1})}, \quad 0 < b < 1,$$

$b$  称为遗忘因子,  $T$  为转置符号.

初值为:  $\hat{x}_0 = \mathbf{x}^0$ ,  $P_0 = P^0$ ,  $\hat{q}_0 = \mathbf{q}^0$ ,  $\hat{Q}_0 = Q^0$ ,  $\hat{r}_0 = \mathbf{r}^0$ ,  $\hat{R}_0 = R^0$ .

只要适当选取初值和遗忘因子, 进行自适应推广的 Kalman 滤波, 即得到非线性系统的状态估值.

### 三、模拟例子

为了说明本文方法的有效性, 这里分别对一阶系统和二阶系统作了数字仿真. 第一个例子把文献[3]的方法和本文提出的方法作了比较, 第二个例子说明本文方法在时变参数系统辨识问题中的应用.

#### 例 1. 考虑纯量非线性系统

$$x_k = 0.3x_{k-1}^2 + \omega_{k-1}, \quad x_0 = 0, \quad (19)$$

$$z_k = 2\sin(0.1k + x_k) + v_k. \quad (20)$$

这里,  $\omega_k$  是均值  $q$  为 0.1, 方差  $Q$  为 0.16 的高斯白噪声, 且  $\omega_k$  和  $v_k$  彼此独立. 假设噪声统计未知.

情形 I: 文献[3]的方法, 取  $r = 0$ , 用 Sage 和 Husa 的常值噪声统计估值器估计  $q, Q$  和  $R$ . 这里选取初值:

$\hat{x}_0 = 0$ ,  $P_0 = 100$ ,  $\hat{q}_0 = 0.01$ ,  $\hat{Q}_0 = 0.002$ ,  $\hat{R}_0 = 0.001$ , 进行自适应推广的 Kalman 滤波.

情形 II: 本文提出的方法, 选取初值  $\hat{x}_0 = 0$ ,  $P_0 = 100$ ,  $\hat{q}_0 = 0.01$ ,  $\hat{Q}_0 = 0.002$ ,  $\hat{r}_0 = 0$ ,  $\hat{R}_0 = 0.001$ , 遗忘因子  $b = 0.98$ , 用新的自适应推广的 Kalman 滤波算法. 图 1 显示了模拟结果(真实状态值和滤波状态值). 如图所示, 本文的滤波算法能有效地估计系统的状态.

情形 III: 次优推广滤波方法, 对真实系统(19)、(20)而言, 假如用错误的噪声统计信息,  $q = 0.5$ ,  $Q = 0.6$ ,  $r = 0$ ,  $R = 0.2$ , 取初值  $\hat{x}_0 = 0$ ,  $P_0 = 100$ , 直接进行次优推广的 Kalman 滤波.

比较上述三种情形累积的滤波误差平方和, 由图 2 可以看出, 用本文提出的算法比用文献[3]提出的算法产生的累积滤波误差小, 从而滤波精度提高. 而情形 III 假设错误的

噪声统计信息得到的次优推广滤波的误差比自适应滤波的误差大得多,如图 2 所示.

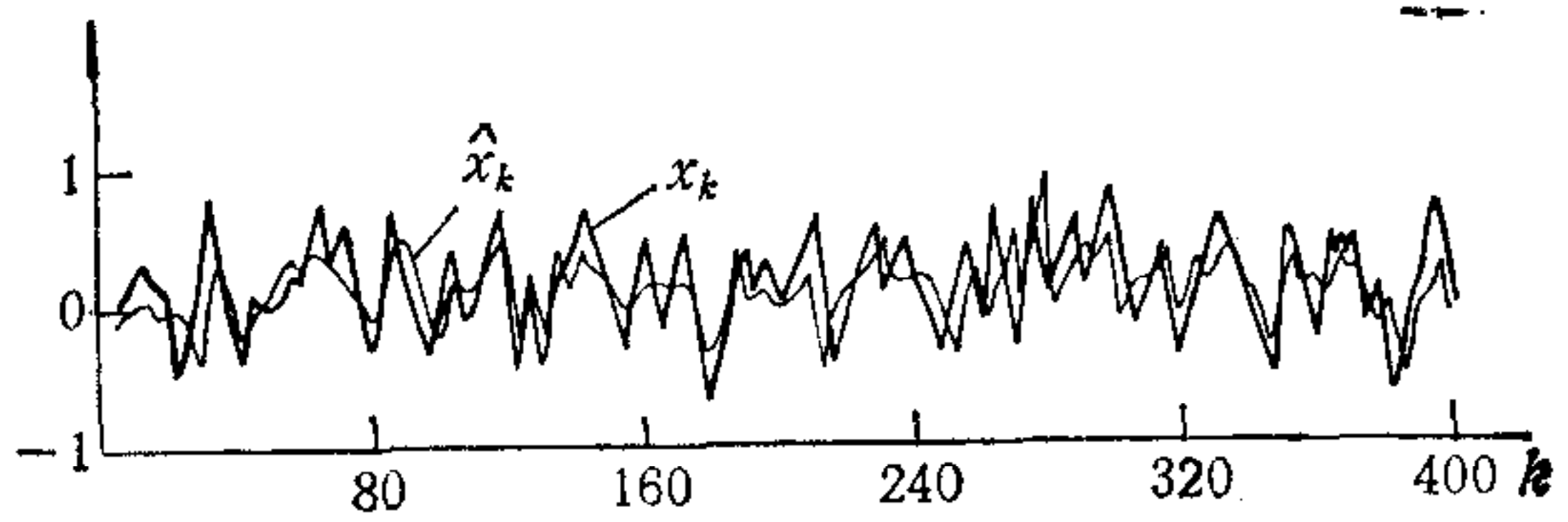


图 1 状态的真值和作者提出的算法的滤波估值

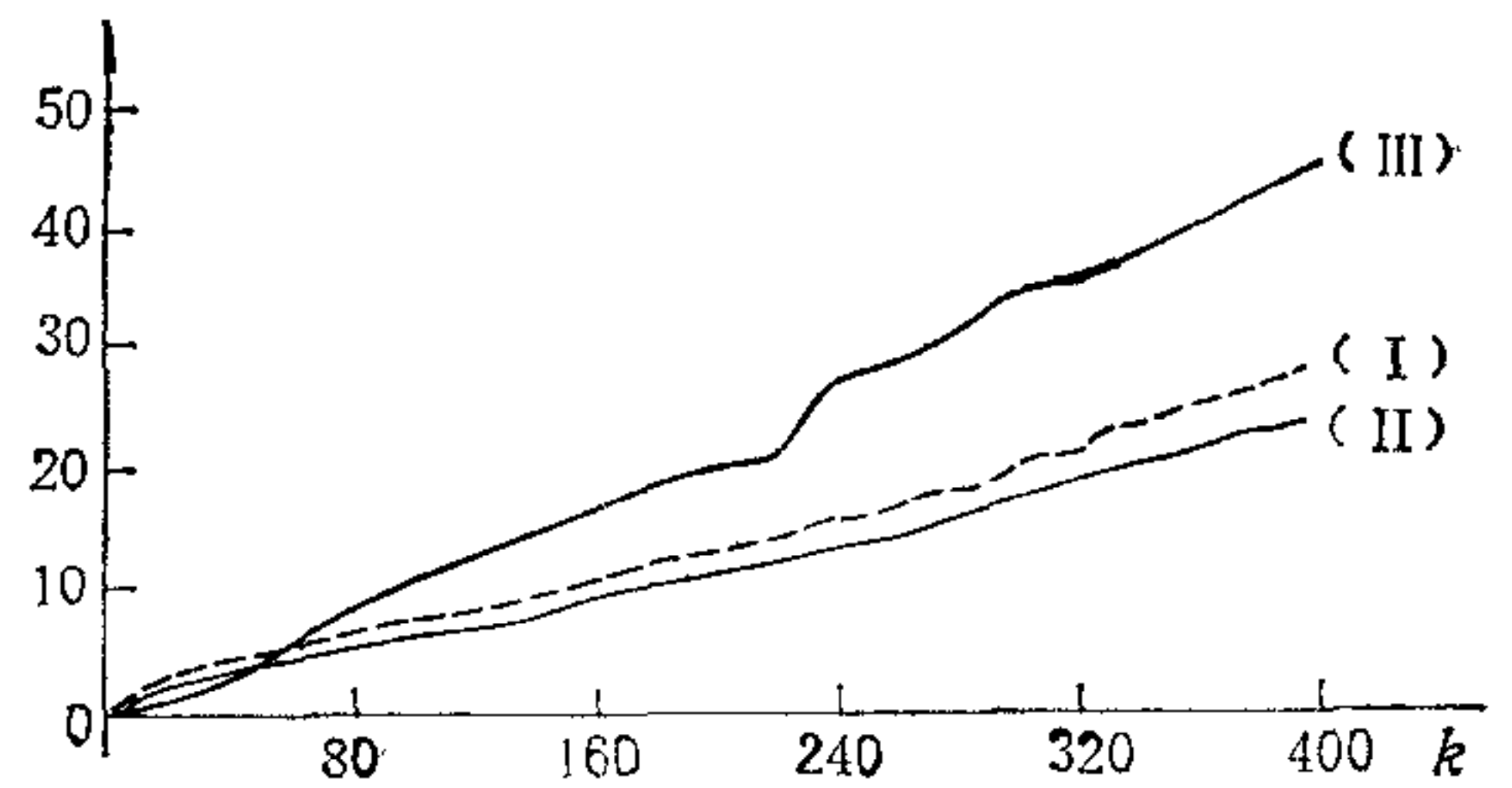


图 2 三种情形累积的滤波误差平方和的比较  
(I)——文献[3]的方法;(II)——本文提出的方法;(III)——次优推广的滤波方法.

下面给出一个例子说明本文提出的方法在时变系统辨识问题中的应用.

**例 2.** 考虑下列线性时变参数系统:

$$y(k+1) = a(k)y(k) + v(k), y(0) = 0, \quad (21)$$

$$a(k+1) = \beta a(k) + w(k), a(0) = 0. \quad (22)$$

这里,  $\beta$  是未知(常值)的,  $\beta = 0.6$ ;  $v(k)$  是均值为 0.01, 方差为 0.09 的高斯白噪声;  $w(k)$  是均值为 0, 方差为 0.09 的高斯白噪声. 我们置:

$$\theta(k) = \begin{bmatrix} a(k) \\ \beta(k) \end{bmatrix}, \quad \beta(k+1) = \beta(k),$$

则(21),(22)式可改写为

$$\begin{aligned} \theta(k+1) &= \begin{bmatrix} \beta(k) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \theta(k) + \begin{bmatrix} w(k) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \phi(\theta(k), k) + \bar{w}(k), \end{aligned} \quad (23)$$

$$y(k+1) = (y(k), 0)\theta(k) + v(k), \quad (24)$$

亦即:

$$\begin{cases} \theta(k+1) = \phi(\theta(k), k) + \bar{w}(k), & (25) \\ z(k) = h(k)\theta(k) + v(k). & (26) \end{cases}$$

这样, 我们把线性时变参数系统(21)、(22)的参数辨识问题转化为二阶非线性系统(25)、(26)的自适应滤波问题. 特别应用本文提出的算法, 取遗忘因子  $b = 0.96$ ,  $a(0) = 0$ ,  $\hat{\beta}(0) = 0$ ,  $P(0) = 30I$  ( $I$  是  $2 \times 2$  单位矩阵),  $q(0) = 0.001$ ,  $\hat{Q}(0) = 0.01$ , 模拟结果显示在图 3 中. 如图 3 所示, 系统的未知参数  $\beta$  的辨识结果是令人满意的.

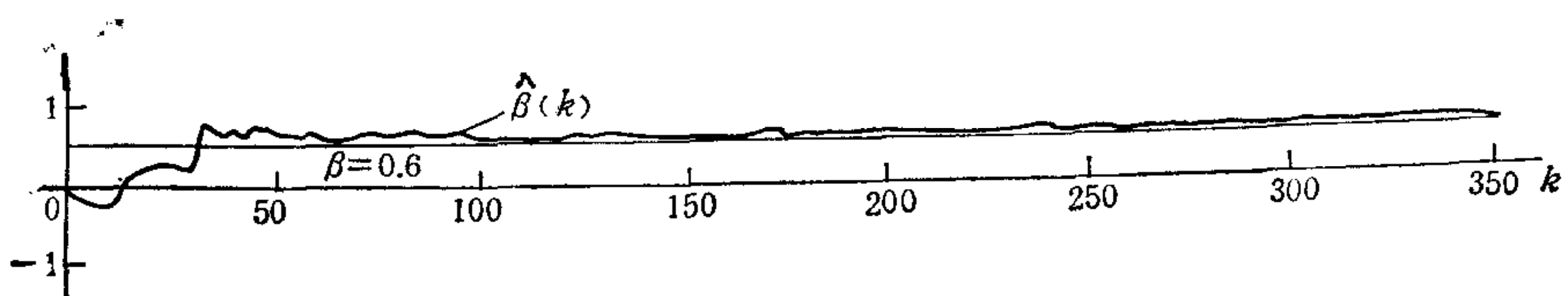


图 3 系统的真实参数和估值参数值

## 参 考 文 献

- [1] 邓自立, 郭一新, 油田产油量、产水量动态预报, 自动化学报, 9(1983), 121—126.
- [2] 邓自立, 郭一新, 参数和状态估计的两段互耦自适应 Kalman 滤波算法, 控制理论与应用, 1(1984), 85—91.
- [3] Sharma, K. L. S., A. K. Mahalanbis, Modelling and Prediction of the Daily Maximum Temperature, *IEEE Trans. Syst. Man. Cyber.*, SMC-4(1974).
- [4] Anderson, B. D. O., J. B. Moore, Optimal Filtering, Prentice-Hall, Inc., 1979.
- [5] Sage, A. P., G. W. Husa, Adaptive Filtering with Unknown Prior Statistics, Proc. Autom. Control Conferences, 1969, 760—769.
- [6] Yoshimura, T., T. Soeda, A Technique for Compensating the Filter Performance by A Fictitious Noise, Trans. of the ASME. Series G. Journal of Dynamic System, Measurement and Control, 100(1978).

## ADAPTIVE EXTENDED KALMAN FILTERING FOR NONLINEAR SYSTEMS

DENG ZILI

(Heilongjiang Applied Research Centre of Computer)

WANG JIANGUO

(Hubei University)

### ABSTRACT

A new adaptive extended Kalman filtering algorithm is given for nonlinear systems with unknown noise statistics. A new approach of compensating linearized model errors by the fictitious time-varying noise statistics<sup>[1,2]</sup> is proposed.

In this paper, the authors point out that it is not suitable in reference<sup>[3]</sup> to estimate the fictitious noise by using Sage and Husa's constant noise estimators. In addition, though noises of the linearized systems are not generally zero-mean noises. Two simulation examples are given to show the usefulness of the authors' approach.