第13卷 第5期 自动化学报 Vol.13, No.5
1987年9月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sept., 1987

微分对策中的有限时间局部捕捉区1)

张嗣瀛 吴汉生
（东北工学院）

摘 要

本文继续用文献[1,2]中"有限时间局部捕捉区"的概念，分析"双目标微分对策"（或角色二重性）问题，并得到下列新结果：较文献[1,2]更详尽地分析了奇异曲面，分别对于左、右两半目标集得到更为完整的局部捕捉区；得出在捕捉区及"危险区"内控制（$\bar{u}$, $\bar{v}$）的划分区域；由局部捕捉区可确定任意点处的"捕捉时间"；找出"互相格杀"的区域；讨论了参数变化的影响.

由这些结果可以看出，用"有限时间局部捕捉区"的概念，解这类问题是有效的，亦可能用来解其它有关问题.

一、前 言

在已有的定性微分对策理论中，当用"界栅"划分"捕捉区"和"躲避区"时，必须考虑全部状态空间. 但这样做对某些实际问题是不恰当的. 例如在空战中，只是当两机间的距离在一定范围内时才有意义. 又如有的飞行器，燃料有一定限制，从而飞行时间及距离也有一定限制.

另外，对于有些问题，界栅可能发生"中断"现象，这时整个状态空间都是捕捉区[4]. 但是，在实际问题中，对于状态空间中的不同区域，捕捉的难易程度和捕捉时间却有所不同，这两者又是需要加以考虑的.

总之，对于某些问题不必考虑全部状态空间，而需考虑时间. 针对此点，我们提出捕捉区与捕捉时间相结合的"有限时间局部捕捉区"的概念，来代替考虑全部状态空间.

所谓"有限时间局部捕捉区"，是据界栅、"时间最优"轨线以及奇异曲面所画出的一种"等时域"，并记为 T_i-区域（对应于某一时间 T_i）. 当被追一方位于此区域内时，则将在 T_i 秒内被捕捉(被控制到目标集). 用这种区域，可更细致、更具体地分析追躲问题，且可使问题简化.

在原有的微分对策理论中，"追"，"躲"两方的地位都是固定的. 但有些问题，例如空战，追躲两方的角色可以互易，追者可变为躲者，或者相反. 这类问题称为"角色二重性"

本文于1985年3月27日收到.
1）中国科学院科学基金资助的课题. 本文的部分内容曾在"北京系统与控制国际学术讨论会"(1984年5月)上宣读.

问题，又称“双目标对策”，这是因为每一方都有一个目标集（火力区），各方都力图将对方控制到自已的目标集中去．

解这类问题需要提出新方法，近年来已有一些研究工作[6,7,8,9,10]．文献[1,2]提出应用有限时间局部捕捉区的概念，并考虑两种相对运动．设有 A，B 两方，先考虑 B 对 A 的相对运动，找出局部捕捉区（T_i- 区）；再考虑 A 对 B 的相对运动，又找出被捕捉过程的“危险区”（即“被捕捉区”），记为 T'_i-区．有了这两种区域，对双目标对策问题即可得出解答：若 B 位于 A 的 T_i-区，则 B 将在 T_i 秒内被 A 捕捉；若 B 位于 A 的 T'_i-区，则 A 将在 T'_i 秒内被 B 捕捉．

本文将继续用上述概念和方法，对双目标对策问题做进一步的分析讨论，并得到摘要中所列出的一些新结果．

二、界栅、奇异曲面、$(\bar{u}, \bar{v})$ 的划分区域

1. 模型

设 A，B 两机，在平面上进行空战，B 对 A 的相对运动方程为[1,2,4]：

$$\dot{x} = V_2 \sin\theta - \frac{V_1}{R_1} u y,$$

$$\dot{y} = V_2 \cos\theta + \frac{V_1}{R_1} u x - V_1, \tag{2.1}$$

$$\dot{\theta} = \frac{V_2}{R_2} v - \frac{V_1}{R_1} u, \quad -1 \leqslant u \leqslant 1, \quad -1 \leqslant v \leqslant 1. \tag{2.2}$$

其中

V_1 为 A 的速度，常数；R_1 为 A 的最小转弯半径；V_2 为 B 的速度，常数；R_2 为 B 的最小转弯半径；u 为 A 的控制，可自 -1 变到 $+1$，对应于转弯半径自 $-R_1$ 变到 $+R_1$；v 为 B 的控制，性质同上；θ 为 A 与 B 飞行方向间的夹角．

目标集为扇形，是飞机的火力区，为以下各集之交．

$$\begin{aligned} &\phi_1(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 \leqslant 0, \quad \phi_2(x, y) = x - by \leqslant 0, \\ &\phi_3(x, y) = -(x + by) \leqslant 0, \quad \phi_4(x, y) = -y + c \leqslant 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

其中，r，b，c 是些常数．又记“s”为一半扇形所对的角度．

今先取右半扇面作为目标集．这里将对策的“结束”定义为，B 位于扇形的弧上，且在对策结束的 t_1 时，相对速度为

$$\dot{x}(t_1) = 0. \tag{2.4}$$

亦即 B 被捕捉时，B 相对于 A 的飞行方向指向 A 的正前方．这对于 A 是一个攻击良机．条件(2.4)对应于某一值 $\theta(t_1)$．

$\dot{x}(t_1)$ 和 $\theta(t_1)$ 还可取其它值．我们所寻求的解可认为是从对应于一切可能的 $\theta(t_1)$ 的解中挑选出来的一个．这样，目标集中就不含 $\theta(t_1)$，使问题简化．

2. 界栅

对于式(2.1)，可写出 Hamilton 函数、伴随方程及其边界条件，并据定性极值原理确

定与界栅相对应的最优控制 $(\bar{u}, \bar{v})$，然后倒转时间，求出 x, y, θ 的解的表达式. 这些做法与文献[1,2]相同,这里不再赘述.

取与文献 [1,2] 不同的另一组数据:

$$\begin{aligned} &V_1 = 500\ \mathrm{m/s}, \quad R_1 = 25000\ \mathrm{m}, \quad V_2 = 350\ \mathrm{m/s}, \\ &R_2 = 14000\ \mathrm{m}, \quad S = 5^0, \quad r = 800\ \mathrm{m}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

并求出与界栅相对应的最优控制 $(\bar{u}, \bar{v})$

$$\bar{u} = +1, \qquad \bar{v} = +1, \tag{2.6}$$

且 $\bar{u}$ 保持 $+1$ 直到 $\tau = 158$ 秒, $\bar{v}$ 保持 $+1$ 直到 $\tau = 129.3$ 秒. 在以上条件下，倒转时间方程的边界条件将为

$$\begin{aligned} &x^0 = 67.7246\ \mathrm{m}, \quad y^0 = 796.9558\ \mathrm{m}, \\ &\theta^0 = 0.04555\ \mathrm{rad}. \quad \lambda_1^0 = -1, \\ &\lambda_2^0 = 0, \quad \lambda_3^0 = 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

这样即可在计算机上据解的表达式[1,2]算出界栅的数据，然后画出界栅 (图 2.1 中的 β). 更确切地说,这是 x, y, θ 三维空间中的界栅在 x-y 平面上的投影. 但这也正是飞机的实际平面运动的曲线. 下面对于奇异曲面(线)及其它最优轨线也都这样做，投影到 x-y 平面后,再找出等时域.

3. 奇异曲面

可以证明,对右半扇面有两个奇异曲面.

1) v-泛曲面 (v-universal surface, v-US),

此曲面发生在

$$S = \theta^0 = 0.04555\ \mathrm{rad}$$

处,并由下式确定

$$\frac{\partial H}{\partial v} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial v}\right) = 0. \tag{2.8}$$

这导致

$$\lambda_3(\tau) = 0, \qquad \mathring{\lambda}_3(\tau) = 0.$$

在此曲面上的控制 $\check{v}$ 由下式确定

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial v}\right) = 0,$$

并将给出

$$\check{v} = 0. \tag{2.9}$$

此控制的最优性可由“推广的凸性条件”[5]验证

$$(-1)^K \frac{\partial}{\partial v}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{2K}\left(\frac{\partial H}{\partial v}\right)\right] \geqslant 0, \quad K = 0, 1, 2, \cdots. \tag{2.10}$$

在本问题中,对于 $k = 1$, 有

$$(-1)\frac{\partial}{\partial v}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^2\left(\frac{\partial H}{\partial v}\right)\right] = (-1)\cdot\frac{V_2^3}{R_2^2}[\lambda_1\sin\theta + \lambda_2\cos\theta] = \frac{V_2^3}{R_2^2}2r > 0, \tag{2.11}$$

故满足条件 (2.10).

在 v-泛曲面上，有如下的控制

$$\bar{u} = +1, \qquad \check{v} = 0, \tag{2.12}$$

且可求出奇异曲面的表达式为

$$\begin{aligned}
x(\tau) &= x^0 \cos\frac{V_1}{R_1}\bar{u}\tau + y^0 \sin\frac{V_1}{R_1}\bar{u}\tau + \frac{R_1}{\bar{u}}\left(1 - \cos\frac{V_1}{R_1}\bar{u}\tau\right) \\
&\quad - V_2\tau \sin\left(\theta^0 + \frac{V_1}{R_1}\bar{u}\tau\right), \\
y(\tau) &= y^0 \cos\frac{V_1}{R_1}\bar{u}\tau - x^0 \sin\frac{V_1}{R_1}\bar{u}\tau + \frac{R_1}{\bar{u}}\sin\frac{V_1}{R_1}\bar{u}\tau \\
&\quad - V_2\tau \cos\left(\theta^0 + \frac{V_1}{R_1}\bar{u}\tau\right), \\
\theta(\tau) &= \theta^0 + \frac{V_1}{R_1}\bar{u}\tau.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

2) u-泛曲面 (u-US).

类似地，存在一 u-泛曲面，它发生在

$$x^0 = 0, \quad y^0 = 800, \quad s = 0^0.$$

在此曲面上

$$\check{u} = 0, \qquad \bar{v} = -1. \tag{2.14}$$

$\check{u} = 0$ 的最优性，可据

$$(-1)^k \frac{\partial}{\partial u}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{2k}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)\right] \leqslant 0, \quad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{2.15}$$

验证。与奇异曲面相对应的解可将 $\check{u} = 0$ 代入运动方程并由简单的积分得到.

有了这两条泛曲线(面)，又可自此曲面上的点出发，确定出"时间最优"的控制($\bar{u}$,$\bar{v}$)，倒转时间，算出流向奇异曲面的最优轨线(支线)。

界栅、奇异曲面，及所有到达目标集弧上的最优轨线如图 2.1 所示，计算数据从略.

4. ($\bar{u}$, $\bar{v}$) 的划分区域

根据以上的分析计算结果，可画出在局部捕捉区中 ($\bar{u}$, $\bar{v}$) 取不同值的区域，如图 2.2 所示。这样，就确定了在局部捕捉区的不同区域中的控制规律.

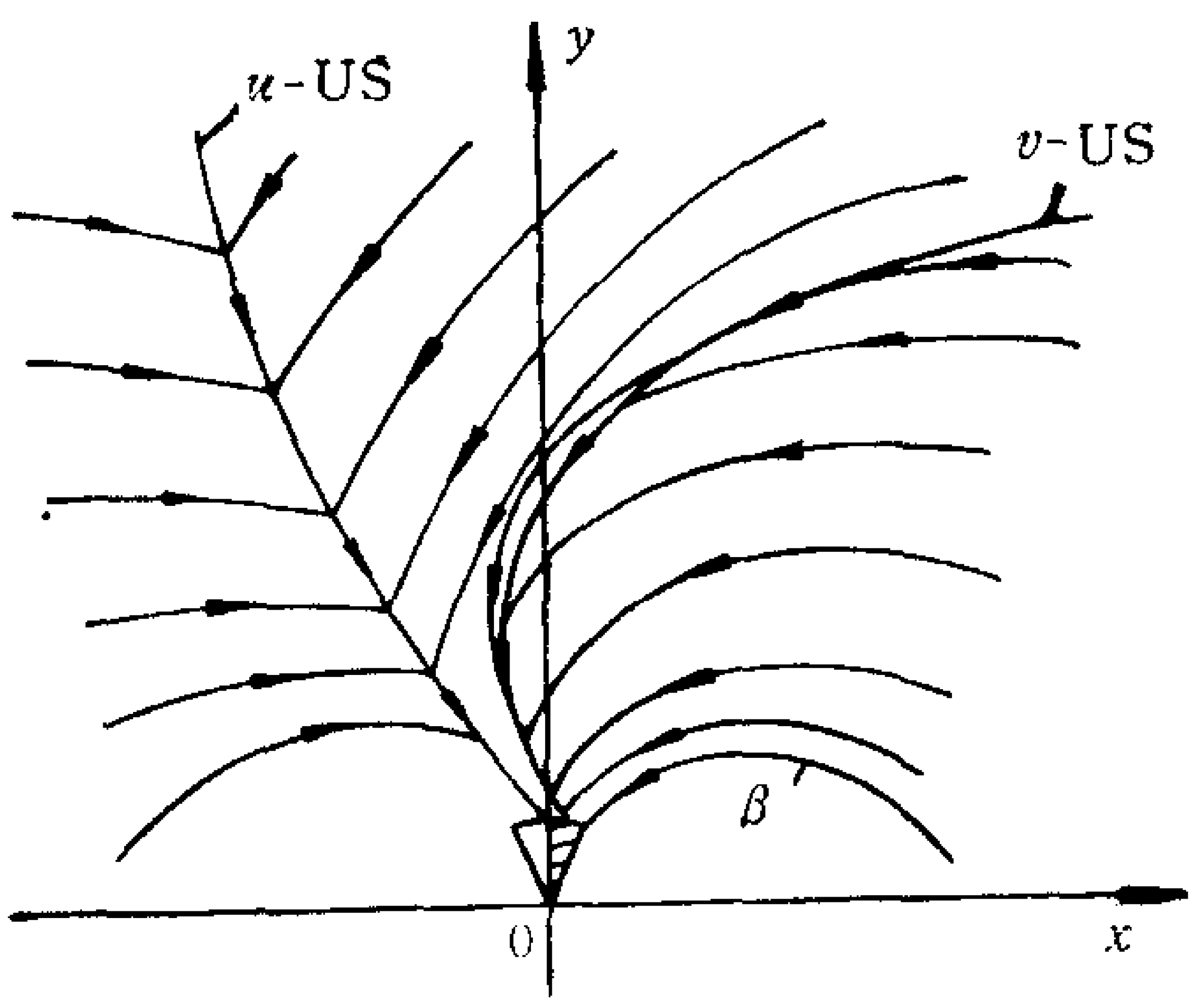

图 2.1

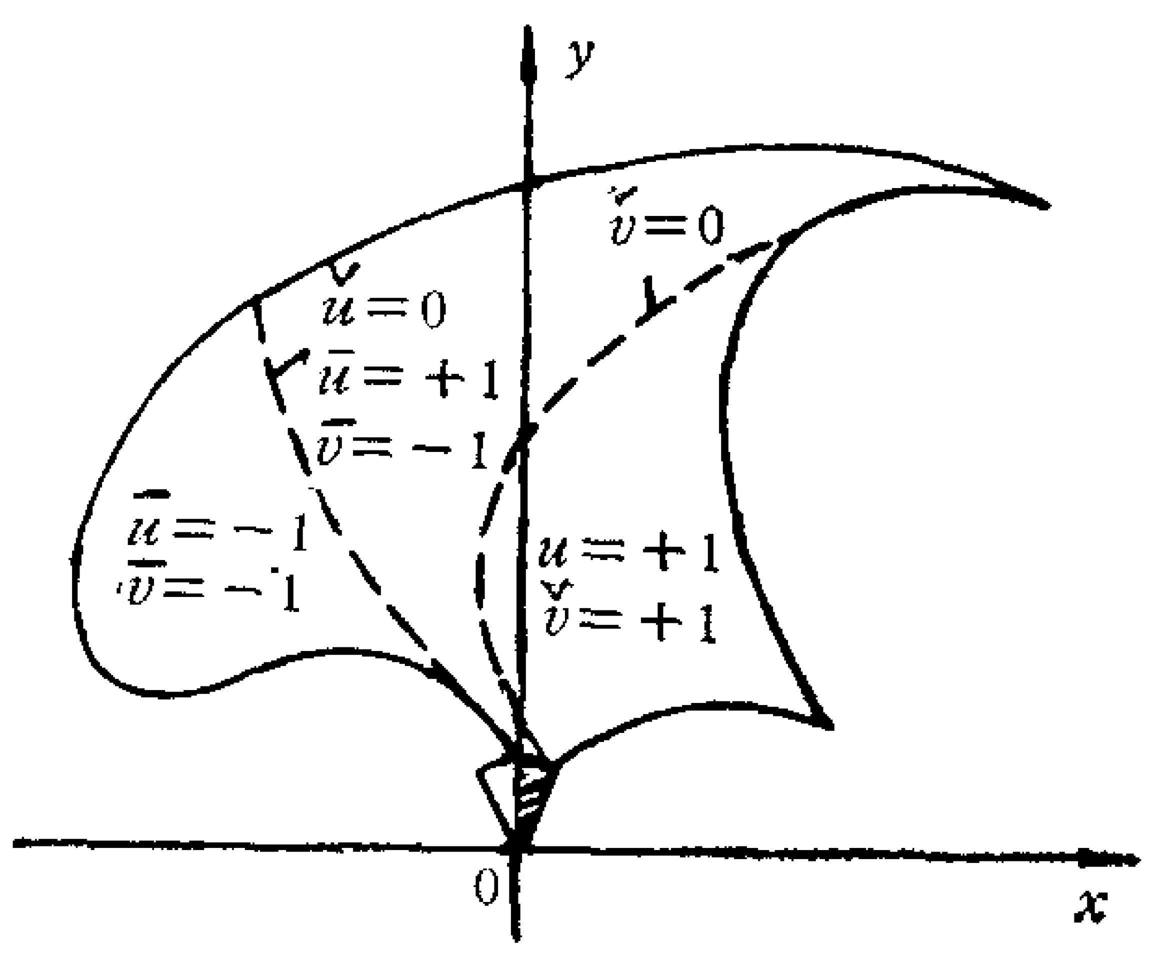

图 2.2

三、有限时间局部捕捉区、危险区、捕捉时间、互相格杀区、参数变化的影响

1. 有限时间局部捕捉区和危险区

据轨线分布图、x, y, θ 的数据及 A 对 B 相对运动的坐标变换[1,2]:

$$x' = -x\cos\theta + y\sin\theta,$$
$$y' = -x\sin\theta - y\cos\theta,$$
$$\theta' = -\theta.$$

可得到这两个区域的图形(图 3.1).

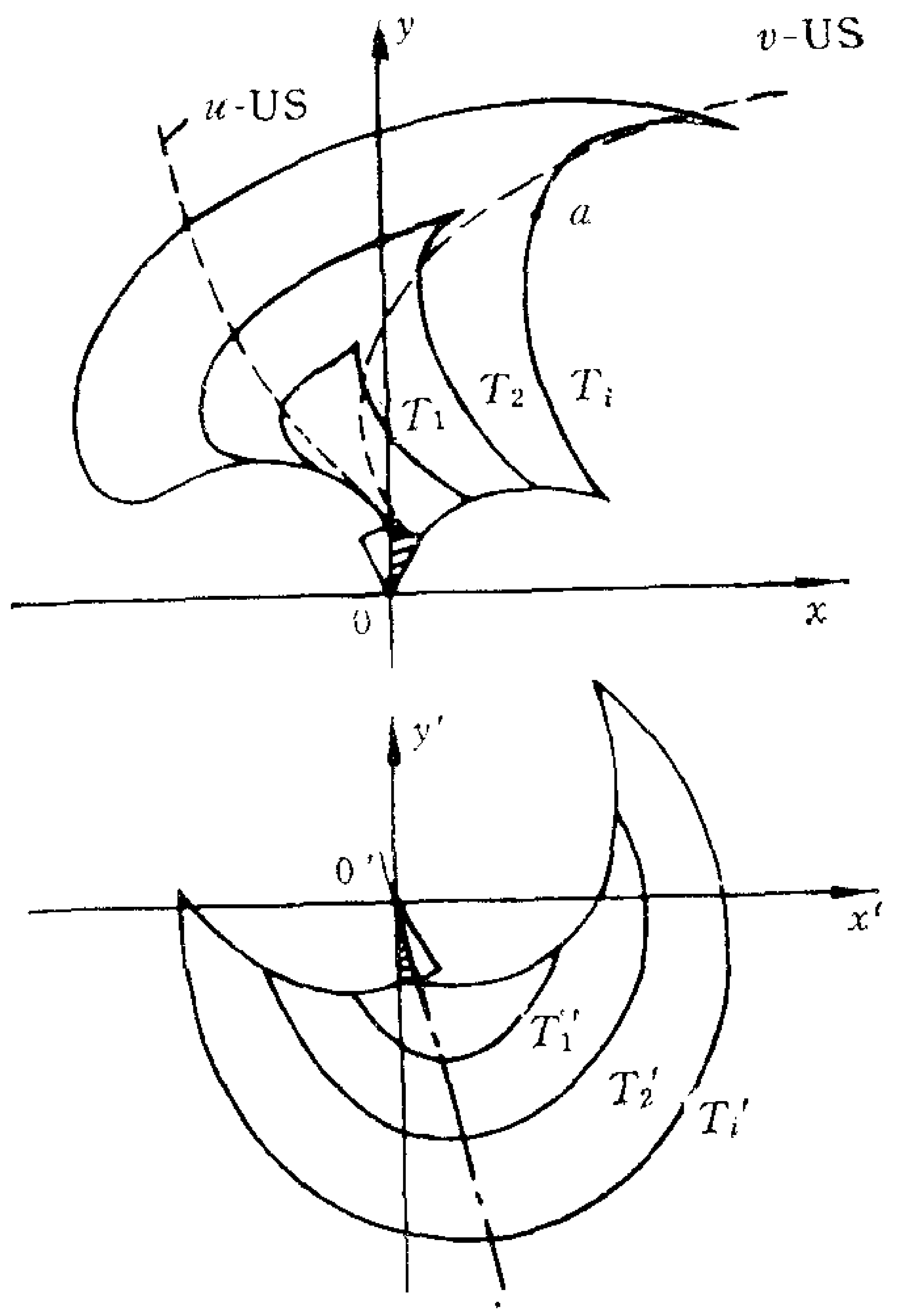

图 3.1

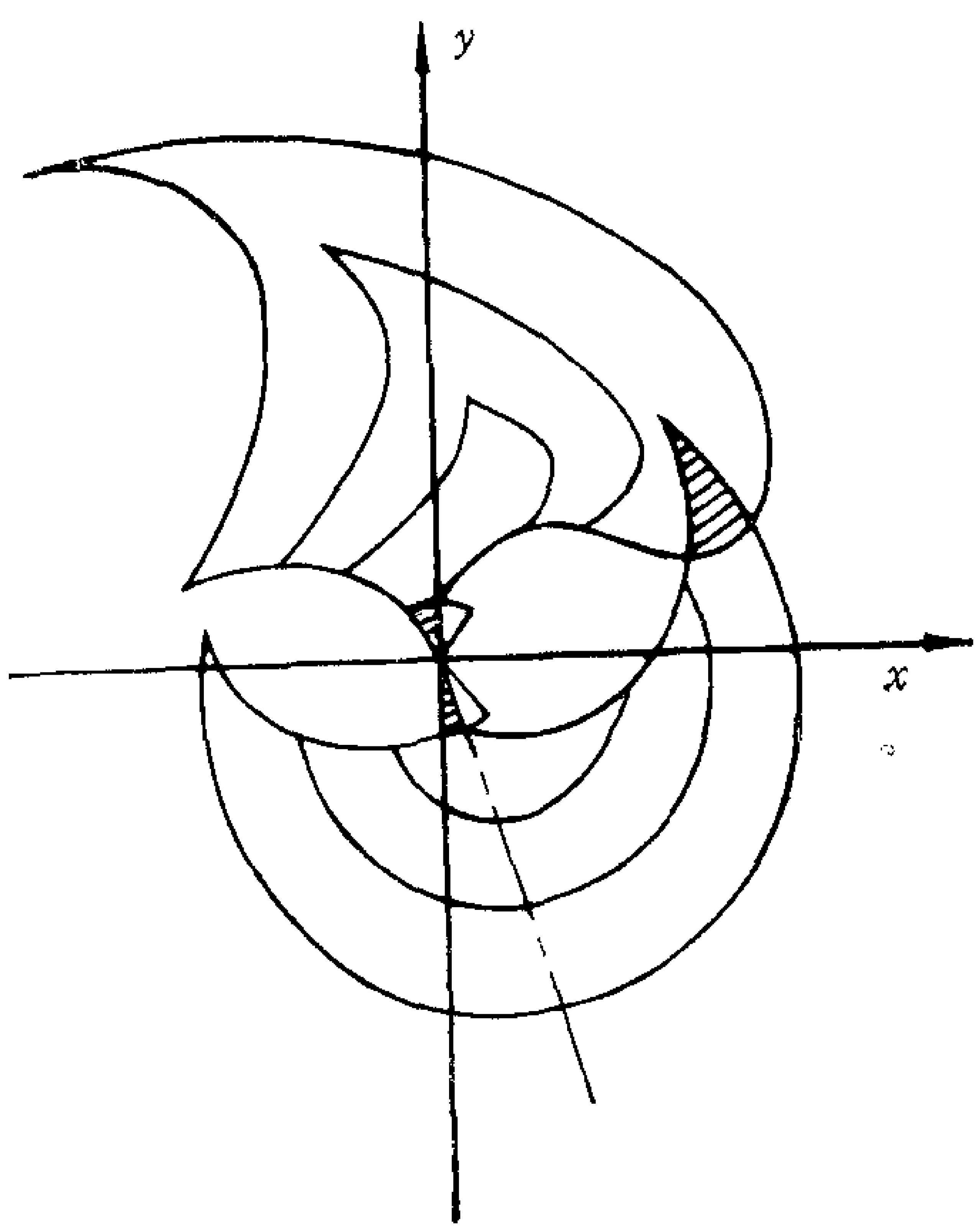

图 3.2

对于左半扇面的目标集,将有完全对称的结果. 对于整个扇形目标集,只需将这两部分区域合在一起.

注意到上述图形是轨线 x, y, θ 在 x-y 平面上的投影,因此,在投影面上, 对于左、右两半目标集的轨线可能相交,但实际上在三维空间中并非相交,因它们具有不同的 $\theta(\tau)$ 的值.

2. 捕捉时间

有了局部捕捉区,则不论飞机位于任何位置,捕捉时间均可立即定出. 例如, 当位于某一 T_i-捕捉区的边界上时(图 3.1 的点 a),捕捉时间就是 T_i^*秒.

3. 相互格杀区

T_i-区和 T_i'-区可以相交,如图 3.2 中的阴影部分. 如果一方位于此阴影区中, 则有

两种可能：或被对方捕捉；或将对方捕捉．这取决于当时的有关参数（如所对应的 $\theta(\tau)$ 的值）及双方所使用的策略．这种现象，称为“互相格杀”．图中的阴影区称为“互相格杀区”．

4. 参数变化的影响

此问题在文 [1,2] 中已做过一些讨论．

今取如下一组数据：

$$V_1 = 500\ \mathrm{m/s},\quad V_2 = 250\ \mathrm{m/s},$$
$$R_1 = 25000\mathrm{m},\quad R_2 = 17000\mathrm{m},\quad (3.1)$$
$$s = 5^0,\quad r = 800\mathrm{m}.$$

并于计算后画出 T_i-区和 T'_i-区，对于从 30s 到 60s 的 T_i-区，如图 3.3 所示．

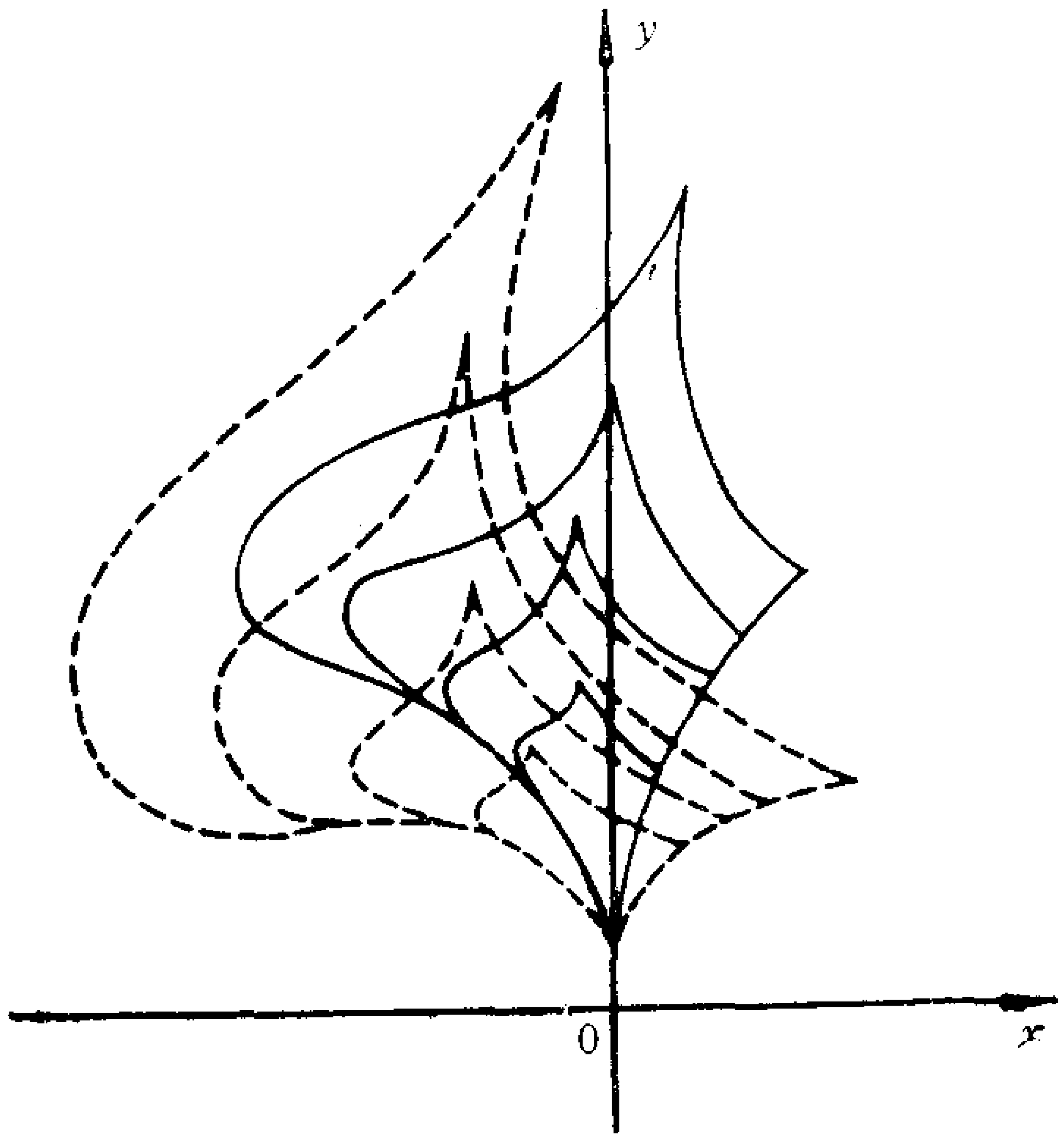

图 3.3

图中的虚线，是对应于数据 (2.5) 的 T_i-区．从图中可以看出，两组数据比较，由于式 (3.1) 中 A 方在速度上有更大优势，故其正前方的捕捉区范围更大．对于(2.5)式，B 方在转弯的灵活性上占优势，故他可向左右两侧的后方做更多的迂迴，这样，T_i-区与 T'_i-区相交的可能性及相交区域的面积就更大，从而更可能出现“相互格杀”的局面．

还可讨论 $\theta(t_1)$ 的变化对于捕捉区的影响．

四、结　语

（1）文[1]中对于右半扇面目标集计算局部捕捉区时，只考虑了右半状态平面．这里考虑了在时间 T_i 内一切可能控制到右半目标集的区域，同时还分析了两种奇异曲面，因而得到更为完整的解．

（2）由捕捉区和危险区的形状可以看出：捕捉区在前方左右两侧，危险区在后方左右两侧，且均随时间的增大而扩展．“相互格杀区”发生在左右偏后两侧．这些情况，都和实际经验相符合．

（3）用局部捕捉区的概念，对于问题可做更细致、更具体的分析．例如捕捉区随时间的变化、随参数的变化、捕捉时间的确定、在捕捉区的不同区域内控制规律 $(\bar{u}, \bar{v})$ 的确定、互相格杀区域的分析等．这与分析全部状态空间相比较(如文 [6—10])，有更多的优点．

（4）由以上可见，我们在文[1,2]中提出的概念和方法，对于解决问题是有效的．

（5）事实上，“有限时间局部捕捉区”的概念是一个一般的概念，它不仅限于解这里的双目标微分对策问题，可以期望，它还可能被用来解其它有关问题．

参　考　文　献

[1] Zhang Siying, Wu Hansheng, Wang Jingcai, An Approach to Solve the Role Ambiguity Problem in Aerial

Combat. Paper on 9th IFAC World Congress, Budapest. Preprints, V(1984), 160—165 .
[2] 张嗣瀛，空战格斗中的两个区域，自动化学报，第7卷，第3期，1981.
[3] Zhang Siying A new Approach of Solving Qualitative Differential Games and Determining the Boundary of Controllable Region. Paper on 8th IFAC World Congress, Preprints, IX(1981), 128—133.
[4] Isaacs R., Differential Games, John Wiley and Sons, 1965.
[5] Bryson, A. E., Ho. Y. C., Applied Optimal Control,Hemisphere Publishing Corporation, 1975.
[6] Olsder, G. J., Breakwell, J. V., Role Determination in Aerial Dogfight. *International Journal of Game Theory*, 3(1974).
[7] Peng, W. Y., Vincent, T. L., Some Aspects of Aerial Conbat. *AIAA Journal*, 13(1975), No. 1.
[8] Getz, W. M., Leitmann, G., Qualitative Differential Games with Two Targets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 68(1979).
[9] Getz, W. M., Pachter, M., Two-target Pursuit-evasion Differential Games in the Plane. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 34(1981), No. 3.
[10] Getz, W. M., Pachter, M., Capturability in a Two Target Game of Two Cars. *AIAA Journal of Guidance and Control*, 4(1981).

THE PARTIAL CAPTURE REGION ON FINITE TIME INTERVAL IN DIFFERENTIAL GAMES

ZHANG SIYING, WU HANSHENG
(Northeast Institute of Technology)

ABSTRACT

In this paper, as a subsequent work of [1, 2], the idea of "partial capture region on finite time interval" and the method in [1, 2] are used to solve the two-target differential game (or role ambiguity problem). The following new results are obtained. the singular surfaces are analysed in more details than that in [2] and the partial capture regions are constructed more completely for the right and left half target set; both the capture and "danger" regions are divided into several subregions for different $(\bar{u}, \bar{v})$; for any state the "time to go" can be determined by the partial capture regions; the region of "simultaneous kill" is obtained; the effects of altering parameters are discussed.

These results show that our method is effective, and it can be used to solve some other relevant problems.