第13卷 第5期 自 动 化 学 报 Vol.13, No. 5
1987 年 9 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sept., 1987

二次型性能函数对反馈系数阵灵敏度的计算及其在部分状态反馈次优控制设计中的应用

孙 增 圻
（清 华 大 学）

摘 要

本文给出了连续系统中计算二次型性能函数对反馈系数阵的一阶和二阶灵敏度的全套公式．它们可用于选择部分重要的状态反馈及部分状态反馈次优控制的梯度法寻优计算．

一、引 言

全部状态反馈的最优控制具有很好的性质． 但是一般说来，不可能也不必要直接测量全部状态，尤其对于高阶系统更是如此．因此通常的方法是构造状态观测器或估计器，但它具有结构复杂和使系统维数增高的缺点．另一方法是直接反馈那些可以测量的状态而构成部分状态反馈（或称输出反馈）的次最优控制． 它具有结构简单和容易实现的优点． 解决该问题的关键有两个：一是如何选择用于反馈的部分状态；二是如何计算部分状态反馈的次最优控制规律． 很多文献［1—5］讨论了部分状态反馈次优控制的设计问题，其中文献[5]讨论了离散系统的情况，本文给出连续系统的相应结果．

二、二次型性能函数灵敏度的计算

给定连续系统的模型为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u},\ x(0)\text{给定}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{u} = -L\boldsymbol{x}, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{x} \in R^n$, $\boldsymbol{u} \in R^m$．设系统的性能可由如下的二次型函数来表示：

$$J = \int_0^\infty (\boldsymbol{x}^T Q_1 \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T Q_2 \boldsymbol{u})\, dt, \tag{3}$$

并假定：(1)闭环系统是渐近稳定的，即 $(A - BL)$ 的特征值均在左半平面；(2) Q_1 和 Q_2 均为对称非负定阵． 利用如下三个定理可以推导出性能指标函数 J 对反馈系数阵的一阶和二阶灵敏度．

本文于 1985 年 4 月 10 日收到．

定理一[1]. 如果 $f(X)$ 是 $r\times n$ 矩阵 X 的标量函数，且当 $\varepsilon\to 0$ 时有

$$f(X+\varepsilon\Delta X)-f(X)=\varepsilon tr[M\Delta X], \tag{4}$$

其中 M 是 $n\times r$ 矩阵，则

$$df(X)/dX=M^T. \tag{5}$$

定理二[6]. 矩阵指数 $e^{(X+\varepsilon Y)t}$ 可以展开成如下的无穷级数形式:

$$e^{(X+\varepsilon Y)t}=e^{Xt}+\varepsilon\int_0^t e^{X(t-\tau)}Ye^{X\tau}d\tau+\cdots. \tag{6}$$

定理三[5] 设 $\boldsymbol{x}$ 为 $1\times r$ 维行向量，$f(\boldsymbol{x})$ 是 $n\times 1$ 维列向量函数，如果当 $\varepsilon\to 0$ 时有

$$f(\boldsymbol{x}+\varepsilon\Delta\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})=\varepsilon M\Delta\boldsymbol{x}^T, \tag{7}$$

其中 M 是 $n\times r$ 矩阵，则

$$df(\boldsymbol{x})/d\boldsymbol{x}=M. \tag{8}$$

利用以上三个定理，可以推得计算 J、$\partial J/\partial L$ 及 $\partial^2 J/\partial L^2$ 的公式如下:

$$J=x^T(0)Sx(0), \tag{9}$$

$$\partial J/\partial L=2V^TR, \tag{10}$$

$$\partial^2 J/\partial L_i\partial L_j=2\{R(Q_2)_{ij}-[M^{ij}R+R(M^{ji})^T]\}, \tag{11}$$

$$i,\ j=1,2,\cdots,m.$$

当 L 为使 J 最小的最优反馈控制规律时，得

$$\partial J/\partial L=0,\ \partial^2 J/\partial\hat{L}^2=2Q\otimes R. \tag{12}$$

上列各式中，L_i 表示 L 的第 i 行向量，$\hat{L}=[L_1L_2\cdots L_m]$ 是 $1\times mn$ 的行向量.

三、部分状态反馈的选择

利用台劳级数展开，J 的增量可表示为

$$\Delta J=J(L+\Delta L)-J(L)=\frac{\partial J}{\partial\hat{L}}\Delta\hat{L}+\frac{1}{2}\Delta\hat{L}\frac{\partial^2 J}{\partial\hat{L}^2}\Delta\hat{L}^T+\cdots. \tag{13}$$

若 L 是最优反馈控制规律，忽略高次项，并去掉第 i 个状态反馈，则上式变为

$$\Delta J_i\approx\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 J}{\partial L_{ki}\partial L_{ji}}L_{ki}L_{ji},\ i=1,\cdots,n, \tag{14}$$

显然 ΔJ_i 越大，相应的状态反馈便越重要，从而可根据 ΔJ_i 的相对大小来选择重要的状态反馈.

四、次最优控制规律的计算

设控制对象的状态方程仍如式(1)所示，并设 $y=Cx$ 是用于反馈的部分状态，其维数为 r，控制器为部分状态的线性反馈，即 $u=-L_0y$. 设系统的性能函数仍如式(3)所示，要求计算 L_0 以使 J 极小. 下面给出一个二阶梯度法寻优计算 L_0 的算法步骤.

(1) 给定初值 L_0^0. L_0^0 的选择须使得闭环系统是渐近稳定的，且尽量靠近最优值. 一般情况可选 $L_0^0 = LC^T$，其中 L 是全状态反馈最优控制律；

(2) 置 $k = 0$;

(3) 计算 $L_k = L_0^k C$;

(4) 计算 $\partial J/\partial L_k$ 和 $\partial^2 J/\partial \hat{L}_k^2$;

(5) 计算 $\partial J/\partial L_0^k = (\partial J/\partial L_k) C^T$，并进一步组成一阶梯度向量 $\partial J/\partial \hat{L}_0^k$，$\hat{L}_0^k$ 表示由 L_0^k 的各行向量依次串接而成的 $1 \times mr$ 行向量.

(6) 计算 $\partial^2 J/\partial(\hat{L}_0^k)^2 = \hat{C}(\partial^2 J/\partial \hat{L}_k^2)\hat{C}^T$，其中

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} C & & 0 \\ & C & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & C \end{bmatrix}. \tag{15}$$

(7) 如果 $\|\partial J/\partial L_0^k\| < \varepsilon$，转(10),否则转(8);

(8) 计算 $\hat{L}_0^{k+1} = \hat{L}_0^k - \alpha_k(\partial J/\partial \hat{L}_0^k)[\partial^2 J/\partial(\hat{L}_0^k)^2]^{-1}$，首先取 $\alpha_k = 1$. 若 $J_{k+1} > J_k$，则将 α_k 减半,直至 $J_{k+1} < J_k$;

(9) 根据 $\hat{L}_0^{k+1}$ 组成 L_0^{k+1}，置 $k + 1 \rightarrow k$，转(3);

(10) 输出 $L_0 = L_0^k$.

五、结　束　语

根据前面给出的公式看出，部分状态反馈次优控制规律取决于初始条件的设定，初始条件反映了系统受到干扰而偏离平衡位置的状态. 因此初始条件需根据系统所受到的实际干扰的情况来合理的设定. 在有些情况下，若对于初始条件的设定无任何先验知识，可假定系统各状态的初始条件均匀地分布于几维空间的超单位球面上[1]，即选取 $R_0 = Ex(0)x^T(0) = I$. 这只是一个权宜的方法，对于特定的初始条件，它往往并不能给出满意的设计结果.

参　考　文　献

[1] Levine W. S., and Athans, M., On the Determination of the Optimal Constant Output-feedback Gains for Linear Multivariable Systems, *IEEE Trans. Autom. Control,* **AC-15**, 44—48, 1970.

[2] Kosut, R. L., Suboptimal Control of Linear Time-invariant Systems Subject to Control Structure Constraints, *IEEE Trans. Autom. Control,* **AC-15**, 557—563, 1970.

[3] T. Söderström, On Some Algorithms for Design of Optimal Constrained Regulators, *IEEE Trans. Autom. Control,* **AC-23**, 1100—1101, 1978.

[4] 毛剑琴，线性多变量系统最优定常输出反馈设计的一种算法，控制理论与应用，创刊号，1984.

[5] Sun Zengqi and B. Qvarnström, Computation of Loss Function Derivatives with Respect to Feedback Coefficients And Control System Applications, Preprints of IFAC 9th World Congress, Budapest, Hungary, 1984.

[6] R. Bellman, Introduction to Matrix Analysis, McGraw-Hill, New York, Chap. 10, 171, 1960.

SENSITIVITY COMPUTATION OF QUADRATIC PERFORMANCE AND ITS APPLICATION IN SUBOPTIMAL CONTROL

SUN ZENGQI
(*Tsinghua University*)

ABSTRACT

A set of formulas for the computation of quadratic performance function associating with first and second-order sensitivities of feedback coefficient matrix is given in this paper. It can be used in the gradient approach to select part of the important state feedbacks and to compute part of the state feedbacks of the suboptimal control.

人机系统分析、设计与评价学术会议简报

中国自动化学会人机系统分析、设计与评价第一次学术报告讨论会定于 1988 年 7 月下旬在西安交通大学举行．会议主办单位是：中国自动化学会系统工程专业委员会、模式识别与机器智能专业委员会、计算机应用专业委员会、计算机图形学及辅助设计专业委员会、综合办公室自动化专业委员会、应用委员会；中国系统工程学会；陕西省自动化学会；西安交通大学．

会议目的：推动、交流与讨论人机(相互作用)系统的研究工作，特别着重于人与自动化、人与计算机间的交互作用，包括人机交互作用的分析、交互作用的模拟、人的作用和行为的建模、人机系统的设计和任务分配对工作内容、质量和培训要求的影响、新的交互作用工具(手段)和技术的评估、人机交互作用的开发和设计工具以及工业、交通运输、办公室和公用事业部门的应用和实例研究．

具体负责单位：西安交大系统工程研究所，

论文摘要截止日期：1988 年 1 月 31 日，

论文全文寄交截止日期：1988 年 5 月 20 日，

会议报名参加截止日期：1988 年 6 月 30 日．