第14卷 第1期　　自动化学报　　Vol. 14, No. 1
1988年1月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Jan., 1988

具有最经济信息结构的分散控制系统综合

许晓鸣　席裕庚
（上海交通大学）

摘　　要

本文首先讨论了最经济分散信息结构解的存在性问题，然后给出一个适用于任意反馈结构限制并能确定固定模代数重数的判据．这个判据确定了任意单个反馈元及其组合对移动开环极点的贡献，从而提供了综合最经济分散信息结构所必须的基础信息．在此基础上，作者提出递推型的最经济信息结构综合算法以及在此结构下分散控制系统的设计过程，并以具体算例作了说明．

一、问题的提出

大系统的分散控制问题，近年来受到人们的普遍重视．这种控制的基本思想是：把大系统分解成若干子系统，每个子系统的控制作用只能用其内部信息构成．这种信息结构上的限制意味着反馈阵必须是分块对角阵．

考察具有 ν 个控制站的线性定常多变量系统：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \sum\limits_{i=1}^{\nu} B_i\boldsymbol{u}_i(t), \\ \boldsymbol{y}_i(t) = c_i\boldsymbol{x}(t), \qquad i = 1, \cdots, \nu. \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t) \in R^n$，$\boldsymbol{u}_i(t) \in R^{m_i}$，$\boldsymbol{y}_i(t) \in R^{p_i}$，$\sum\limits_{i=1}^{\nu} m_i = m$，$\sum\limits_{i=1}^{\nu} p_i = p$．

Wang 和 Davison 首先发现在分散控制系统中可能存在不变的模态，并提出了固定多项式和固定模的概念[1]．

定义 1.1. 固定多项式和固定模

记 $\bar{K} = \{K | K = \text{block-diag}\ (K_1, \cdots, K_\nu);\ K_i \in R^{m_i \times p_i}\}$，对于负反馈 $u(t) = -Ky(t)$，$K \in \bar{K}$，定义系统 (C, A, B) 关于 $\bar{K}$ 的固定多项式为 $\phi(\lambda; C, A, B, \bar{K}) \triangleq \underset{K\in\bar{K}}{\gcd}\{\det(\lambda I - A + BKC)\}$；系统 (C, A, B) 关于 $\bar{K}$ 的固定模集合为 $\Lambda(C, A, B; \bar{K}) \triangleq \bigcap\limits_{K\in\bar{K}} \sigma(A - BKC)$，其中 $\gcd(\cdot)$ 为最大公因子，$\sigma(\cdot)$ 为谱集合，$B = [B_1 \cdots B_\nu]$，$C^T = [C_1^T \cdots C_\nu^T]$．

对于固定模的计算和特征研究，Wang, Davison, Corfmat 和 Anderson 等已获得不

本文于1985年11月15日收到．

少出色的成果[1-3]. 由于固定模的存在,实际系统有时不能采用全分散的控制方法，而允许在一部分子系统之间交换信息,这就涉及到信息通讯的成本问题. 因此,确定一个反馈信息结构,使它既能保证反馈补偿后系统特性令人满意,又有最低的通讯成本，显然是一个具有重大理论意义和实用价值的问题.

为了便于研究,本文作两点约定: (1) 用结构矩阵来表征集合 $\bar{K}$, $\bar{K}$ 的元素为 "0" 表示不能反馈,为"×"表示允许反馈; (2) 对 $\bar{K}$ 的结构限制是任意的,不一定为分块对角形式.

定义 1.2. 满意系统和满意信息结构

对于给定的线性定常系统， 如果系统的所有极点都位于事先认定是满意的区域 Σ_s 中,则称该系统为满意系统. 如果反馈结构阵 $\bar{K}$ 使固定模集合 $\Lambda(C, A, B; \bar{K})\subset\Sigma_s$, 则称 $\bar{K}$ 代表的信息结构是满意的.

我们把所有满足 $\Lambda(C, A, B; \bar{K})\subset\Sigma_s$ 的结构阵 $\bar{K}$ 的集合记作 $\mathscr{K}_s$, 即 $\mathscr{K}_s=\{\bar{K}|\Lambda(C, A, B; \bar{K})\subset\Sigma_s\}$. 对于每一个 $\bar{K}$ 阵,总存在一个成本矩阵 $P(\bar{K})$ 与之对应,其元素为

$$p_{ij}=\begin{cases} y_i \text{ 与 } u_i \text{ 之间的通讯成本}, & \text{当 } \bar{k}_{ij}=\text{“×”}, \\ 0, & \text{当 } \bar{k}_{ij}=\text{“0”}. \end{cases} \tag{1.2}$$

若记 $\varepsilon=[1\cdots1]^T$, 则 $J(\bar{K})=\varepsilon^TP(\bar{K})\varepsilon$ 就是整个信息结构 $\bar{K}$ 的成本.

问题 1.1. 分散控制系统的最经济信息结构的确定,可以描述为

求 $\bar{K}_{\min}\in\mathscr{K}_s$, 使 $J(\bar{K}_{\min})\leqslant J(\bar{K})$, $\forall\bar{K}\in\mathscr{K}_s$.

由于不可控或不可观的模态是与 $\bar{K}$ 阵无关的固定模,故为叙述简明起见，不妨假定 (C, A, B) 是可控可观的. 在这种情况下，当 $\bar{K}$ 的元素均为"×"时必可得到满意解，又注意到 $\mathscr{K}_s$ 是一个元素个数不超过 $2^{m\times p}$ 的有限集,因此有:

命题 1.1. 最经济信息结构的存在性

如果系统 (C, A, B) 可控可观,则问题 1.1 的解 $\bar{K}_{\min}$ 存在.

在一般情况下,问题 1.1 的解并不唯一.

二、非零反馈元对移动开环极点的贡献

要解决问题 1.1，至少需要下列两方面的信息:

(1) $\bar{k}_{ij}$ 单独作用时对于移动开环极点的贡献(简称"贡献");

(2) $\bar{k}_{ij}$ 与其它非零元联合作用时的贡献.

这是研究固定模生成机理及确定最经济信息结构必不可少的. 为了获得这些基本信息，首先导出一个适用于任意反馈结构限制的固定模判据.

记 $X\begin{pmatrix}\alpha_1, & \cdots, & \alpha_i\\ \beta_1, & \cdots, & \beta_i\end{pmatrix}$ 为矩阵 X 的第 $\alpha_1,\cdots,\alpha_i$ 行及第 $\beta_1,\cdots,\beta_i$ 列构成的子矩阵; $X_Y(\alpha_1,\cdots,\alpha_i;\beta_1,\cdots,\beta_i)$ 为用矩阵 Y 的第 $\beta_1,\cdots,\beta_i$ 行替换 X 的第 $\alpha_1,\cdots,\alpha_i$ 行所得到的矩阵; $G(s)=C(sI-A)^{-1}B=N(s)D^{-1}(s)$ 为系统 (C, A, B) 的不可简约的右 $\dot{M}FD$ 描述[4].

定义 2.1. 对于 i 阶指标组 $\Omega_i=(\alpha_1,\cdots,\alpha_i;\beta_1,\cdots,\beta_i)$，$1\leqslant i\leqslant m$，其中 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_i\}$、$\{\beta_1,\cdots,\beta_i\}$ 都是 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的子序列. 如果存在某个 $K\in\bar{K}$，使得 $\det K\times\begin{pmatrix}\alpha_1,\cdots,\alpha_i\\ \beta_1,\cdots,\beta_i\end{pmatrix}\neq 0$，则称 Ω_i 对于结构阵 $\bar{K}$ 而言是有效的. 当 $i=0$ 时，规定 $\Omega_0=\Phi$（空集）也是有效的.

定义 2.2. 如果 $\bar{K}$ 的各阶有效指标组分别为 $\Omega_i^j=(\alpha_1^j,\cdots,\alpha_i^j;\beta_1^j,\cdots,\beta_i^j)$，$j=1,\cdots,l_i$，$i=0,\cdots,m$，则 $f_i(\Omega_i^j,s)\triangleq\det D(s)_{N(s)}(\alpha_1^j,\cdots,\alpha_i^j;\beta_1^j,\cdots,\beta_i^j)$ 称为 Ω_i^j 的伴随多项式，其中 l_i 为 $\bar{K}$ 的 i 阶有效指标组的个数.

可以证明[5]：闭环特征多项式与 $f_i(\Omega_i^j,s)$ 之间存在关系：

$$\det(sI-A+BKC)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{l_i}f_i(\Omega_i^j,s)\cdot K(\Omega_i^j). \tag{2.1}$$

其中，当 $i=0$ 时，$l_0=1$，$K(\Omega_0)=1$；当 $1\leqslant i\leqslant m$ 时，$K(\Omega_i^j)$是K中取第 $\alpha_1^j,\cdots,\alpha_i^j$ 行和第 $\beta_1^j,\cdots,\beta_i^j$ 列所构成的子矩阵的行列式.

定理 2.1. 任意反馈结构限制下的固定模判据[5]

λ 是系统 (C,A,B) 关于 $\bar{K}$ 的 r 重固定模的充要条件是：

$$\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}f_i(\Omega_i^j,s)\big|_{s=\lambda}=0,\quad j=1,\cdots,l_i,\ i=0,\cdots,m,\ k=1,\cdots,r. \tag{2.2}$$

证明：充分性显然，这里只用反证法证明必要性. 如果 λ 是 r 重固定模，但 (2.2) 式不成立，则必存在一个 k^* 和 $\Omega_{i^*}^{j^*}$. 这里 $1\leqslant k^*\leqslant r$，$0<i^*\leqslant m$，$1\leqslant j\leqslant l_{i^*}$，使得对于所有的 Ω_i^j，$i=0,\cdots,i^*-1,j=1,\cdots,l_i$，有 $\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}f_i(\Omega_i^j,s)\big|_{s=\lambda}=0$，$k=1,\cdots,r$，但 $\frac{d^{k^*-1}}{ds^{k^*-1}}f_{i^*}(\Omega_{i^*}^{j^*},s)\big|_{s=\lambda}\neq 0$. 现取 $\tilde{K}\in\bar{K}$，使 $\tilde{K}(\Omega_{i^*}^{j^*})\neq 0$，而其 $\alpha_1^{j^*},\cdots,\alpha_{i^*}^{j^*}$ 行 $\beta_1^{j^*},\cdots,\beta_{i^*}^{j^*}$ 列以外元素均为 0. 显然当 $j\neq j^*$ 时，$\tilde{K}(\Omega_{i^*}^j)=0$；当 $i>i^*$ 时，$\tilde{K}(\Omega_i^j)=0\ \forall j\in(1,\cdots,l_i)$. 对(2.1)式两边求 k^*-1 阶导数，并将上述 $\tilde{K}$ 代入，则有

$$\begin{aligned}\frac{d^{k^*-1}}{ds^{k^*-1}}\det(sI-A+B\tilde{K}C)\big|_{s=\lambda}&=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{l_i}\frac{d^{k^*-1}}{ds^{k^*-1}}f_i(\Omega_i^j,s)\big|_{s=\lambda}\cdot\tilde{K}(\Omega_i^j)\\&=\frac{d^{k^*-1}}{ds^{k^*-1}}f_{i^*}(\Omega_{i^*}^{j^*},s)\big|_{s=\lambda}\cdot\tilde{K}(\Omega_{i^*}^{j^*})\neq 0.\end{aligned}$$

这与 λ 是 r 重固定模的定义矛盾，定理得证.

在上述定理中取 $r=1$，可导出一般的固定模判据. 它与 Tarokh 的判据[6]在本质上完全一致，但计算更为方便.

根据 (2.1) 式和定理 2.1 的证明过程，不难看出：

(1) $\bar{k}_{ij}$ 单独作用时的贡献(即在 $y_j\to u_i$ 间引入反馈时可移动的开环极点)$=\det\times(sI-A)/\gcd\{\det(sI-A),\det D(s)_{N(s)}(i,j)\}$ 的根；

(2) $\bar{k}_{ij}$ 与其它元素联合时的贡献$=\det(sI-A)/\gcd\{\det(sI-A),f_g(\Omega_g^h,s),\forall i\in(\alpha_1^h,\cdots,\alpha_g^h)$ 且 $j\in(\beta_1^h,\cdots,\beta_g^h)\}$ 的根. 上两式中的分母部分表示了相应反馈结构下的固定多项式.

定理 2.1 给出的判据特别适用于$m \leqslant p$的情况. 在$m \geqslant p$时，不难用左 MFD 描述对偶地导出相应的定义和判据.

三、确定最经济满意信息结构的算法

在推出算法之前，先来作些准备工作.

定义 3.1. $\Pi_i = \{(\alpha_1, \beta_1), \cdots, (\alpha_i, \beta_i)\}$ 称为 i 元指标集，其中 $\alpha_k, \beta_k \in (1, \cdots, m)$，$1 \leqslant k \leqslant i$，且 $\{\alpha_k, 1 \leqslant k \leqslant i\}$ 和 $\{\beta_k, 1 \leqslant k \leqslant i\}$ 中的元素可以重复并排列无序；但当 $s \neq t$ 时，$(\alpha_s, \beta_s) \neq (\alpha_t, \beta_t)$. Π_i 对应的结构矩阵 $\bar{K}\{\Pi_i\}$ 定义为

$$\bar{k}_{qr}\{\Pi_i\} = \begin{cases} \text{“}\times\text{”}, & 当 \ (q, r) \in \Pi_i, \\ \text{“}0\text{”}, & 当 \ (q, r) \bar{\in} \Pi_i. \end{cases}$$

定义 3.2. 对 i 元指标集 $\Pi_i = \{(\alpha_1, \beta_1), \cdots, (\alpha_i, \beta_i)\}$，如果将 $\alpha_1, \cdots, \alpha_i$ 和 $\beta_1, \cdots, \beta_i$ 分别按不减次序排序得到 $\alpha_1^*, \cdots, \alpha_i^*$ 和 $\beta_1^*, \cdots, \beta_i^*$，而 $\Omega_i^* = (\alpha_1^*, \cdots, \alpha_i^*; \beta_1^*, \cdots, \beta_i^*)$ 正好是给定结构矩阵 $\bar{K}$ 的一个 i 阶有效指标组，则称 Π_i 对 $\bar{K}$ 是有效的且与 Ω_i^* 相容.

为了递推计算的需要，现考察通过对 i 元指标集进行并运算生成 $i+1$ 元指标集的情况. 由于任一 $i+1$ 元指标集中包含有 $i+1$ 个互不相同的 i 元指标集，所以若要保证生成后的各 $i+1$ 元指标集也互不相同，必须在 $\{\Pi_i^j, j = 1, \cdots, t_i\}$ 中不重复地选取 $i+1$ 个进行并运算. 显然，对 $i+1$ 个 $\Pi_i^{j_k}$ 进行集合并运算后只能有以下三种结果:

情况 1: $\bigcup\limits_{k=1}^{i+1} \Pi_i^{j_k} = \Pi_{i+1}^j$ 有效且与某个 Ω_{i+1}^* 相容;

情况 2: $\bigcup\limits_{k=1}^{i+1} \Pi_i^{j_k} = \Pi_{i+1}^j$ 无效;

情况 3: $\bigcup\limits_{k=1}^{i+1} \Pi_i^{j_k} = \Pi_l^j, \quad l > i+1.$

定理 3.1. i 元固定多项式 $\eta_i(\Pi_i^j, s) \triangleq \phi(C, A, B, \bar{K}\{\Pi_i^j\})$，其计算可按下列递推公式进行:

$i = 0$ 时，$\eta_0(\Pi_0^1, s) = \det D(s)$;

$i = 1$ 时，$\eta_1(\Pi_1^j, s) = \gcd\{\det D(s), f_1(\Omega_1^j, s)\}, j = 1, \cdots, t_1 = l_1$; $2 \leqslant i \leqslant N$($\bar{K}$ 中非零元数目)时:

$$\eta_i(\Pi_i^j, s) = \begin{cases} \gcd\{\eta_{i-1}(\Pi_{i-1}^{j_k}, s), \ k = 1, \cdots, i; \ f_i(\Omega_i^*, s)\}, & 情况 1, \\ \gcd\{\eta_{i-1}(\Pi_{i-1}^{j_k}, s), \ k = 1, \cdots, i\}, & 情况 2, \end{cases}$$

$$j = 1, \cdots, t_i, \ t_i 为 \ i \ 元指标集的个数.$$

证明: $i = 0$ 时结论显然成立. 当 $i = 1$ 时，因为一元固定多项式还是单个反馈元单独作用的情况，故从第二节的讨论可知结论也成立. 假定当 $i = \rho$ 时结论成立，则当 $i = \rho + 1$ 时，由于每一个 $\rho + 1$ 元指标集 $\Pi_{\rho+1}^j (1 \leqslant j \leqslant t_{\rho+1})$ 中包含了 $\rho + 1$ 个不同的 ρ 元指标集 $\Pi_\rho^{j_1}, \cdots, \Pi_\rho^{j_{\rho+1}}$，且按 $i = \rho$ 时的假定，每一个 $\bar{K}\{\Pi_\rho^{j_k}\}$ $(k = 1, \cdots, \rho + 1)$ 产生固定多项式 $\eta_\rho(\Pi_\rho^{j_k}, s)$，故 $\Pi_\rho^{j_k} (k = 1, \cdots, \rho + 1)$ 共同作用产生的固定多项式为

$\gcd\{\eta_\rho(\Pi_\rho^{ik}, s), k = 1, \cdots, \rho + 1\}$. 此外，当 $\Pi_{\rho+1}^i$ 有效且与某个 $\Omega_{\rho+1}^*$ 相容时，$\bar{K}\{\Pi_{\rho+1}^i\}$ 中包含一个满秩的 $\rho + 1$ 阶方阵，它产生了伴随多项式 $f_{\rho+1}(\Omega_{\rho+1}^*, s)$. 由伴随多项式与闭环特征多项式 (2.1) 式的关系可知这时的固定多项式为 $\eta_{\rho+1}(\Pi_{\rho+1}^i, s) = \gcd\{\eta_\rho(\Pi_\rho^{ik}, s), k = 1, \cdots, \rho + 1, f_{\rho+1}(\Omega_{\rho+1}^*, s)\}$，故结论对于 $i = \rho + 1$ 也成立，定理证毕.

在综合最经济信息结构 $\bar{K}_{\min}$ 之前，首先根据实际系统中是否允许反馈，确定限制最松的结构阵 $\bar{K}_{\max}$，然后根据 (1.2) 式定义相应的成本矩阵 $P(\bar{K}_{\max})$. 对于难以建立的信息通道，可置对应的 p_{ij} 充分大. 这样除非万不得已，否则该通道就不会被选入. 于是得到如下求解最经济信息结构的算法.

算法 3.1. 最经济信息结构的计算

第一步：判断 $\det D(s)$ 满意否，如果是，则令 $\Pi_{\min} = \Phi$, $d = 0$, 算法结束；否则令 d 为充分大的正数，$\bar{K} = \bar{K}_{\max}$, $w = 1$, 确定 $\Pi_1^j, j = 1, \cdots, t_1$.

第二步：判断是否 $d(\Pi_w^j) > d$, $j = 1, \cdots, t_w$. 其中 $d(\Pi_w^j) = J(\bar{K}\{\Pi_w^j\})$. 如果是，则算法结束；否则把使 $d(\Pi_w^j) > d$ 的 Π_w^j 剔除，保留满足 $d(\Pi_w^j) \leqslant d$ 的 Π_w^j, 并记作 Π_w^{jk}, $k = 1, \cdots, t_w^*$, 计算相应的 $\eta_w(\Pi_w^{jk}, s)$.

第三步：判断是否存在满意的 $\eta_w(\Pi_w^{jk}, s)$. 如无，则直接转第四步；否则在对应于满意 $\eta_w(\Pi_w^{jk}, s)$ 的 Π_w^{jk} 中找出一个使 $d(\Pi_w^{jk})$ 最小的 $\Pi_{\min}^{(w)}$, 并令 $\bar{K}_{\min} = \bar{K}\{\Pi_{\min}^{(w)}\}$, $d = d(\Pi_{\min}^{(w)})$.

第四步：$w = w + 1$, 如果 $w > N$, 算法结束；否则确定 $\Omega_w^j, j = 1, \cdots, l$ 及 $\Pi_w^j, j = 1, \cdots, t_w$, 返回第二步.

四、不规则分散信息结构下的可满意性

Wang 和 Davison 已经对分块对角阵 $\bar{K}$ 证明了：特征多项式中的非固定模部分可以通过 $\bar{K}$ 结构限制下的动态反馈，配置在几乎任意的位置，而由算法 3.1 得到的最经济信息结构 $\bar{K}_{\min}$ 却往往是不规则的. 但是容易证明，这时 Wang 和 Davison 的结论仍然成立.

命题 4.1. 考虑系统 (C, A, B)，令 $\bar{K}$ 是不规则的分散信息结构阵，则通过引入在 $\bar{K}$ 结构限制下的动态反馈，使闭环系统满意的充分必要条件是：$\Lambda(C, A, B, \bar{K}) \subset \Sigma_s$.

证明：结构阵 $\bar{K}$ 可以分解为

$$\bar{K} = \sum_{\bar{K}_{ij} \neq 0} e_i \bar{k}_{ij} e_j^T = [e_{i_1} \cdots e_{i_N}] \operatorname{diag}(\bar{k}_{i_1 j_1}, \cdots, \bar{k}_{i_N j_N}) [e_{j_1} \cdots e_{j_N}]^T = W\hat{K}V,$$

其中 e_i 为第 i 元为 1、其余元为零的列向量，$W = [e_{i_1} \cdots e_{i_N}]$, $V = [e_{j_1} \cdots e_{j_N}]^T$, $\hat{K} = \operatorname{diag}(\bar{k}_{i_1 j_1}, \cdots, \bar{k}_{i_N j_N})$.

对系统 (C, A, B) 分别作输入和输出变换，构成新系统 $(\tilde{C}, A, \tilde{B})$，其中 $\tilde{B} = BW$, $\tilde{C} = VC$. 显然，(C, A, B) 在 $\bar{K}$ 下的可满意性等价于 $(\tilde{C}, A, \tilde{B})$ 在 $\hat{K}$ 下的可满意性，故 (C, A, B) 在 $\bar{K}$ 下闭环可满意的充要条件是：$\Lambda(\tilde{C}, A, \tilde{B}, \hat{K}) \subset \Sigma_s$.

由于 $\Lambda(\tilde{C}, A, \tilde{B}, \hat{K}) = \Lambda(C, A, B, \bar{K})$，命题得证.

根据命题 4.1，可以得到最经济满意分散控制系统的整个设计步骤：

(1) 由算法 3.1 确定 $\bar{K}_{\min}$，并将其分解成 $\bar{K}_{\min} = W\hat{K}V$;

(2) 用 Wang 和 Davison 的方法[1]确定使闭环系统满意的 $\widetilde{K}(s)$，其中 $\widetilde{K}(s)$ 为对角阵；

(3) $K(s)=W\widetilde{K}(s)V$ 就是所要求的动态输出反馈阵.

例：给定系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}.$$

取 $\overline{K}_{\max}=\begin{bmatrix}\times&\times\\\times&\times\end{bmatrix}$，$P(\overline{K}_{\max})=\begin{bmatrix}1&100\\100&1\end{bmatrix}$，$\Sigma_s=\boldsymbol{C}^-$，现要求最经济满意反馈结构 $\overline{K}_{\min}$.

解：先写出系统的右矩阵分式描述为

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s-1}&\dfrac{1}{s-2}\\0&\dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&s+1\\0&s-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s-1&0\\0&(s+1)(s-2)\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=N(s)D^{-1}(s).$$

根据定理 3.1，可求得 $\eta_0(\Pi_0^1,s)=\det D(s)=(s-1)(s+1)(s-2)$，不满意.

可能的一元指标集及相应的一元固定多项式为

$\Pi_1^1=(1,1)$，$\Pi_1^2=(1,2)$，$\Pi_1^3=(2,1)$，$\Pi_1^4=(2,2)$，

$\eta_1(\Pi_1^1,s)=(s-2)(s+1)$，$\eta_1(\Pi_1^2,s)=(s-2)(s-1)(s+1)$，

$\eta_1(\Pi_1^3,s)=(s-1)(s+1)$，$\eta_1(\Pi_1^4,s)=(s-1)(s-2)$，均不满意.

可能的二元指标集及相应的二元固定多项式为

$\Pi_2^1=\{(1,1),(1,2)\}$，$\Pi_2^2=\{(1,1),(2,1)\}$，$\Pi_2^3=\{(1,1),(2,2)\}$，

$\Pi_2^4=\{(1,2),(2,1)\}$，$\Pi_2^5=\{(1,2),(2,2)\}$，$\Pi_2^6=\{(2,1),(2,2)\}$，

$\eta_2(\Pi_2^1,s)=(s-2)(s+1)$，$\eta_2(\Pi_2^2,s)=s+1$，$\eta_2(\Pi_2^3,s)=s-2$，

$\eta_2(\Pi_2^4,s)=1$，$\eta_2(\Pi_2^5,s)=(s-1)(s-2)$，$\eta_2(\Pi_2^6,s)=s-1$.

其中 $\eta_2(\Pi_2^2,s)$ 及 $\eta_2(\Pi_2^4,s)$ 是满意的，且 $d(\Pi_2^4)=200>d(\Pi_2^2)=101$，故取 $\Pi_{\min}^{(2)}=\Pi_2^2$，$d=d(\Pi_2^2)=101$.

不难看出,所有的 $d(\Pi_3^k)>d(\Pi_2^2)=101$, $k=1,\cdots,t_3$，故可得 $\Pi_{\min}=\Pi_2^2=\{(1,1),(2,1)\}$，$\overline{K}_{\min}=\begin{bmatrix}\times&0\\\times&0\end{bmatrix}$.

结 束 语

控制理论中的各类最经济问题,长期以来已有不少研究[7-9]. 本文旨在把这种研究引

入到分散大系统中. 算法 3.1 所涉及到的数学原理浅显明白，算法的递推性使其可在数字计算机上实现，但其数值稳定性问题仍有待于解决.

参 考 文 献

[1] Wang, S. H., Davison, E. J., On the Stabilization of Decentralized Control Systems, *IEEE Trans. on AC*, Vol. **AC-18**(1973), No. 5, 473—478.

[2] Corfmat, J. P., Morse, A. S., Decentralized Control of Linear Multivariable Systems, *Automatica*, Vol. **12** (1976), No. 4, 479—495.

[3] Anderson, B. O., Clements, D. J., Algebraic Characterization of Fixed Modes in Decentralized Control. *Automatica*, Vol. **17**(1981), No. 5, 703—712.

[4] Kailath, T., Linear Systems, Prentice-Hall Inc., 1980.

[5] 席裕庚，许晓鸣，固定模的新判据、新算法及其生成机理，第五届全国控制理论及其应用学术交流会论文集，475—479，1985.

[6] Tarokh, M.: Fixed Modes in Multivariable Systems using Constrained Controllers. Automatica, Vol. 21 (1985), No. 4, 495—497.

[7] 涂序彦，可控性、可观性的实用价值与最经济结构的综合问题，全国第一届控制理论及应用交流会论文集，科学出版社，1979.

[8] 陈兆宽，张荣祥，线性控制系统最经济结构的综合问题，自动化学报，第 7 卷 (1981)，171—178.

[9] 刘维，闭环控制系统的最经济结构的综合问题，自动化学报，第 9 卷 (1983)，54—61.

THE SYNTHESIS OF DECENTRALIZED CONTROL SYSTEMS WITH THE MOST ECONOMICAL INFORMATION STRUCTURE

Xu Xiaoming　　Xi Yugeng

(Shanghai Jiaotong University)

Abstract

In this paper, the existence of the solution for the Most Economical Information Structure (MEIS) problem is discussed. A criterion for determining the fixed modes as well as their multiplicities, applicable to arbitrarily restricted feedback structure, is then given. This criterion provides the possibility to evaluate the contributions of all single feedback elements and their combinations to the removing of the open-loop poles and thus furnishes the necessary information for synthesizing the MEIS. On this basis, the authors present a recursive algorithm for synthesizing MEIS and propose the design procedure of decentralized control systems with the MEIS. Finally, a numerical example is given for illustration.