第13卷 第6期 自动化学报 Vol. 13, No. 6
1987年11月 ACTA AUTOMATICA SINICA Nov., 1987

一种新型容错有限状态机的设计研究

王光兴
（东北工学院）

摘要

本文提出了一种新型容错有限状态机的设计方法．它利用通常的纠错码原理和借用最佳接收中的最大似然判决准则与最大后验概率判决准则，使有限状态机的每一状态扩展成“状态束”．只要故障和干扰引起的错误状态不超出“状态束”的范围，有限状态机就不会产生状态转换错误，降低了状态转换错误概率，提高了容错能力．文中举例简述了设计方法．

有限状态机（FSM）是所有数字系统不可缺少的部件，使其具有容错能力，对提高数字系统的可靠性具有重要意义．本文提出一种新型容错 FSM 的设计方法．关于 FSM 的状态转换错误概率的分析在文献[1]中已研究过．下面简述其设计原理．

一、新 FSM 的设计原理

一个 FSM A 可以通过三个矢量空间及两个映射来定义．即

$$A \cong (I, S, O; \delta_0, \omega_0). \tag{1}$$

I 是 l 维输入空间，S 是 k 维状态空间，O 是 m 维输出空间；δ_0 是次态映射，ω_0 是输出映射．它们分别用矢量函数表示如下：

$$\boldsymbol{s}(t+1) = \delta_0[\boldsymbol{i}(t), \boldsymbol{s}(t)], \qquad \boldsymbol{i}(t) \in I; \boldsymbol{s}(t), \boldsymbol{s}(t+1) \in S; \tag{2}$$

$$\boldsymbol{o}(t) = \omega_0[\boldsymbol{i}(t), \boldsymbol{s}(t)], \qquad \boldsymbol{o}(t) \in O. \tag{3}$$

这里 t 是离散时间．

为了使 FSM A 具有容错能力，选一种纠错码对状态矢量进行编码，将 k 维状态空间 S 嵌入到 n 维空间 V 中，使 n 维矢量空间 V 中具有 2^k 个成员的子集 G 与状态空间 S 形成一一对应关系．G 中码元间的最小距离用 d_G 表示．为了简单且不失掉一般性，现将原来 k 维状态空间 S，附加 $(n-k)$ 维来表示 n 维矢量空间 V．即

$$S \xrightarrow{1-1} G \subset V = \overset{k维}{S} \times \overset{n-k维}{P}, \qquad \boldsymbol{s} \to (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{p}),\ \boldsymbol{s} \in S,\ \boldsymbol{p} \in P. \tag{4}$$

同时次态方程也进行如下编码：

$$\boldsymbol{z}(t+1) = \lambda[\boldsymbol{i}(t+1); (\boldsymbol{s}(t), \boldsymbol{p})],$$
$$\boldsymbol{i}(t) \in I,\ \boldsymbol{z}(t+1) \in G;\ \boldsymbol{s}(t) \in S,\ (\boldsymbol{s}(t), \boldsymbol{p}) \in G. \tag{5}$$

因 G 是 n 维空间 V 的子集，则把被编码的次态映射 λ 在空间 V 中扩展．通常把“靠

本文于1985年10月4日收到．

近” G 的每一码元之 V 中的元素集合起来，形成一个代表其相应状态的总体，称其为“状态束”．其相应的 G 中码元称为“状态束”中心．用 Λ 表示这个被扩展的映射．很显然，如果把 V 中的元素按确定的方式集合成“状态束”，表示 G 中码元所对应的状态，映射 Λ 也就被确定了．一般用码元间汉明距离作为“靠近”程度的度量．并提出三种“集束”准则．

1）“定距”集束准则，是一种最直观的集束准则，要求按下式确定被编码的次态映射．

$$\begin{aligned} &\Lambda[\boldsymbol{i}, (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})] = \lambda[\boldsymbol{i}, (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{p})], \\ &D_H[(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}), (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{p})] \leqslant (d_G - 1)/2, \\ &\boldsymbol{\beta} \in S, \boldsymbol{\gamma} \in P; (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{p}) \in G, \boldsymbol{i} \in I. \end{aligned} \tag{6}$$

$D_H[(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}), (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{p})]$ 表示矢量 $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ 和 $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{p})$ 间的汉明距离，上式表明凡与 $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{p}) \in G$ 小于 $(d_G - 1)/2$ 汉明距的 V 中的全部元素都归入以 $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{p}) \in G$ 为中心的状态束．

2）“最小距离”集束准则． 把 V 中的每一元素都并入以与其相距最近的以 G 中码元为“状态束”中心的“状态束”内．其次态映射按下式决定

$$\Lambda[\boldsymbol{i}, (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})] = \Lambda[\boldsymbol{i}, (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{p})] = \lambda[\boldsymbol{i}, (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{p})].$$

如果矢量 $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) \in V$ 满足下式

$$\begin{aligned} &D_H[(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}), (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{p})_l] \leqslant D_H[(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}), (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{p})_i], \\ &(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{p})_i, (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{p})_l \in G, \ 0 \leqslant i \leqslant 2^k - 1, \end{aligned} \tag{7}$$

则将 $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ 并入以 $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{p})_l$ 为中心的“状态束”．每个矢量 $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ 可能存在几个满足上式 G 中的矢量，可任择其一“状态束”并入，都将导致同样的容错水平．“最小距离”集束准则相当于最佳接收理论中的最大似然判决准则，只有在 FSM 的所有状态出现概率相等时，才能达到最好的容错水平．事实上 FSM 的状态转移过程是马尔可夫链[4]，其状态转移矩阵 $[m_{ij}]$ 是平稳的，且 $0 < m_{ij} < 1$，因而该矩阵是正规矩阵．对任一初始状态的概率分布矢量 Π，则 $\Pi \cdot [m_{ij}]^T$，当离散时间 $t \to \infty$ 时，都将逼近一个确定且唯一的概率分布矢量 $\boldsymbol{\alpha}$． 很明显 $\boldsymbol{\alpha} \cdot [m_{ij}]^T = \boldsymbol{\alpha}$，这一概率分布矢量的每一个分量，一般并不相等．

3）最佳集束准则． 假定 $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{p}) \in G$ 是状态束中心矢量，$(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) \in V$ 代表“状态束”内的矢量．如果某时刻 FSM 的状态处于 $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})_i \in V$，显然这是由于状态转换错误产生的，否则状态只可能在状态中心之间转换．处于某状态中心的概率（只考虑一次转换错误）由后验概率 $P\{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{p})_i/(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})\}$ 决定．所以应按下式决定 $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) \in V$ 属于哪一个状态束．即如果

$$\begin{aligned} &P\{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{p})_l/(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})\} \geqslant P\{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{p})_i/(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})\}, \\ &0 \leqslant i \leqslant 2^k - 1; \ i \neq l, \end{aligned} \tag{8}$$

则选定 $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ 属于以 $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{p})_l$ 为中心的状态束． 利用贝叶斯公式和假定状态矢量每一分量产生错误的概率相等，且为 ρ，x 是矢量 $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ 与状态中心的汉明距离，则导出：若

$$P\{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{p})_l\}(1-\rho)^{n-x_l} \cdot \rho^{x_l} \geqslant P\{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{p})_i\}(1-\rho)^{n-x_i} \cdot \rho^{x_i}, \tag{9}$$

则选择 $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ 属于以 $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{p})_l \in G$ 为中心的状态束．

按上述三种集束准则中的任一种都可得到被扩展的次态映射．设计的 FSM 的容错能力第三种最佳，而第一种物理结构最简单． 被扩展的次态映射决定了实现该 FSM 的

激励方程，即

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{z}(t+1)=\Lambda[\boldsymbol{i}(t),(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})], \\ &\boldsymbol{z}(t+1)\in G,\ \boldsymbol{i}(t)\in I,\ (\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\in V,\ V=S\times P. \end{aligned} \tag{10}$$

二、新容错 FSM 的实现

下面简述根据上述激励方程实现容错 FSM 的方法．用 $M_1, M_2,\cdots\cdots, M_n$ 来标志记忆 V 中每个矢量 $(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\in V$ 中 n 个分量的记忆元件． 而 $\boldsymbol{z}\in G$ 的 n 个分量决定了对每个 M_i 输入的要求，以使它能产生正确的状态值（参见图 1），使图中 $h_j[\boldsymbol{i}(t), (\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})]$ 与 M_j 的激励方程相等．应该注意到每个 $h_j[\boldsymbol{i}(t),(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})]$ 在 V 中是以这样一种方式确定的，即每个状态束都映射到所要求的下一个状态束的状态中心． 因此在某种集束准则，例如等距集束准则，即使有的激励环节或记忆元件发生了故障(无论是暂时的或永久的)，只要故障导致状态矢量 $\boldsymbol{z}(t)$ 分量的错误数小于 $(d_G-1)/2$，则产生的下一状态矢量 $\boldsymbol{z}'(t+1)$ 仍将处在与正确的次态矢量 $\boldsymbol{z}(t+1)$ 同一状态束内． 因为设计中把“状态束”看作一个总体来对待的，它们当中任一成员所起的作用都与子集 G 中的状态束中心一样，所以在这种条件下，系统的下一状态值将总是处在正确的“状态束”内．

同理，输出函数也可以按类似的方法进行设计．

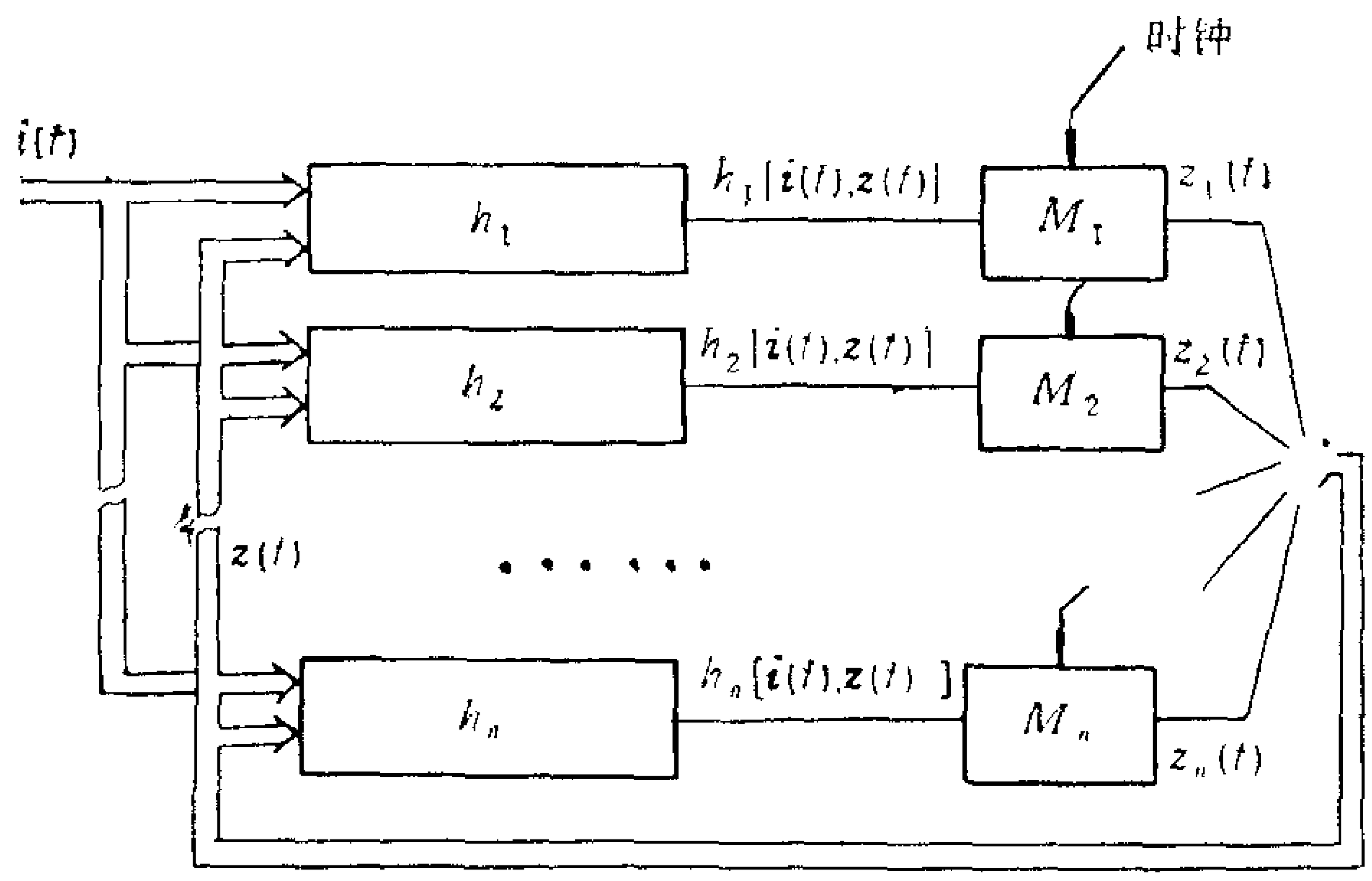

图 1　新容错 FSM 的实现

三、算法和设计举例

设计的基本算法归纳在图 2 中．

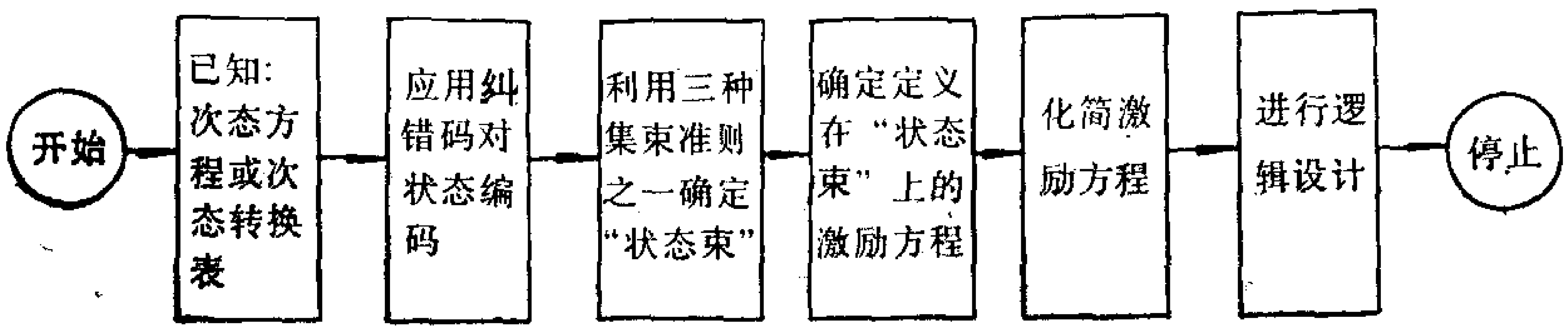

图 2　设计算法

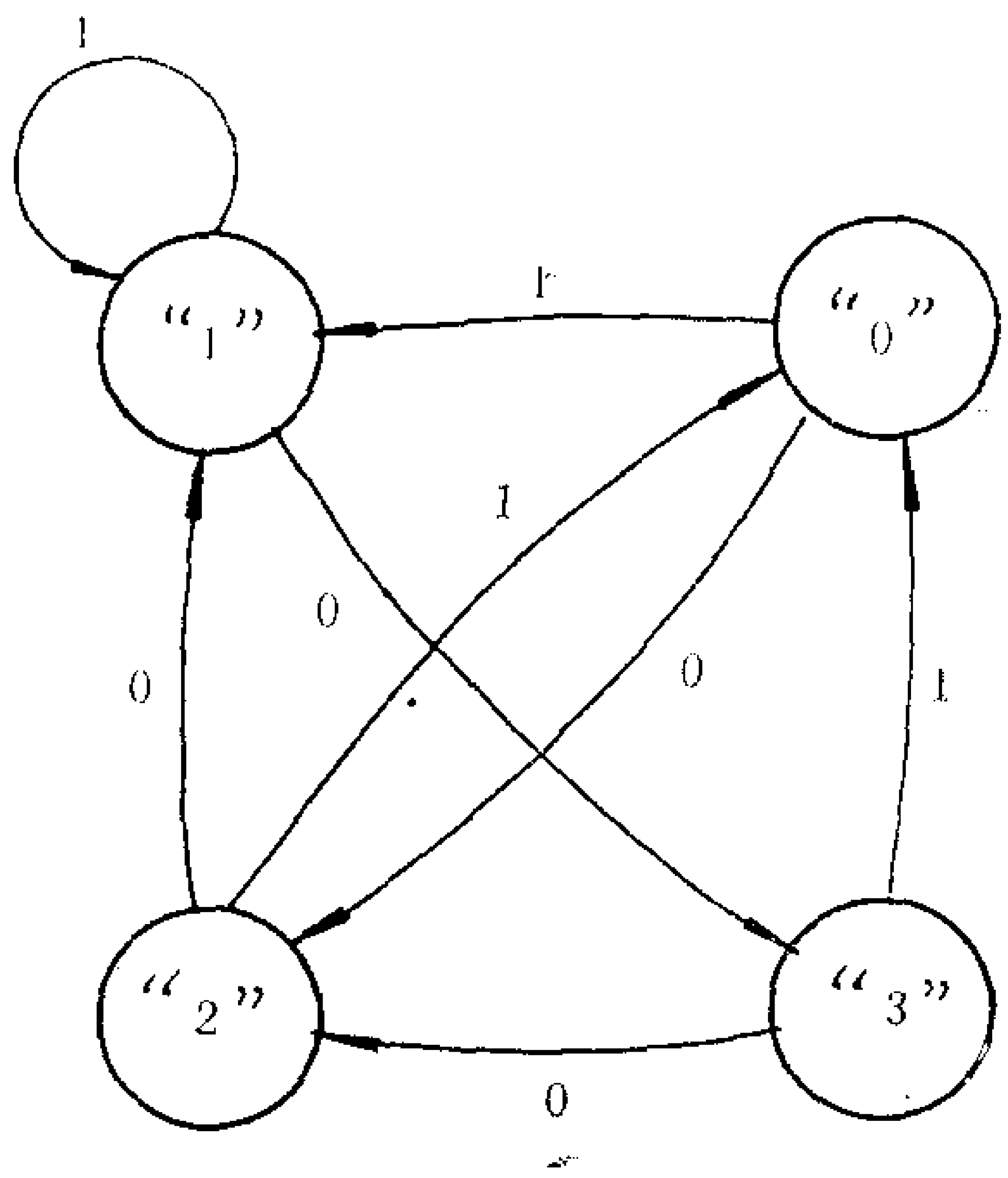

图3 未编码状态图

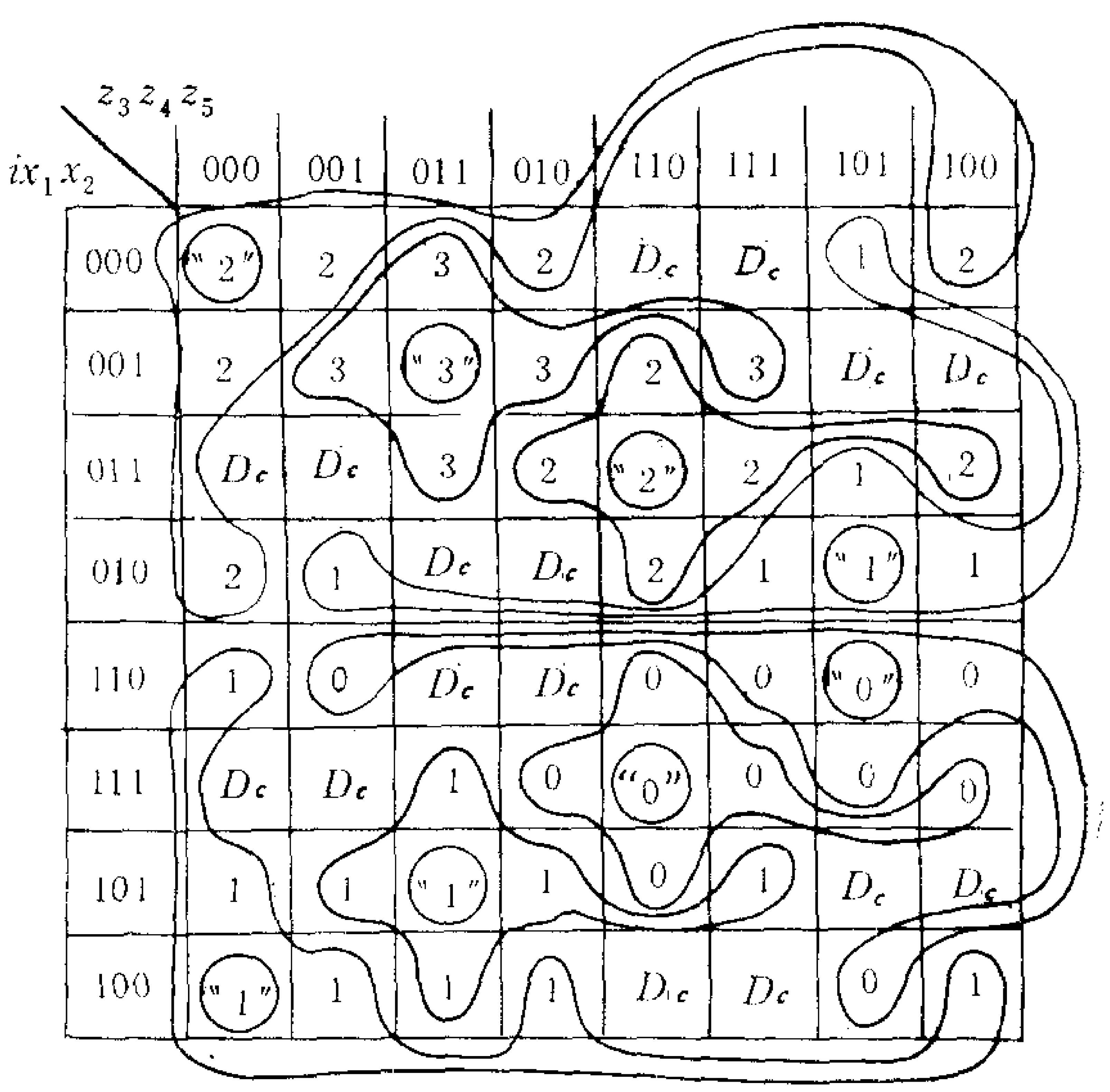

图4 编码用卡诺图

图注：1）图中 D_c 表示任意项；2）带圆圈项表示状态束中心；3）轮廓线内项代表在同一“状态束”内

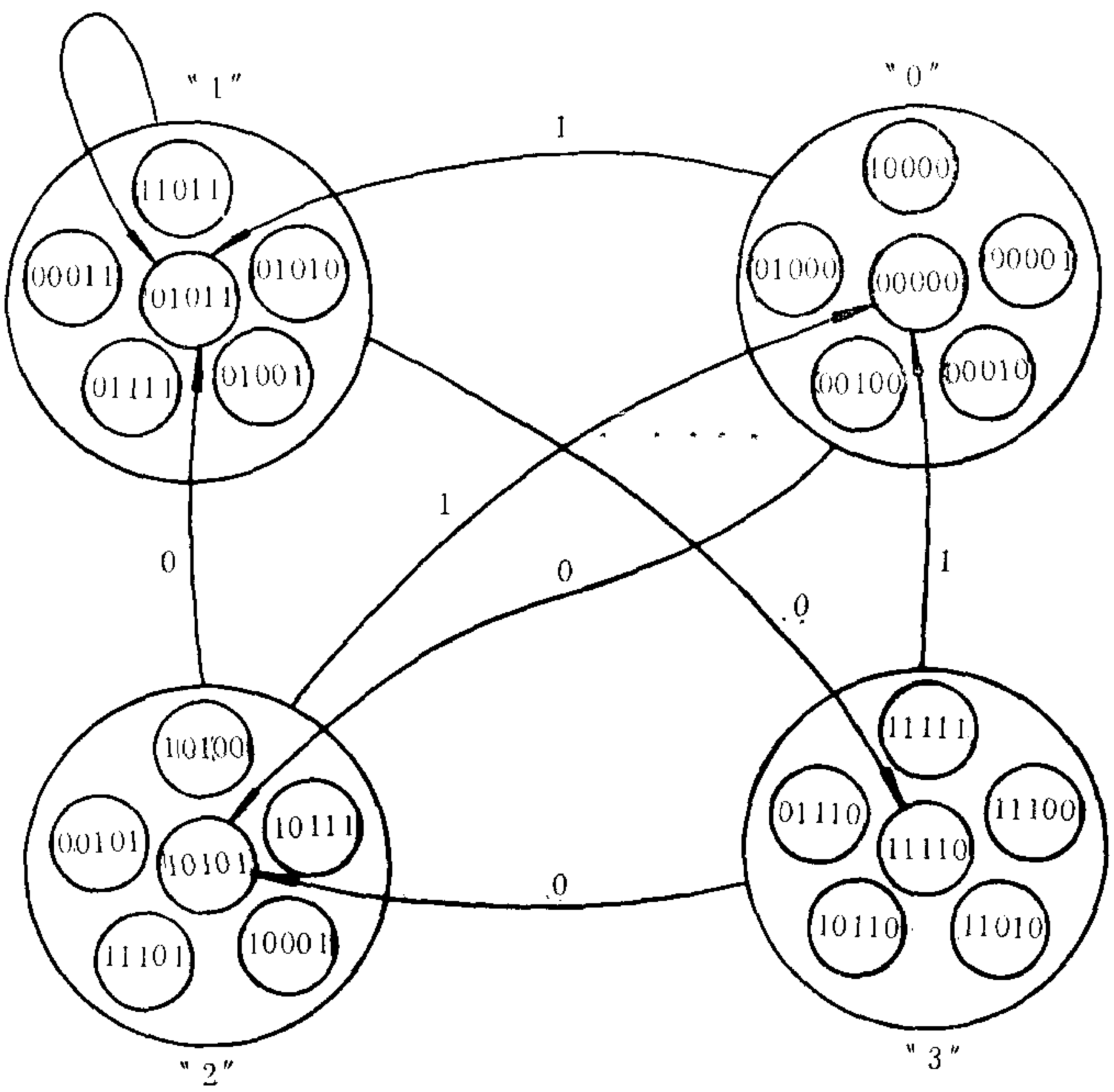

图5 编码后的状态图

例. 要设计一个具有一维输入空间、两维状态空间的 FSM，其状态图见图3. 为使其状态转换具有容错能力，利用(5,2)分组码将其状态空间的每一矢量编码. 编码后状态空间 V 的子集 G 中码元间的最小距离 $d_{\min}=3$. 按定距准则确定状态束，则凡和状态束中心距离为 $(d_{\min}-1)/2=1$ 的项都应归入同一状态束. 集束用的卡诺图和编码后的

状态图见图 4 和图 5. 利用这种方法设计的 FSM 在单个元件故障概率较小时，可使状态转换错误概率降低几个数量级.

参考文献

[1] 王光兴，有限状态机由软故障引起的状态转换错误概率，自动化学报，第 11 卷，第 1 期，1985，98—102.

[2] I.S.Reed and A.C.L. Chiang, Coding Techniques for Fault-Tolerant Counters, *IEEE Trans. Comput.* C-19(1970), 1037—1038.

[3] Frederic, J. Mowele, A Systematic Approach to Digital Logic Design, Addison-Wesley Publishing Company, 1977.

[4] Kemeney, John, Finite State Chain, 1968.

[5] Andrew, J. Viterbi, Jimk. Omura, Orinciple of Digital Communication and Coding, McGraw-Hill Book Company, 1979.

THE DESIGN CONSIDERATION OF A NEW FAULT-TOLERANT FINITE STATE MACHINE

WANG GUANGXING

(*Northeast University of Technology*)

ABSTRACT

A design method for a new style fault-tolerant finite state machine is provided in the paper. The principle of the error correcting codes, and the maximumlikelihood criterion and the maximum a posteriori criterion of the optimum receiver principle have been adopted to extend each state of the finite state machine into a "cluster-states". If the state resulted from fault does not go off the "cluster-states", the subsequent state values of the system will always be in the correct "cluster-states". The transition error probability of the FSM has been decreased and fault-tolerant capability increased. Examples are given to describe the design method.