第 13 卷 第 6 期 1987 年 11 月
自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA
Vol. 13, No. 6 Nov., 1987

用"分块矩阵法"快速解算极点配置自适应控制规律

潘亚明　　赵晓明
(北京工业学院)　　(北京化工学院)

摘　　要

本文提出快速解算极点配置自适应控制规律的"分块矩阵法". 计算工作量从 $O(n^3)$ 降至 $O(n^2)$; 其结果亦适用于随机性模型. 仿真结果表明,"分块矩阵法" 计算量小. 对于控制含有未知或时变滞后的过程有很大实用价值.

一、引　　言

对较小纯滞后的系统,用常规 PID 控制效果较好(图 1). Smith 预估控制可处理大纯滞后的过程(图 2). 自适应一步向前法和模型参考法的本质与 Smith 法相同,都是基于模型的补偿方法, 较 Smith 预估法优越之处是适用于过程参数缓慢变化的情形 (图 3). 但是,当纯滞后未知或时变时,以上方法的控制质量均变差.

Wellstead 等在 1979 年提出极点配置方法[1], 能控制含有未知或时变滞后的过程,取得了较好的结果[1,2]. 后来 Vogel 和 Edgar 又发展了极点/零点配置自适应方法[4],用时

图 1　常规 PID 控制(滞后为 2)

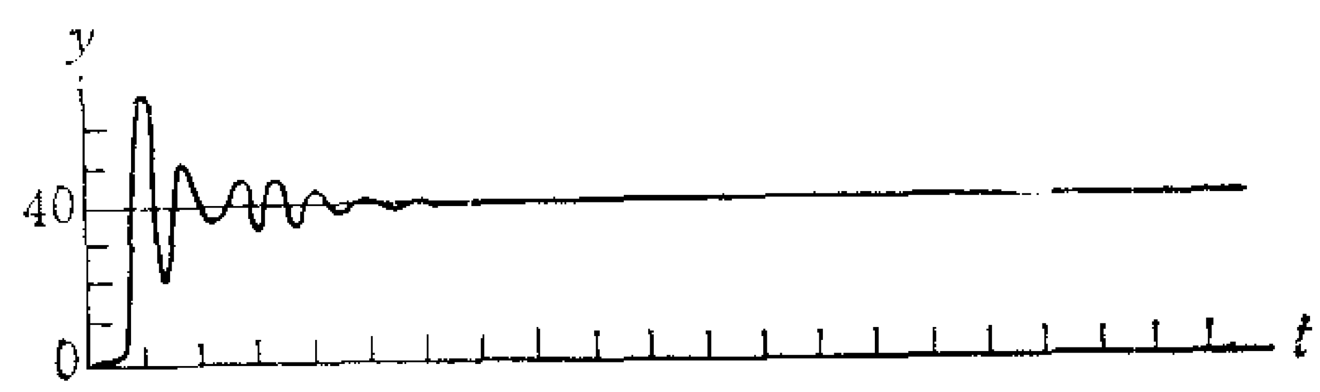


图 2　Smith 预估控制 (滞后为 2)

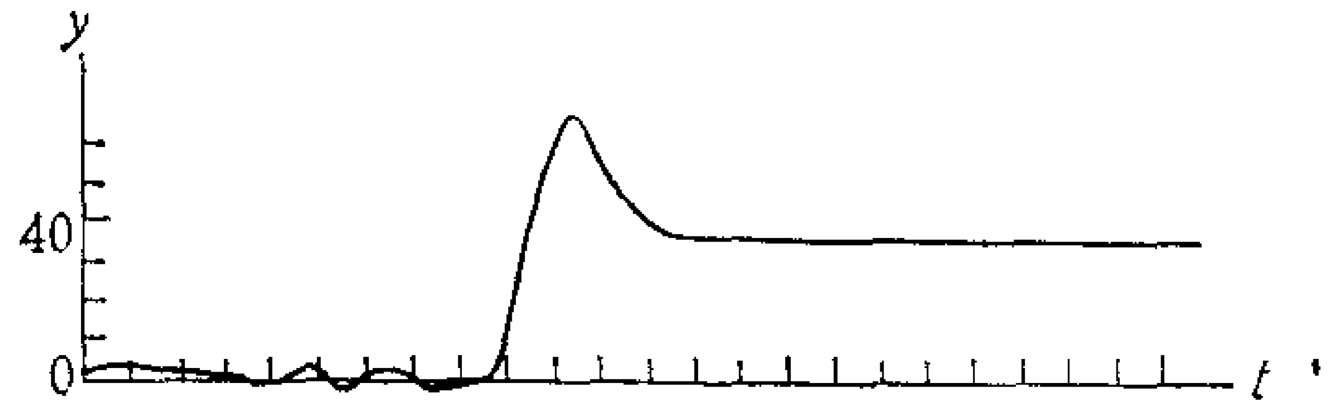
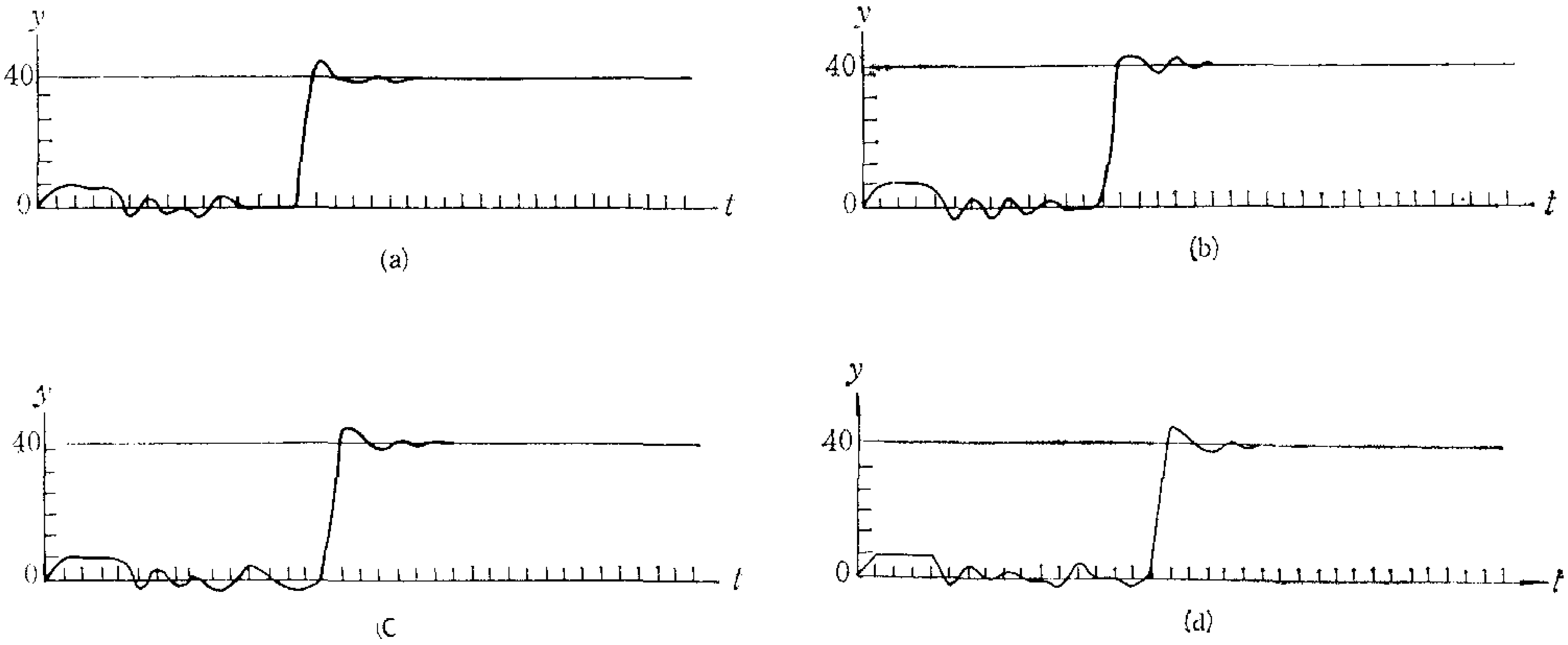


图 3　一步向前自适应控制(滞后为 2)

本文于 1985 年 8 月 13 日收到.



(a) $r=4$，滞后为 1；(b) $r=4$，滞后为 2
(c) $r=4$，滞后为 3；(d) $r=4$ 滞后为 4
图 4　极点配置自适应控制

滞补偿器提高了鲁棒性和在非最小相系统上的实用性．对此，Allidina, McDermott 及 Wellstead 等也做了大量工作[3,5,6]．但他们均未考虑极点配置自适应控制律的快速解算问题．事实上这种方法的计算量较大[1]，若不解决则可能引入人为滞后．一般地，求解控制律需解一个线性方程组，采用 Gauss 消去法的计算工作量为 $O(n^3)$，n 为未知数的个数．本文提出“分块矩阵法”将计算工作量降至 $O(n^2)$ 级．

二、极点配置自适应控制

$$A(q^{-1})=a_0+a_1q^{-1}+\cdots+a_nq^{-n},\ (a_0=1) \tag{1}$$

$$B(q^{-1})=b_0+b_1q^{-1}+\cdots+b_mq^{-m}, \tag{2}$$

$$y(t)=-\sum_{i=1}^{n}a_iy(t-i)+\sum_{i=0}^{m}b_iu(t-i). \tag{3}$$

过程未知参数用最小二乘法在线辨识．

$$\hat{\theta}(t)=[a_1,a_2,\cdots,a_r;b_1,b_2,\cdots,b_r],\ r\geqslant\max(m,n)$$

$$\phi^T(t-1)=[-y(t-1),\cdots,-y(t-r);\ u(t-1),\cdots,u(t-r)]$$

$$\hat{\theta}(t)=\hat{\theta}(t-1)+\frac{P(t-2)\phi(t-1)}{1+\phi^T(t-1)P(t-1)\phi(t-1)}\times[y(t)-\phi^T(t-1)\hat{\theta}(t-1)], \tag{4}$$

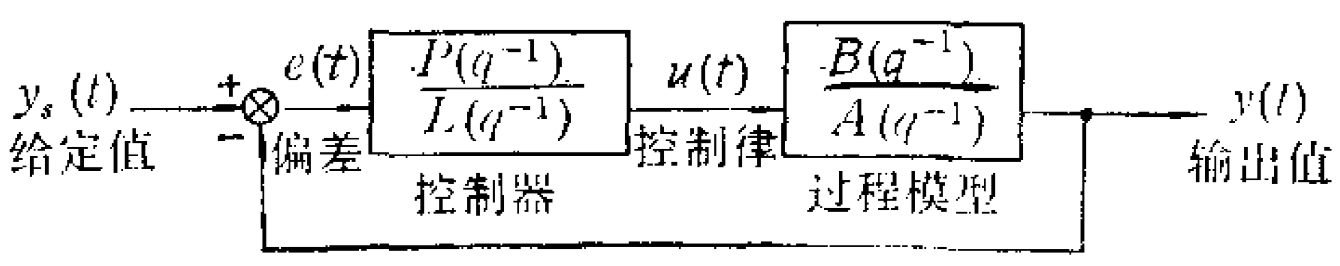


图 5　离散系统极点配置自适应控制方框图

$$P(t-1)=P(t-2)-\frac{P(t-2)\phi(t-1)\phi^T(t-1)P(t-2)}{1+\phi^T(t-1)P(t-2)\phi(t-1)}. \tag{5}$$

由图5得闭环特征方程式 $L(q^{-1})A(q^{-1})+P(q^{-1})B(q^{-1})=0$. 设 $A^*(q^{-1})=a_0^*+a_1^*q^{-1}+\cdots+a_{2r-1}^*q^{-(2r-1)}=(1-J_1q^{-1})\cdots(1-J_{2r-1}q^{-1})$，其中 $J_1,\cdots,J_{2r-1}$ 为所希望的闭环极点，方程 $L(q^{-1})A(q^{-1})+P(q^{-1})B(q^{-1})=A^*(q^{-1})$ 称为极点配置方程.在控制器中加入积分环节 $\dfrac{1}{1-q^{-1}}$，可克服稳态误差. 此时配置方程为

$$(1-q^{-1})L(q^{-1})A(q^{-1})+P(q^{-1})B(q^{-1})=A^*(q^{-1}).$$

可任意设 r，使 $a_r=0$，考虑到

$$L(q^{-1})=l_0+l_1q^{-1}+\cdots+l_{r-1}q^{-(r-1)},$$

$$P(q^{-1})=p_0+p_1q^{-1}+\cdots+p_{r-1}q^{-(r-1)},$$

则 $(1-q^{-1})L(q^{-1})A(q^{-1})+P(q^{-1})B(q^{-1})=A^*(q^{-1})$ 可以写成

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc}
a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0\\
a_1-a_0 & a_0 & \cdots & 0 & b_1 & b_0 & \cdots & 0\\
a_2-a_1 & a_1-a_0 & \cdots & 0 & b_2 & b_1 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{r-2}-a_{r-3} & a_{r-3}-a_{r-4} & \cdots & 0 & b_{r-2} & b_{r-3} & \cdots & 0\\
a_{r-1}-a_{r-2} & a_{r-2}-a_{r-3} & \cdots & a_0 & b_{r-1} & b_{r-2} & \cdots & b_0\\
\hdashline
a_r-a_{r-1} & a_{r-1}-a_{r-2} & \cdots & a_1-a_0 & b_r & b_{r-1} & \cdots & b_1\\
a_r & a_r-a_{r-1} & \cdots & a_2-a_1 & 0 & b_r & \cdots & b_2\\
0 & a_r & \cdots & a_3-a_2 & 0 & 0 & \cdots & b_3\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & a_{r-1}-a_{r-2} & 0 & 0 & \cdots & b_{r-1}\\
0 & 0 & \cdots & a_r-a_{r-1} & 0 & 0 & \cdots & b_r
\end{array}\right]$$

$$\times\left[\begin{array}{c} l_0\\ l_1\\ l_2\\ \vdots\\ l_{r-2}\\ l_{r-1}\\ \hdashline p_0\\ p_1\\ p_2\\ \vdots\\ p_{r-2}\\ p_{r-1}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} a_0^*\\ a_1^*\\ a_2^*\\ \vdots\\ a_{r-2}^*\\ a_{r-1}^*\\ \hdashline a_r^*\\ a_{r+1}^*\\ a_{r+2}^*\\ \vdots\\ a_{2r-2}^*\\ a_{2r-1}^*\end{array}\right] \tag{6}$$

由 $u(t)/e(t)=P(q^{-1})/L'(q^{-1})$ 得极点配置控制律为

$$u(t)=-\sum_{i=1}^{r-1}l_iu(t-i)+\sum_{i=0}^{r-1}l_iu(t-i-1)+\sum_{i=0}^{r-1}p_ie(t-i). \tag{7}$$

求解式(6)得 $L(q^{-1})$ 和 $P(q^{-1})$，再由式(7)得控制律，进而获得过程的输出值 $y(t)$.

三、分块矩阵法

求解控制律实际上是求解一个线性方程组. Gauss 消去法的计算工作量为 $O(n^3)$级，n 为未知数个数. 式(6)系数方阵中零元素个数 $N=2r(r-1)$，r 很大时 $\frac{2r(r-1)}{(2r)^2}\to$ 50%，即有一半元素为零. 由于诸多原因[8]，作者未采用稀疏矩阵法. 共轭斜量法是解大型线性方程组的重要算法，但由于要求系数矩阵是对称矩阵，故须先将其法化；而法化的工作量为 $O(n^3)$ 级，并不能根本减小工作量[9]. 作者提出“分块矩阵法”. 将式(6)分块，相应地写成

$$\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L(q^{-1})\\ P(q^{-1})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1^*\\ A_2^*\end{bmatrix}.$$

解之，得

$$P(q^{-1})=[(A_{11}^{-1}A_{12}-A_{21}^{-1}A_{22})^{-1}][A_{11}^{-1}A_1^*-A_{21}^{-1}A_2^*],$$
$$L(q^{-1})=A_{11}^{-1}A_1^*-A_{11}^{-1}A_{12}P(q^{-1}).$$

其中 A_{11}，A_{12} 为 Toeplitz 下三角阵，A_{21}，A_{22} 为 Toeplitz 上三角阵. 不难证明，$(A_{11}^{-1}A_{12}-A_{21}^{-1}A_{22})$ 也是 Toeplitz 矩阵[10]. 对于 $A\in R^{l\times m}$，$B\in R^{m\times n}$ 两个矩阵的乘积 AB，工作量为 nml 次乘法. 根据 Toeplitz 矩阵理论，求解 $P(q^{-1})$ 和 $L(q^{-1})$ 的工作量为 $O(n^2)$ 级. 故用“分块矩阵法”求解极点配置自适应控制律使其工作量从 $O(n^3)$ 降至 $O(n^2)$. 当 n 很大时，提高效率十分可观，使这种控制方法具有更大的实用价值.

四、例题与仿真

设过程模型为 $y(t)=-0.7y(t-1)+0.45u(t-d)$，其中 d 为纯滞后. 图 4(a)，(b)，(c)，(d) 给出不同条件下仿真过渡过程的曲线. 递推最小二乘估计初值 $\hat{\theta}(0)=0$ 不影响参数辨识的结果[7]. 仿真结果表明，不管纯滞后多大，只要设定 $r\geqslant\max(m,n)$，均能获得较好的控制质量. 这与理论上极点配置法能处理未知或时变滞后的结论是一致

表　1

方法 / T_0 / r	高斯消去法 (G)	分块矩阵法 (F)	时间比 $\frac{G}{F}$
6	66 秒	25 秒	2.6 倍
12	362 秒	90 秒	4.0 倍
15	640 秒	145 秒	4.4 倍
20	1375 秒	245 秒	5.6 倍

的. 而引言中所提方法是无法解决未知或时变滞后的.

对于上例,分别采用 Gauss 消去法和"分块矩阵法"求解控制律,所用时间比较如表 1 所示. 其中 T_0 是采样一次(包括辨识、求控制律、计算输出值等整个过程)所需的时间. 程序在 Apple-II 上通过. 从表 1 可以看出,"分块矩阵法"的计算速度远优于 Gauss 消去法. 若进一步改善估计器,则极点配置自适应控制方法会更优.

感谢西安交通大学游兆永教授和李磊同志、北京化工学院刘军同志的帮助.

参 考 文 献

[1] Wellstead, P. E. et al., Self-tuning Pole/Zero Assignment Regulators, *Int. J. Control*, 30(1979), No. 1, 1—26.
[2] Wellstead, P. E. and Zanker, P., Servo Self-tuners, *Int. J. Control*, 30(1979), No. 1, 27—36.
[3] Wellstead, P. E. and Sanoff, S. P., Extended Self-tuning Algorithm, *Int. J. Control*, 34(1981), No. 3, 433—455.
[4] Vogel, E. F. and Edgar, T. F., 1980, Proc. Joint Automatic Control Conf., Paper TP5-E; 1982 Proc. Automatic Control Conf., p. 536.
[5] Allidina, A. Y. and Hughes, F. M., Proc. Instn elect. Engrs., 1980, Pt. D, 127, 13.
[6] McDermott, P. E., and Mellichamp, D. A., *Int. J. Control*, 40(1984), 1051.
[7] Lee, R. L. K., Optimal Estimation, Identification and Control, M. I. T. Press, 1964.
[8] 邓健新、徐金生，稀疏矩阵计算及其数值软件发展概述，应用数学与计算数学，1981，No.2.
[9] 赵金熙，共轭斜量法的若干进展，应用数学与计算数学，1984，No. 2
[10] 游兆永，线性代数及多项式快速算法，上海科学技术出版社，1980 年.
[11] Goodwin, G. C. and Sin K. S. Adaptive Filtering, Prediction and Control, Prentice Hall, 1984.

A NEW METHOD FOR FAST CALCULATION OF POLEPLACEMENT CONTROL LAW

Pan Yaming
(Beijing Institute of Technology)

Zhao Xiaoming
(Beijing Institute of Chemical Technology)

Abstract

A new algorithm is proposed to calculate the poleplacement adaptive control law. The method reduces calculation from $O(n^3)$ down to $O(n^2)$ and is suitable also for stochastic models. The simulation shows that it is very efficient and useful for systems whose pure time delays are unknown or time-varying.