第 14 卷 第 1 期 自 动 化 学 报 Vol. 14, No. 1
1988 年 1 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 1988

特征结构配置能力的一致性

王 大 海
(河 北 省 科 学 院)

摘　　要

本文讨论了配置特征结构的补偿器设计问题，给出了 E-补偿器的一种最小阶设计方法，可保证附加的 p 个极点稳定(固定,可任置)．文中还证明了，在配置闭路特征结构的能力上，E-补偿器和 EO-补偿器具有一致性，都能配置各种状态反馈所能配置的特征结构．

文献[1—3]研究了用输出反馈配置系统特征值——特征向量(简称特征结构)的问题，给出了对给定特征结构的可配置条件．当给定的特征结构不能用输出反馈配置时，[3—5]提出可用动态补偿器进行配置．设计一个 p 阶补偿器将附加 p 个特征值，这 p 个特征值必须皆有负实部，[4]中未注意此事而[5]中作了修正．[5]给出设计 $n-l$ 阶补偿器的一种方法，既可配置给定的 n 个特征结构，又可对附加的 $n-l$ 个极点任意安置．但阶次 $n-l$ 并不一定是阶数最小者，而[3—5]的补偿器也并非唯一可行的结构形式．本文对此作了进一步的讨论．

一、基 本 概 念

考虑线性系统：

$$\dot{x}=Ax+Bu,\ y=Cx, \tag{1}$$

其中 $A\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$, $B\in \boldsymbol{R}^{n\times m}$, $C\in \boldsymbol{R}^{l\times n}$, 并假定 $\operatorname{rank} B=m$, $\operatorname{rank} C=l$.

给定一组复共轭数值——向量对：

$$\varphi_k=\{(\lambda_1,s_1),(\bar{\lambda}_1,\bar{s}_1),\cdots(\lambda_1,s_r),(\bar{\lambda}_r,\bar{s}_r),(\lambda_{2r+1},s_{2r+1}),\cdots,(\lambda_k,s_k)\}. \tag{2}$$

式中 λ_i 是复数，s_i 是 n 维复值列向量，$(\bar{\lambda}_i,\bar{s}_i)$ 是 (λ_i,s_i) 的共轭复数一向量对．若记

$$s_i=s_i+js_{i2},\quad \lambda_i=\lambda_{i1}+j\lambda_{i2},\quad i=1,\cdots,r,$$

则有 $\bar{s}_i=s_{i1}-js_{i2}$, $\bar{\lambda}_i=\lambda_{i1}-j\lambda_{i2}$.

记

$$\Lambda_i=\begin{bmatrix}\lambda_{i1} & \lambda_{i2}\\ -\lambda_{i2} & \lambda_{i1}\end{bmatrix}(i=1,\cdots,r) \tag{3}$$

$$=\text{Block Diag}\ \{\Lambda_1,\cdots,\Lambda_r,\lambda_{2r+1},\cdots,\lambda_k\}. \tag{4}$$

$$S=[s_{11},s_{12},\cdots,s_{r1},s_{r2},s_{2r+1},\cdots,s_k]. \tag{5}$$

简记 $\varphi_k=(\Lambda,S)$. (6)

本文于 1986 年 2 月 1 日收到．

定义 1. 若存在输出反馈

$$u = Ky + v. \tag{7}$$

使闭环系统以 φ_k 为其特征结构,则称 φ_k 为 (ABC) 可配的,若 φ_k 为 (A, B, I_n) 可配的,则称为状态反馈可配的.

引理. φ_k 为 (ABC) 可配 *iff*:

(1) $\operatorname{rank} S = k$, (8)

(2) $\operatorname{rank}[B \vdots S\wedge - AS] = \operatorname{rank} B = m$, (9)

(3) $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} CS \\ S\wedge - AS \end{bmatrix} = \operatorname{rank} CS.$ (10)

在实用中,常考虑 $K = n$ 的情况,且当引理条件不成立时就要考虑采用动态补偿器进行配置.

文献 [3—5] 所考虑的动态补偿器在闭环系统中的位置结构如图 1 所示.

本文把这种补偿器称为 E-补偿器. 近二十年中研究的观测器也可作为配置特征结构的补偿器,本文称为 EO-补偿器. EO-补偿器在闭环系统中的位置结构如图 2 所示.

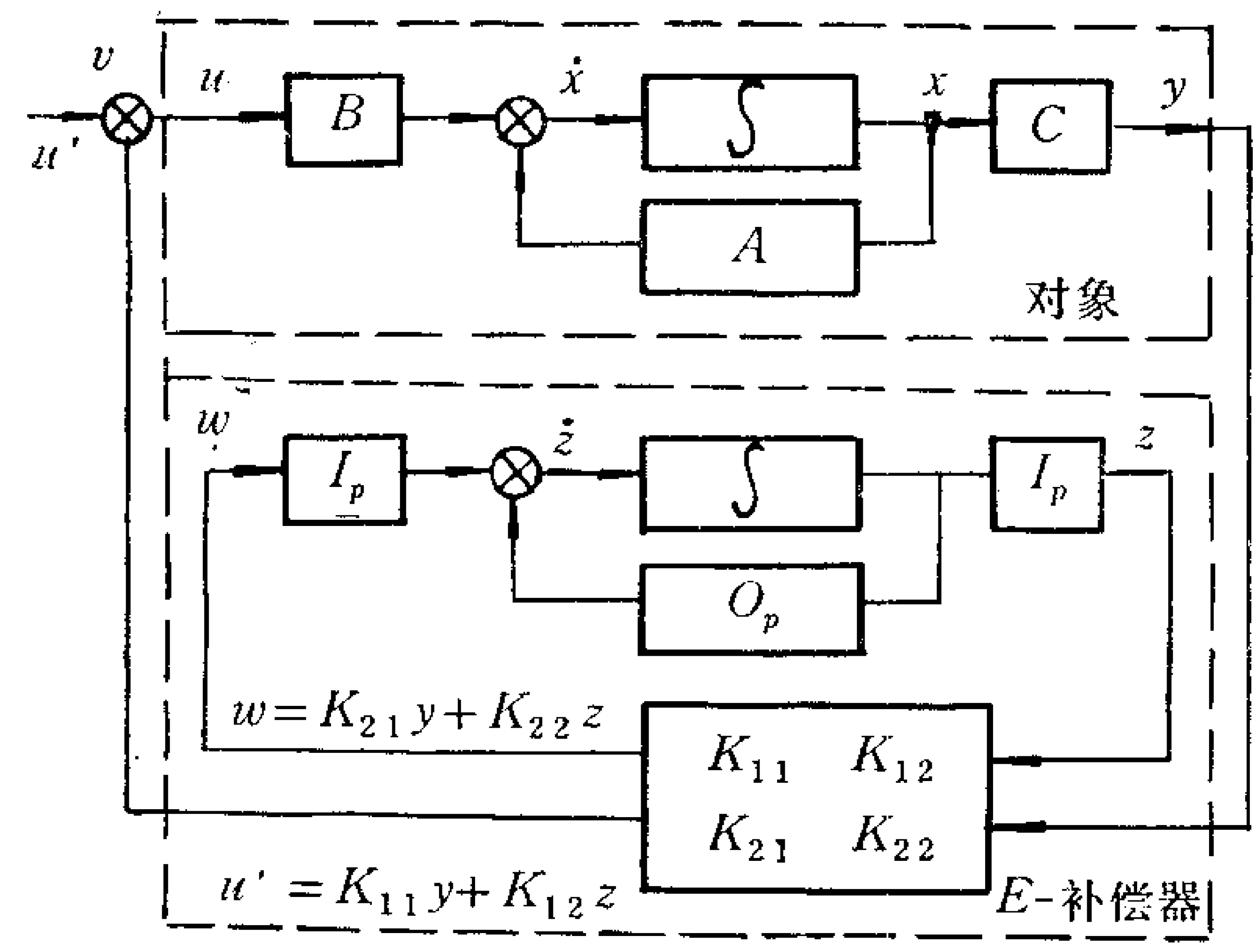

图 1 E-补偿器回路

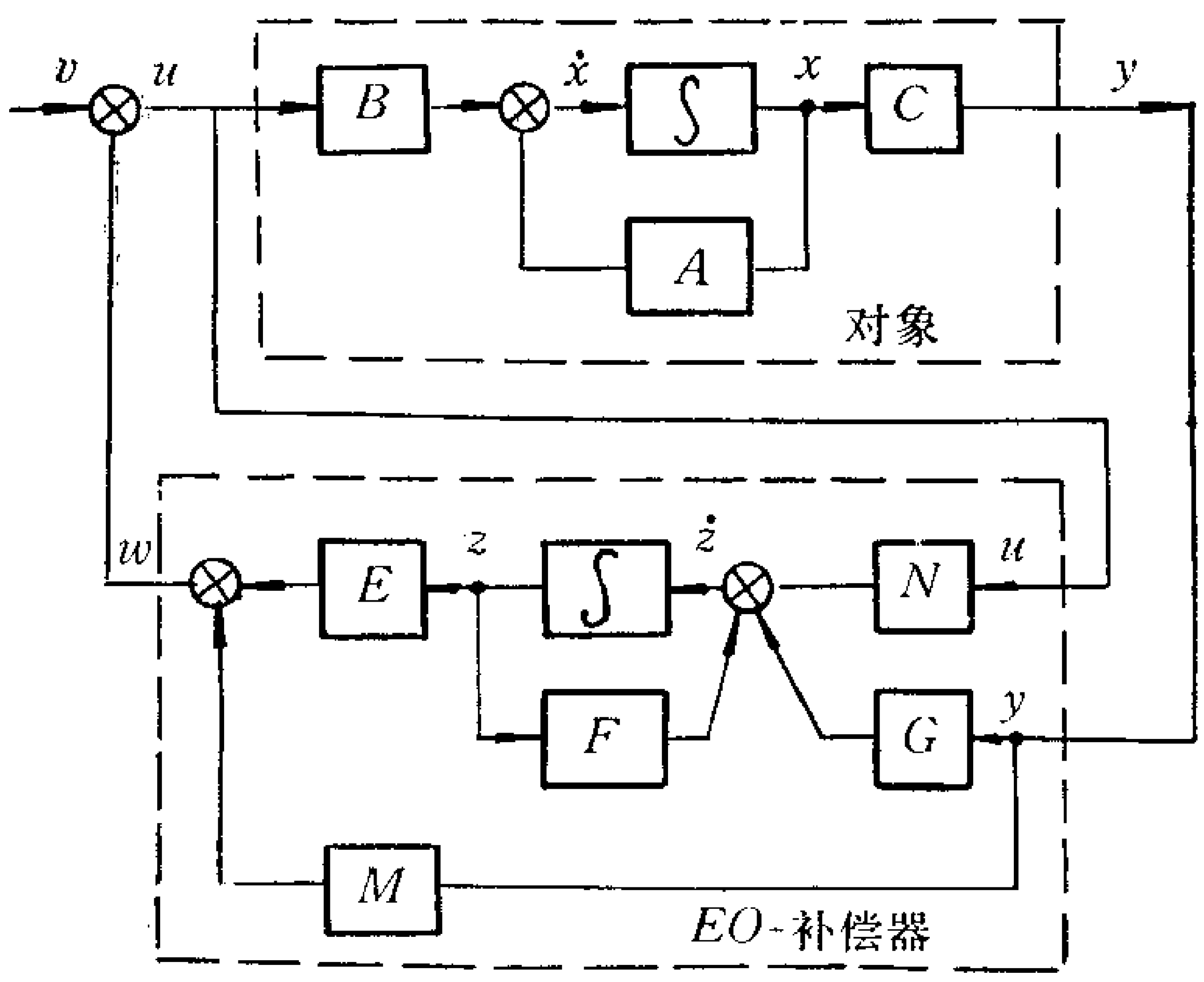

图 2 EO-补偿器回路

系统 (1) 增加了 p 阶补偿器后,扩大了 p 阶,相应地,φ_n 中的 s_i 应延拓一个后续部分 s_i',此 s_i' 是待定的 p 维向量. 对应于矩阵 S, s_i' 将组成矩阵 $S' \in \boldsymbol{R}^{p\times n}$,而经过延拓后的 φ_n 可记为 $\bar{\varphi}_n = \left(\Lambda, \begin{bmatrix} S \\ S \end{bmatrix}\right)$.

定义 2. 若 $S' \in \boldsymbol{R}^{p\times n}$ 和 p 阶 E-补偿器 (EO-补偿器), 使闭环系统以 $\bar{\varphi}_n$ 为其特征结构,且其余 p 个极点稳定(固定,可任置),则称 φ_n 是 E-可配的 (EO-可配的), 相应的补偿器称为 φ_n-E-(EO-) 稳定(固定,可任置)极点补偿器.

二、主 要 结 果

本文主要命题是:

命题. 对于给定的系统 (1) 和 $\varphi_n(\Lambda, S)$, 若 (A, C) 完全可观测, S 非奇异, 则下列

命题相互等价:

(i) φ_n 为状态反馈可配的.

(ii) φ_n 为 EO-可配的. 且有

$$S = PS. \tag{11}$$

这里, $P \in \boldsymbol{R}^{p\times n}$ 满足下列公式:

$$PA = FP + GC,\ K = MC + EP,\ N = PB. \tag{12}$$

(iii) φ_n 为 E-可配的.

(iv) $\operatorname{rank}(B \vdots SA - AS) = \operatorname{rank} B = m.$ (13)

证: 顺序为 (i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) ⇒ (iv) ⇒ (i).

(i) ⇒ (ii): 由 (i), 存在一个 $K \in \boldsymbol{R}^{m\times n}$, 使

$$[\lambda_i I - (A + BK)]S_i = 0,\ \forall(\lambda_i, s_i) \in \varphi_n. \tag{14}$$

故 $\exists\, p \leqslant n - 1$, p 阶 K_x-观测器:

$$\dot{Z} = Fz + Gy + Nu,\ W = My + Ez. \tag{15}$$

据图 2, 取 $U = W + V$ 时, 闭环系统为

$$\begin{bmatrix}\dot{X}\\ \dot{Z}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A + BMC & BE\\ (G + NM)C & F + NE\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\ Z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B\\ N\end{bmatrix}V. \tag{16}$$

作状态变换:

$$\begin{bmatrix}X\\ Z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}I_n & 0\\ P & I_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X'\\ Z'\end{bmatrix},\quad \text{即 } X = X',\ Z = PX' + Z'. \tag{17}$$

利用关系式 (12), 可把 (16) 等价化为

$$\begin{bmatrix}\dot{X}\\ \dot{Z}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A + BK & BE\\ 0 & F\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X'\\ Z'\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}V. \tag{18}$$

由 (14) 式可知:

$$\left(\lambda_i I_{n+p} - \begin{bmatrix}A + BK & BE\\ 0 & F\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}s_i\\ 0\end{bmatrix} = 0.$$

$$\forall(\lambda_i, s_i) \in \varphi_n. \tag{19}$$

这说明 $\left(\lambda_i, \begin{bmatrix}s_i\\ 0\end{bmatrix}\right)$ 是 (18) 的特征结构. 因状态变换不改变特征值,而特征向量间则满足状态变换式,故由 (17) 可知, $\left(\lambda_i, \begin{bmatrix}s_i\\ Ps_i\end{bmatrix}\right)$ 亦是 (16) 的特征结构, $i = 1,\cdots,n$. 令 $S' = PS \in R^{p\times n}$,则 $\bar{\varphi}_n = \left(\Lambda, \begin{bmatrix}S\\ S'\end{bmatrix}\right)$ 是 (16) 的特征结构,故 φ_n 是 EO-可配的. 即 (2) 命题为真.

(ii) ⇒ (iii), 若 (ii) 成立,则 $\exists\, p$ 阶观测器 (15) 和 $S = PS$, 使闭环系统 (16) 以

$$\bar{\varphi}_n = \left(\Lambda, \begin{bmatrix}S\\ S'\end{bmatrix}\right)$$

为特征结构. 而据图 1, E-补偿器与系统 (1) 形成的闭环系统为

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK_{11}C & BK_{12} \\ K_{21}C & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} V. \tag{20}$$

比较 (16) 和 (20) 即知，若取

$$K_{11} = m, \ K_{12} = E, \ K_{21} = G + NM, \ K_{22} = F + NM, \tag{21}$$

即可保证 (20) 和 (16) 的闭路特征矩阵相同，即特征结构相同，从而 φ_n 亦是 E-可配的，(iii) 为真。

(iii) ⇒ (iv)，若 (iii) 成立，即存在一个 $S' \in \boldsymbol{R}^{p\times n}$ 和 p 阶 E-补偿器，使闭环系统 (20) 以 $\bar{\varphi}_n = \left(\Lambda, \begin{bmatrix} S \\ S' \end{bmatrix}\right)$，为其特征结构。注意到 p 阶 E-补偿器与系统 (1) 构成的开环系统为

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix}.$$

由引理可知，必有：

$$\begin{aligned} m + p &= \operatorname{rank} \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \\ &= \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ S \end{bmatrix} \Lambda - \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ S' \end{bmatrix}\right) \\ &= \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} B & 0 & S\Lambda - AS \\ 0 & I_p & S' \end{bmatrix}\right) \\ &= p + \operatorname{rank}[B \vdots S\Lambda - AS]. \end{aligned}$$

故有： $\operatorname{rank}[B \vdots S\Lambda - AS] = m$，即 (iv) 为真。

(iv) ⇒ (i)，若 (iv) 成立，则 $[S\Lambda - AS] \in I_m(B)$，故存在一个 $H \in R^{m\times n}$，使得

$$S\Lambda - AS = BH. \tag{23}$$

因 $\operatorname{rank} B = m$，存在一个 $B^+ \in R^{n\times m}$，使得

$$B^+B = I.$$

(23) 式边左乘 B^+，有：

$$H = B^+(S\Lambda - AS). \tag{24}$$

令

$$K = B^+(S\Lambda S^{-1} - A), \tag{25}$$

则

$$\begin{aligned} S\Lambda - (A + BK)S &= S\Lambda - AS - BB^+(S\Lambda - AS) \\ &= S\Lambda - AS - BH = 0. \end{aligned}$$

故 $A + BK$ 以 φ_n 为特征结构，即 φ_n 为状态反馈可配，证毕。

推论. 在配置相同闭路特征矩阵的意义上，EO-补偿器与 E-补偿器一一对应，对应关系式分别为：

(i) 由 EO-补偿器 ⟹ E-补偿器：

$$K_{11}=M,\ K_{12}=E,\ K_{21}=G+NM,\ K_{22}=F+NE. \tag{21}$$

(ii) 由 E-补偿器到状态反馈矩阵 K 和 EO-补偿器：

$$\begin{aligned} &P=S'S^{-1},\ K=K_{11}C+K_{12}P. \\ &F=K_{22}-PBK_{12},\ G=K_{21}-PBK_{11}. \\ &M=K_{11},\ E=K_{12},\ N=PB. \end{aligned} \tag{26}$$

证：(21) 式已在命题的 (ii) ⇒ (iii) 中得证，故只需证 (26)，需分三方面论证. (i)，$\varphi_n=(\Lambda,S)$ 是 $A+BK$ 的特征结构；(ii)，(26) 诸参数满足观测器方程 (12)；(iii)，(26) 诸参数满足 (21)，即特征矩阵一致. 直接验证可知，(iii) 和 (12) 中的式 $N=PB$ 和 $K=MC+EP$ 皆成立，现只需证：

$$PA=FP+GC,\ S\Lambda-(A+BK)S=0, \tag{27}$$

即

$$-PA+K_{22}P-PBK_{12}P+K_{21}C-PBK_{11}C=0, \tag{28}$$

$$S\Lambda-[A+B(K_{11}C+K_{12}P)]S=0. \tag{29}$$

由于 E-补偿器构成的闭环系统 (20) 以

$$\bar{\varphi}_n=\left(\Lambda,\ \begin{bmatrix} S \\ S' \end{bmatrix}\right)$$

为特征结构，即

$$\begin{bmatrix} S \\ S' \end{bmatrix}\Lambda-\begin{bmatrix} A+BK_{11}C & BK_{12} \\ K_{21}C & K_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S \\ S' \end{bmatrix}=0.$$

左乘非奇异矩阵 $\begin{bmatrix} I & 0 \\ -P & I_p \end{bmatrix}$，有：

$$\begin{aligned} 0&=\begin{bmatrix} S \\ 0 \end{bmatrix}\Lambda-\begin{bmatrix} A+BK_{11}C & BK_{12} \\ P(A+BK_{11}C)+K_{21}C & PBK_{12}+K_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ P & I_p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S \\ 0 \end{bmatrix} \\ &=\begin{bmatrix} S\Lambda-[A+B(K_{11}C+K_{12}P)]S \\ [-PA-PBK_{11}C+K_{21}C-PBK_{12}P+K_{22}P]S \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

因 S 非奇异，故 (28)、(29) 皆成立，证毕.

至此可得设计 φ_n 最小阶稳定(固定，可任置)极点 E-补偿器的一种线性设计方法.

算法

步 i：检查入口条件：(A,C) 可观测性；$\varphi_n=(\Lambda,S)$ 的状态反馈可配置性，即 (13)；S 的非奇异性.

步 ii：由 (25) 式计算状态反馈矩阵 K.

步 iii：依文献 [6, 7] 介绍的线性设计方法设计最小阶稳定(固定，可任置)极点的 K_x 观测器，即得最小阶 EO-补偿器.

步 iv：由 (21) 式设计 E-补偿器，即得所求.

三、结 束 语

命题和推论使线性控制系统的补偿器、观测器和状态反馈三大设计领域在特征结构

的配置能力上得到一种统一，揭示了控制科学中的美的和谐.

这种统一将使设计工作者有可能综合利用各领域的研究成果，发展自己的设计. 算法就是这种综合的一个实例，利用最小阶 K_x 观测器的设计方法，解决了最小阶 E-补偿器的设计问题.

作者向北航的高为炳教授、程 鹏老师，向河北省科学院的涂序彦教授、苏志海老师、王耕田等同志表示真诚的感谢. 感谢他们对作者多方面的指导、扶持和热情帮助.

参 考 文 献

[1] Srinathkumar, S., Eigenvalue/eigenvector Assignment Using Output Feedback, *IEEE Trans.* **AC-23** (1978), 79—89.
[2] 杨 玲，关于反馈系统的特征结构配置，控制理论与应用，**1**(1984)，103—110.
[3] Sambandan, A. and Chandrasekharan, P. C., Eigenvector Assignment Using Output Feedback, Int. J. Control-34 (1981), 1143—1152.
[4] 程 鹏，配置特征结构的动态补偿器设计，自动化学报，**11**(1985)，380—387.
[5] 王大海，多变量控制系统的行化梯典范形与最小阶 K_x-观测器的线性设计法，自动化学报，**9**(1983)，211—222.
[6] 王大海，最小阶 Luenberger-型 K_x-观测器的线性设计法，河北省科学院学报，1986 年第 1 期.

THE UNIFORMITY OF EIGENSTRUCTURE ASSIGNMENT CAPABILITY

WANG DAHAI
(*Hebei Institute of Automation*)

ABSTRACT

In this paper, the design for eigenstructure assignment is discussed. The Linear Design Method for minimal order E-compensator is given, in which the attached P polse can be assigned in a stable (fixed, arbitrary) position. The uniformity of eigenstructure assignment capability for EO-compensator, E-compensator and state feedback is proved.