

# 基于优化方法的非线性观测器设计<sup>1)</sup>

陶洛文 方崇智  
(清华大学)

## 摘 要

本文提出了一种方法,将非线性系统观测器的误差收敛速度的确定和增益阵的设计统一归结为一个非线性优化问题,并给出了这种方法在流体管线上的应用。

## 一、引 言

非线性系统状态观测器的设计是一个尚未得到很好解决的问题。最简单的方法是在工作点附近作线性化处理,其缺点是全局特性得不到保证。Thau<sup>[1]</sup>用 Lipschitz 条件分析了非线性观测器的稳定性。Kou 等人<sup>[2]</sup>讨论了非线性系统的可观性问题,给出了一组观测器性能判据<sup>[3]</sup>。Banks<sup>[4]</sup>又推广了这一结果。这类方法的缺点是适于分析已知观测器的性能而不适于观测器的设计,且要求确定象 Lyapunov 函数或 Lipschitz 常数这类不易确定的量。文献 [5] 提出了一种用线性观测器观测非线性系统的方法,但要求系统满足特定的条件。Bestle 和 Zeitz<sup>[6]</sup>提出了用状态变换将非线性系统变换成观测器标准型,再用特征值配置设计观测器。李春文和陶洛文<sup>[7]</sup>给出了这种变换存在的充要条件和求解方法。其存在条件限制较强,对很多系统是不适用的。

本文提出了一种综合方法,将非线性系统观测器的设计问题转化为非线性优化问题,并给出了在流体管线状态观测上的应用。

## 二、非线性观测器设计

对系统

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{g}(\mathbf{u}_k), \\ \mathbf{y}_{k+1} &= \mathbf{C}\mathbf{x}_{k+1}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中  $\mathbf{x} \in \Omega_x \in R^N$  为有界状态变量,  $\mathbf{f}: R^N \rightarrow R^N$  为  $\Omega_x$  上的连续可微单值函数,  $\mathbf{u} \in \Omega_u \in R^q$  为输入,  $\mathbf{g}: R^q \rightarrow R^N$ ,  $\mathbf{y} \in \Omega_y \in R^N$  为输出。如它满足可观性条件<sup>[2]</sup>, 则可考虑全状态观测器

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_k) + \mathbf{g}(\mathbf{u}_k) + \mathbf{H}(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k), \quad (2)$$

本文于1986年1月29日收到。

1) 中国科学院科学基金资助课题。

观测器误差为

$$e_{k+1} = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1} = f(x_k) - f(\hat{x}_k) - HCe_k \quad (3)$$

观测器设计的目的是寻找一个增益阵  $H$ , 使观测器在允许的工作范围  $Q_x$  内收敛. 为此, 下面以定理的形式给出两个设计准则.

**定理 1.** 非线性系统 (1) 的状态观测器 (2) 的性能和  $H$  阵的设计可以由如下非线性优化问题加以解决:

$$J_1^* = J_1^*(H^*, P^*, e^*, x^*) = \text{Min}_{H, P} \text{Max}_{x_k, e_k} e_{k+1}^T P e_{k+1} / e_k^T P e_k \quad (4)$$

其中,  $P$  为对称正定阵,  $e \in Q_e; \{e | x - e \in Q_x, x \in Q_x, e \neq 0\}$ ,  $x \in Q_x$ . 如  $J_1^* < 1$ , 则观测器稳定, 且有

$$\|e_k\| \leq (J_1^* \cdot p_{\max}^* / p_{\min}^*)^{k/2} \cdot \|e_0\|,$$

其中,  $p_{\max}^*$ ,  $p_{\min}^*$  为  $P^*$  阵的最大、最小特征值.

证明: 首先,  $e_k^T P e_k$  是一个正项序列, 当其前后项之比  $e_{k+1}^T P e_{k+1} / e_k^T P e_k < 1$  时, 根据 Lyapunov 定理<sup>[8]</sup>,  $e_k$  是渐近收敛到零的.

其次, 注意到式 (4) 定义的优化问题的含义是在域  $Q_x, Q_e$  中最不利于 (Max) <sub>$c, x$</sub>  观测器稳定的  $e^*$  和  $x^*$  下求出一个最利于 (Min) <sub>$H, P$</sub>  观测器稳定的  $H^*$  和  $P^*$ . 故优化问题的解保证了在全局条件下的观测器增益阵  $H^*$  的最优选择 (在使  $e_k^T P e_k$  最快衰减的意义上).

最后, 因为  $p_{\min}^* \|e\|^2 \leq e^T P^* e \leq p_{\max}^* \|e\|^2$ , 所以易得  $\|e_k\| \leq (J_1^* \cdot p_{\max}^* / p_{\min}^*)^{k/2} \cdot \|e_0\|$ .

**定理 2:** 如果式 (1) 中  $f(x_k)$  的梯度  $\nabla f$  满足

$$\|\nabla f - HC\|^2 = \rho\{(\nabla f - HC)^T(\nabla f - HC)\} \leq \varepsilon < 1, x \in Q_x, \quad (5)$$

则观测器误差满足  $\|e_k\| \leq \varepsilon^{k/2} \|e_0\|$ .

证明: 令  $D(x) = \nabla f - HC$ , 由积分中值定理<sup>[9]</sup>有:

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= f(x_k) - f(\hat{x}_k) - HC(x_k - \hat{x}_k) = \{f(x_k) - HCx_k\} - \{f(\hat{x}_k) - HC\hat{x}_k\} \\ &= \int_0^1 D(w_s) \cdot (x_k - \hat{x}_k) ds, w_s \triangleq sx_k + (1-s)\hat{x}_k \\ e_{k+1}^T e_{k+1} &= \left\{ \int_0^1 D(w_s) \cdot (x_k - \hat{x}_k) ds \right\}^T \cdot \left\{ \int_0^1 D(w_t) \cdot (x_k - \hat{x}_k) dt \right\} \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (x_k - \hat{x}_k)^T D^T(w_s) D(w_t) (x_k - \hat{x}_k) ds dt \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 \rho\{D^T(w_s) D(w_t)\} \cdot \|x_k - \hat{x}_k\|^2 ds dt. \end{aligned}$$

故当在  $Q_k$  中,  $\rho\{D^T(w) D(w)\} = \|D(w)\|^2 \leq \varepsilon < 1$  时有:

$$e_{k+1}^T e_{k+1} \leq \varepsilon e_k^T e_k \text{ 或 } \|e_{k+1}\| \leq \varepsilon^{1/2} \|e_k\|.$$

**推论 1:** 观测器设计可转化为优化问题:

$$J_2^* = J_2^*(H^*, x^*) = \text{Min}_H \text{M}_{x_k} \|\nabla f - HC\|^2. \quad (6)$$

**评论 1:** 由于上面给出的是充分条件, 因而当  $J^* \geq 1$  时, 观测器未必不稳定. 这时, 综合出的观测器有待于其它方法的检验.

**评论 2:** 对非线性规划问题 (4)、(6) 如何求解须根据具体问题确定, 但必须保证全局最优解. 在计算机求解时可采用如下流程 (针对  $J_1$ ):

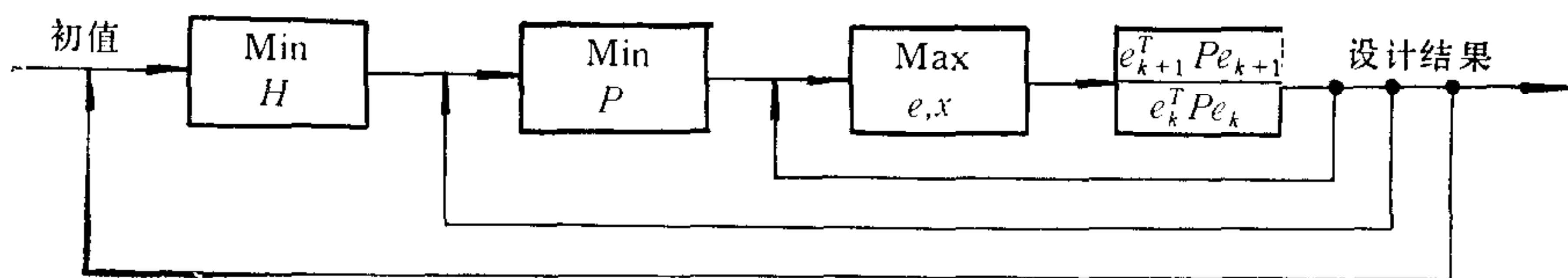


图 1 求解  $J_1$  的计算流程

例：考虑系统

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} 0.1 & 0.15 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, & Q_x: \{|x_i| \leq 1\}, \\ y_k = x_{1k}. \end{cases}$$

观测器形式为式 (2)，用无梯度法对  $J_1$  寻优得：

$$H^* = \begin{bmatrix} .605 \\ .275 \end{bmatrix}, P^* = \begin{bmatrix} 1 & -.473 \\ -.473 & .224 \end{bmatrix}, x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, e^* = \begin{bmatrix} .05 \\ .1 \end{bmatrix}, J_1^* = .713.$$

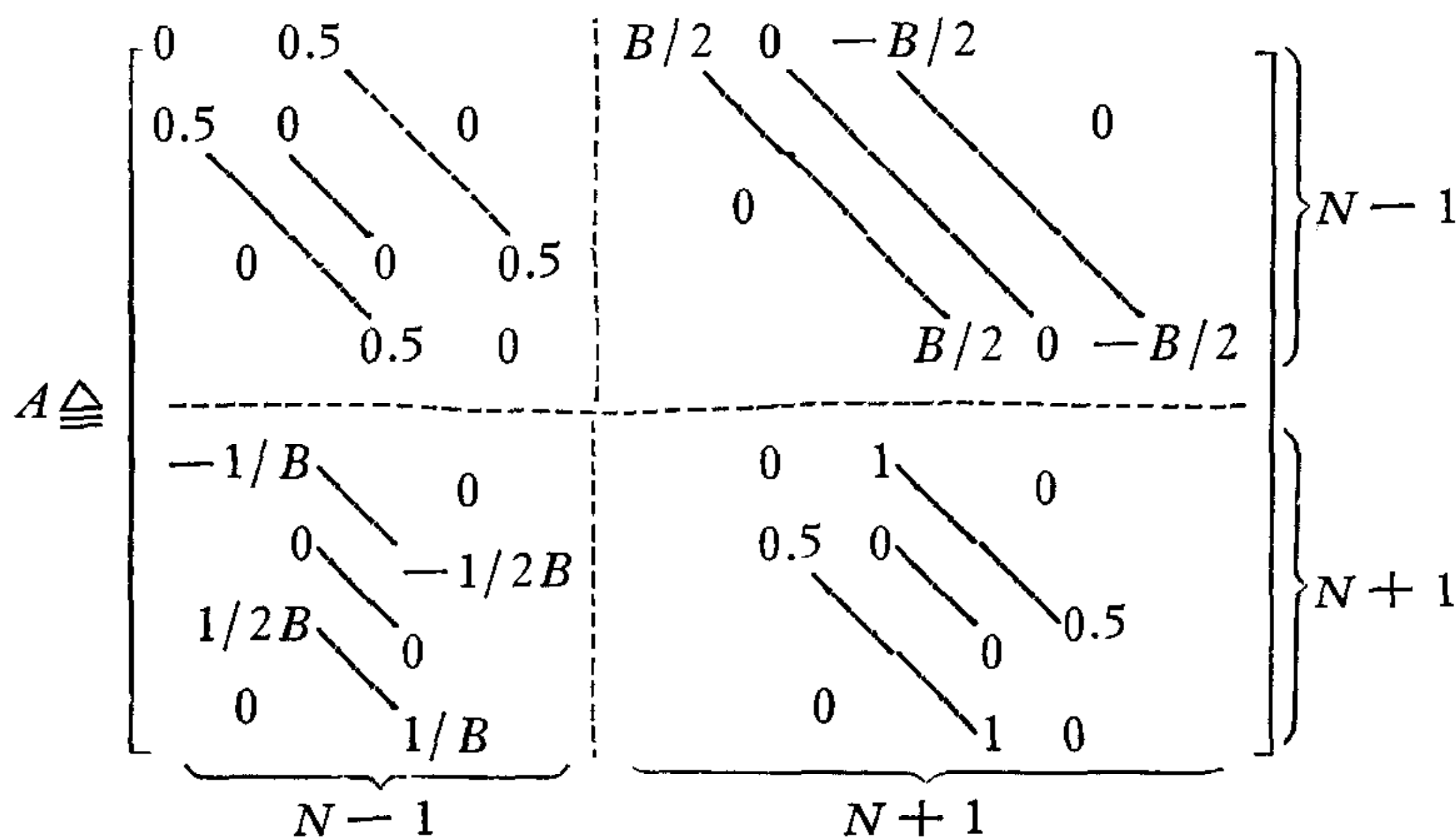
### 三、在流体管线上的应用

在现代工业社会中，输油(气、水、浆)管线使用广泛，十分重要。对管线中压力、流量的动态分布进行实时监测是保证其安全运行的必要条件，也是进行控制、提高经济效益的基础。

考虑如图 2 所示的轴线长为  $L$  的管线。假定管线中间无压力源和分叉点，波速  $a$ ，摩擦系数  $f$ ，管内截面积  $F$  都是常数。  $H$  为管内流体压头， $Q$  为流量， $D$  为管内径， $g$  为重力加速度。定义  $B = a/gF$ ， $R = Lf/2gDNF^2$ 。将管线按轴线分为  $N$  段，定义状态变量： $x_k \triangleq [H_1, H_2, \dots, H_{N-1}, Q_0, Q_1, \dots, Q_N]^T$ ，取  $H_0, H_N$  为输入， $H_1$  为输出，有状态方程<sup>[10]</sup>：

$$x_k = Ax_k + Mx_k^2 + u_{k+1}, x_k \geq 0, \tag{7}$$

其中， $x_k^2 \triangleq [(H_1)^2, (H_2)^2, \dots, (H_{N-1})^2, (Q_0)^2, (Q_1)^2, \dots, (Q_N)^2]^T$ ，



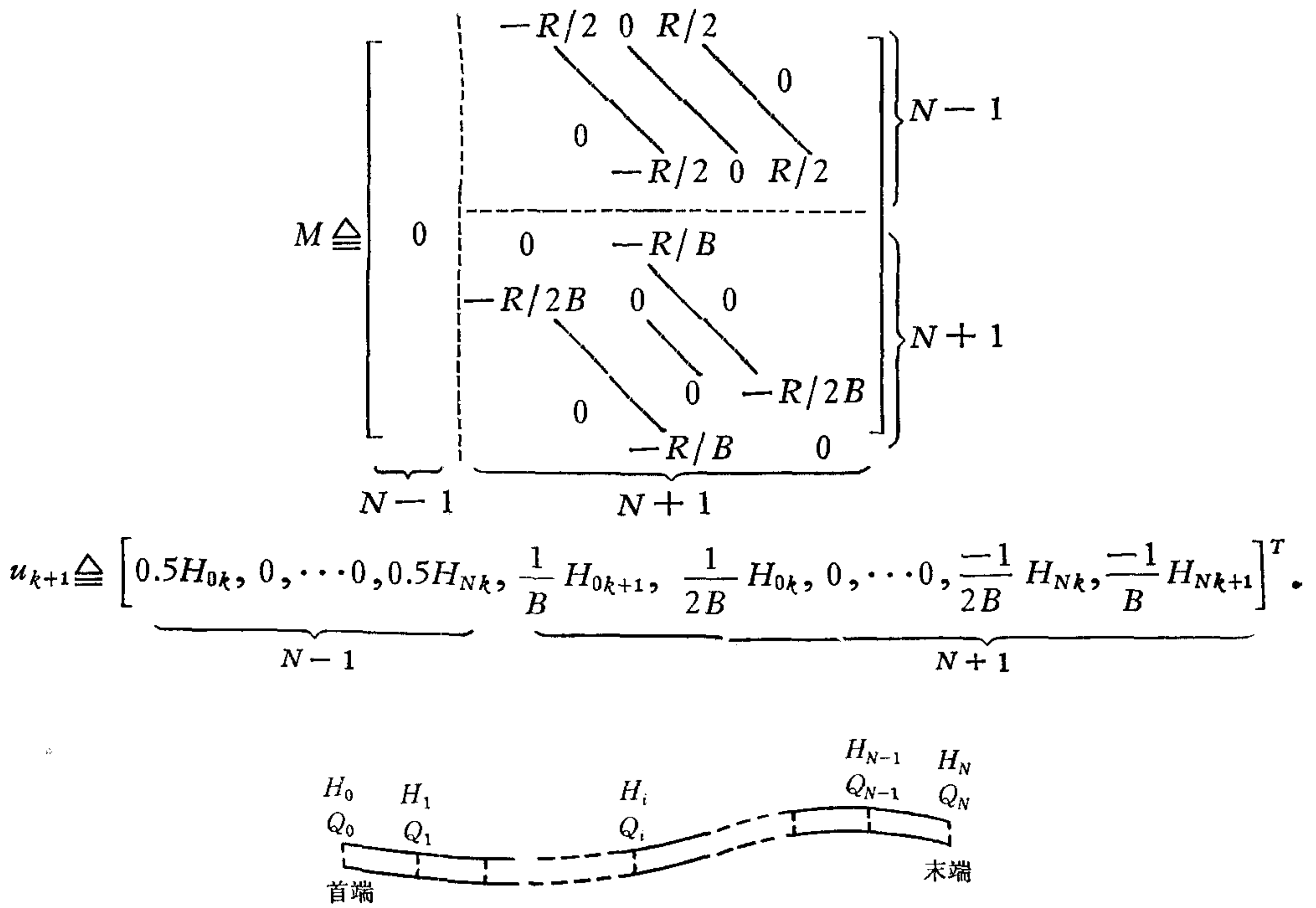


图2 管线的离散化

定义输出  $y_k = Cx_k = H_{1k}$ , 根据式(6)有:

$$\nabla f - HC = A - 2M \text{diag}\{x_i\} - HC, HC = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{2N} \end{bmatrix} \cdot 0$$

易知,  $J_2$  的  $\text{Min}_H$  部分只与  $\nabla f - HC$  的第一列有关。又因  $M$  的前  $N-1$  列元素为零, 因而在设计  $H$  阵时只须考虑下面的优化问题:

$$\text{Min}_H \left\{ (-h_1)^2 + (0.5 - h_2)^2 + \sum_{i=3}^{N-1} (-h_i)^2 + \left(-\frac{1}{B} - h_N\right)^2 + (-h_{N+1})^2 \right\}$$

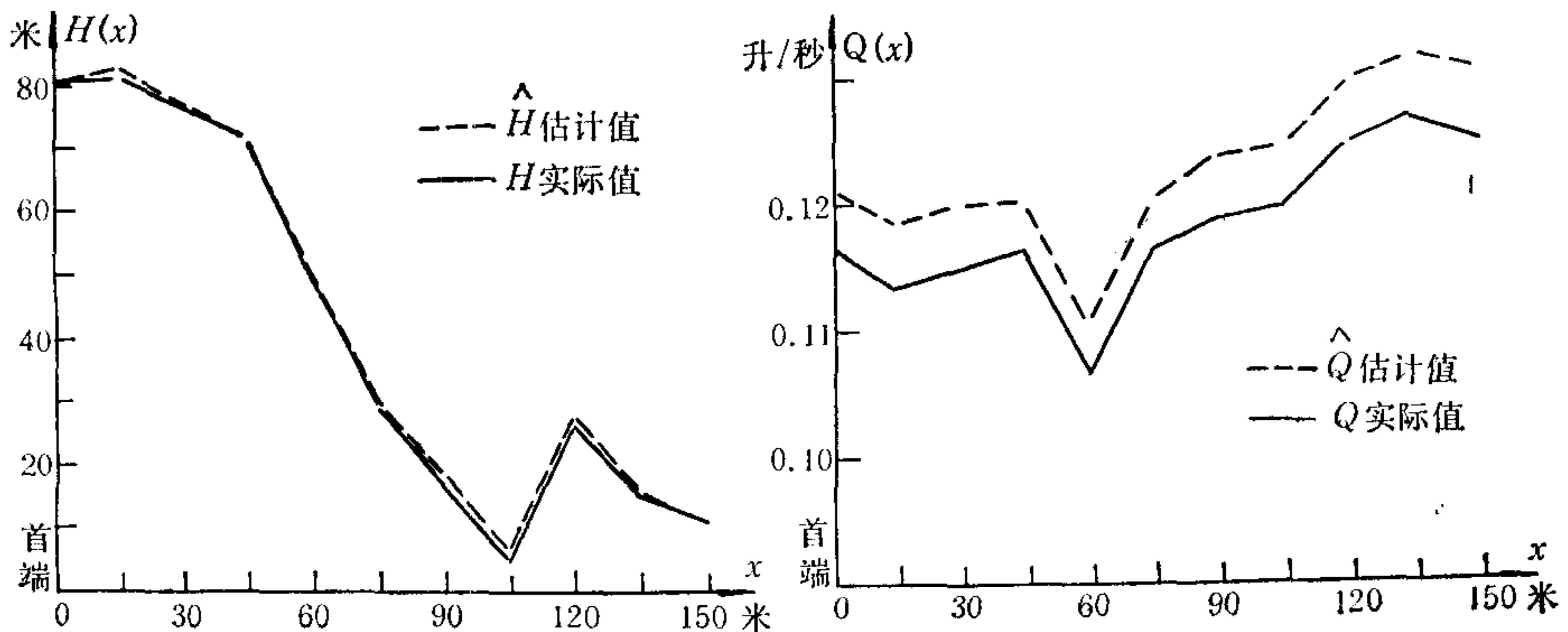


图3 管内压力、流量分布的估计

$$+ \left( \frac{1}{2B} - h_{N+2} \right)^2 + \sum_{i=N+3}^{2N} (-h_i)^2 \},$$

易得

$$H^* = \left[ \underbrace{0, 0.5, 0, \dots, 0}_{N-1}, \underbrace{-\frac{1}{B}, 0, \frac{1}{2B}, 0, \dots, 0}_{N+1} \right]^T.$$

图 3 为用上面设计的观测器对一条 150 米长管线中的压力、流量分布的观测结果 ( $N = 10, k = 100$ , 仿真数据)。图 4 为观测器误差衰减曲线。

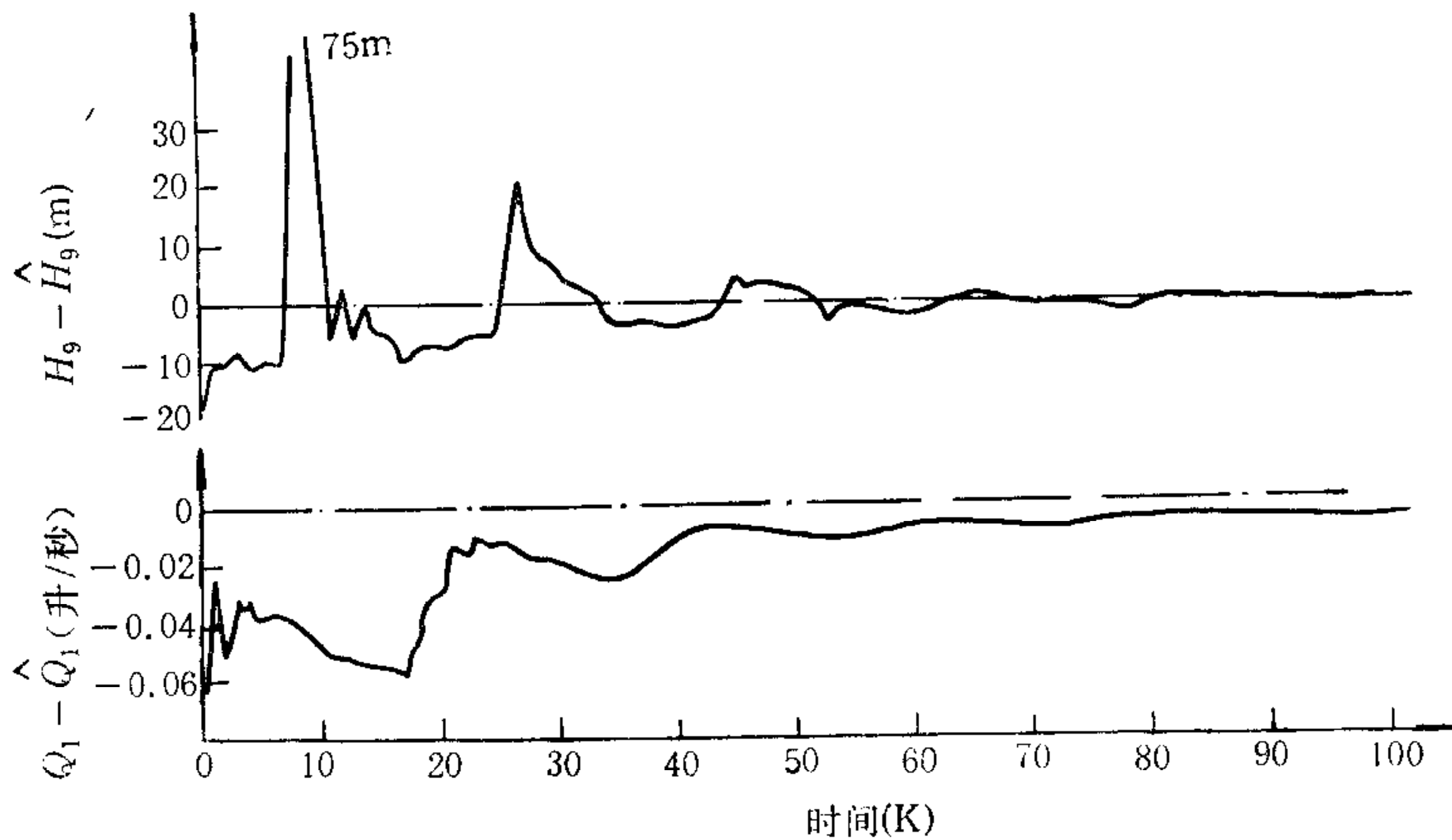


图 4 观测器误差 ( $H_9, Q_1$ ) 的衰减

## 四、结 论

本文提出用优化方法设计非线性观测器。这是一种新的、比较实用的方法。这种方法有时可以用解析法解决,如流体管线的观测器设计;有时须借助计算机求解。在系统阶次高时,计算量可能较大。考虑到作为设计问题,这种计算一般是一次性的,故计算量稍大些也是允许的。而究竟有多少非线性系统的观测器可以用本文提出的方法设计,是一个有待进一步研究的问题。

## 参 考 文 献

- [1] Thau, F. E., Observing the state of nonlinear dynamic systems, *Int. J. Control*, **17**(1973), 471—479.
- [2] Kou, S. R., Elliott, D. L. & Tarn, T. J., Observability of nonlinear systems, *Information and Control*, **22** (1973), 89—99.
- [3] Kou, S. R., Elliott, D. L. & Tarn, T. J., Exponential observers for nonlinear dynamic systems, *Information and Control*, **29**(1975), 204—216.
- [4] Banks, S. P., A note on non-linear observers, *Int. J. Control*, **34**(1981), 185—190.
- [5] Watanabe, K. & Himmelblau, D. M., Incipient fault diagnosis of nonlinear processes with multiple causes of faults, *Chemical Engineering Science*, **39**(1984), 491—508.
- [6] Bestle, D. & Zeitz, M., Canonical form observers design for nonlinear time-variable systems, *Int. J. Control*, **38**(1983), 419—431.
- [7] Li, C. W., & Tao, L. W., Observing nonlinear time-variable system through canonical form observers, *Int.*

*J. Control*, (in press).

- [ 8 ] Strejc, V., State space theory of discrete linear control, John Wiley & sons Co., (1981).  
[ 9 ] Ortega, J. M. & Rheinboldt, W. C., Iterative solution of nonlinear equations in several variables, Academic Press (1970).  
[10] 陶洛文, 方崇智, 一类非线性分布参数系统的鲁棒观测器, 第六届控制理论及其应用年会论文集, 上册, 369—372, 1986.

## OPTIMIZATION-BASED OBSERVER DESIGN FOR NONLINEAR DYNAMIC SYSTEMS

TAO LUOWEN    FANG CHONGZHI

(*Tsinghua University*)

### ABSTRACT

A new approach for nonlinear observer design is proposed in this paper, which can be used to find a suitable error weighting matrix and to determine the convergency exponent of the observer error by optimization technique. A nonlinear observer for a fluid pipeline is thus designed by this method as an application.