第14卷 第1期 自 动 化 学 报 Vol.14, No.1
1988 年 1 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 1988

一类鲁棒观测器的存在条件

葛 卫 方崇智
(清 华 大 学)

摘 要

本文给出一类鲁棒观测器的存在条件. 在此条件下, 系统状态的观测误差可以完全不受系统非线性因素、参数不准确及参数变化的影响. 数值实例验证了这一点.

一、引 言

线性系统的状态可以用 Luenberger 观测器重构[1]. 但若实际对象含有非线性因素、参数不准确及参数变化等非理想因素时,观测器误差可能会很大甚至发散.

K. Watanabe, K. C. Cheok, N. K. Loh 及 D. M. Himmelblau 提出了一种鲁棒观测器的设计方法,可以克服某一类非理想因素的影响[2,3,4],基本思想如下.

系统设为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+B\boldsymbol{u}(t)+Qf(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t), \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y}(t)=C\boldsymbol{x}(t). \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in R^n$ 为系统状态, $\boldsymbol{y}\in R^m$ 为输出, A、B、C、Q 是已知的常值矩阵, $Q\in R^{n\times l}$,

$$\operatorname{rank}(Q)=q, \tag{3}$$

$$\operatorname{rank}(C)=m. \tag{4}$$

$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)$ 代表系统 (1) 的所有非理想因素,它可以是一个未知的向量函数.

这类系统可以描述许多化工过程[5]及其它系统.

设 (A, C) 可检测, Luenberger 观测器为

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t)=F\boldsymbol{z}(t)+G\boldsymbol{y}(t)+TB\boldsymbol{u}(t), \tag{5}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t)=D\boldsymbol{z}(t)+H\boldsymbol{y}(t). \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{z}\in R^p$ 是观测器状态, $\hat{\boldsymbol{x}}$ 是系统 (1) 的状态 $\boldsymbol{x}$ 的估计. 观测器参数矩阵 F、G、T、D、H 应满足下述条件[1]:

$$TA-FT=GC, \tag{7-a}$$

$$DT+HC=I_n, \tag{7-b}$$

$$F\text{稳定}. \tag{7-c}$$

设

$$\Delta\hat{\boldsymbol{x}}(t)=\hat{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{x}(t), \tag{8}$$

本文于 1986 年 1 月 27 日收到.

$$e(t)=z(t)-Tx(t), \tag{9}$$

则由 (7-a) 和 (7-b) 可推得

$$\dot{e}(t)=Fe(t)-TQf(x, u, t), \tag{10}$$

$$\Delta\hat{x}(t)=De(t). \tag{11}$$

由上两式可知,只要选择 T 使得

$$TQ=0, \tag{12}$$

则状态估计的误差即可不受系统非理想因素 $f(x, u, t)$ 的影响.

Watanabe 和 Himmelblau 等人找到了一个设计 $n-m$ 维观测器使得 (12) 得到满足的巧妙方法. 文 [4] 给出了该方法有效的条件(文 [4] 中的定理及推论). 但该条件中包含有人为设定的参数(即文 [4] 中的矩阵 W), 这些人为参数对该条件的影响并不清楚. 然而, (7) 和 (12) 是否有解, 显然只取决于系统本身的参数 A、C、Q, 而与其它因素无关, 而且观测器维数大于 $n-m$ 的情形也应受到关注. 本文给出并证明了此类鲁棒观测器存在的充要条件(仅与 A、C、Q 有关), 得出了此类鲁棒观测器在维数大于 $n-m$ 时的一般表达式, 并用一个观测非线性系统状态的数值实例说明该表达式在设计时的应用. 附录给出文中几个引理的证明.

二、鲁棒观测器的存在条件

引理 1. (7-a)、(7-b)、(12) 有解的充要条件是

$$\mathrm{rank}(CQ)=\mathrm{rank}(Q). \tag{13}$$

引理 2. 设 (13) 成立, T 满足 (7-a)、(7-b)、(12), 则

$$T=S\cdot\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12}\\ S_{21} & S_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_0\\ P_0C\end{bmatrix} \tag{14}$$

其中 $S\in R^{p\times p}$ 和 $S_{11}\in R^{(n-m)\times(n-m)}$, 均为任意非奇异方阵, S_{12}、S_{21}、S_{22} 为恰当维的任意矩阵,

$$[CQ_1]^{\#}=([CQ_1]^T[CQ_1])^{-1}[CQ_1]^T, \tag{15}$$

$$P_0=I_m-CQ_1[CQ_1]^{\#}, \tag{16}$$

$$C_0=W(I_n-Q_1[CQ_1]^{\#}C). \tag{17}$$

W 为任意取定的 $(n-m)\times n$ 维矩阵,满足

$$\det\begin{bmatrix}C\\ W\end{bmatrix}\neq 0. \tag{18}$$

Q_1 由对 Q 做最大秩分解得到:

$$Q_1\in R^{n\times q},\quad Q_2\in R^{q\times l},\quad Q=Q_1\cdot Q_2, \tag{19}$$

$$\mathrm{rank}(Q_1)=\mathrm{rank}(Q_2)=\mathrm{rank}(Q). \tag{20}$$

引理 3. 设有 $W\in R^{(n-m)\times n}$ 满足 (18), 且记

$$\begin{bmatrix}C\\ W\end{bmatrix}^{-1}=[\bar{C}, \bar{W}], \tag{21}$$

其中 $\bar{C}\in R^{n\times m}$, $\bar{W}\in R^{n\times(n-m)}$, 则 (A, C) 与 $(WA\bar{W}, CA\bar{W})$ 的不可观测子系统的特

征值相同.

以上诸引理的证明在附录中给出.

鲁棒观测器存在定理. (7)、(12) 有解，当且仅当

$$(a)\ \operatorname{rank}(CQ)=\operatorname{rank}(Q), \tag{22}$$

$$(b)\ (A-Q_1[CQ_1]^{\#}CA,\ C)\ \text{可检测}. \tag{23}$$

证明：由引理 1 知条件 (a) 是 $(7\text{-}a)$、$(7\text{-}b)$、(12) 有解的充要条件，再由引理 2 得知此时 (14) 成立. 将 (14) 代入 $(7\text{-}a)$ 可推得：

$$\widetilde{F}=U^{-1}FU=\begin{bmatrix}C_0AD_0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+K\cdot\begin{bmatrix}P_0CAD_0 & 0\\ 0 & I_{p-n+m}\end{bmatrix}, \tag{24}$$

其中 $D_0\in R^{n\times(n-m)}$，且对于某个 $V_0\in R^{n\times m}$，有：

$$(V_0\ D_0)=\begin{bmatrix}C\\ C_0\end{bmatrix}^{-1}, \tag{25}$$

$$U=S\cdot\begin{bmatrix}S_{11} & 0\\ S_{21} & I_{p-n+m}\end{bmatrix}, \tag{26}$$

$$K=\begin{bmatrix}S_{11}^{-1}S_{12} & S_{11}^{-1}\overline{F}_{12}\\ S_{22}-S_{21}S_{11}^{-1}S_{12} & \overline{F}_{22}-S_{21}S_{11}^{-1}\overline{F}_{12}\end{bmatrix}, \tag{27}$$

其中 $\overline{F}_{12}\in R^{(n-m)\times(p-n+m)}$ 和 $\overline{F}_{22}\in R^{(p-n+m)\times(p-n+m)}$ 均是任意的，且有：

$$F=S\cdot\begin{bmatrix}\overline{F}_{11} & \overline{F}_{12}\\ \overline{F}_{21} & \overline{F}_{22}\end{bmatrix}S^{-1}. \tag{28}$$

由于K的 4 个分块矩阵都是可以任意选择的，则由 (24) 可知，$(7\text{-}c)$ 有解等价于 $(C_0AD_0,\ P_0CAD_0)$ 可检测. 由 (16)、(17) 可推得：

$$(C_0AD_0,\ P_0CAD_0)=(WA^*D_0,\ CA^*D_0), \tag{29}$$

其中，

$$A^*=A-Q_1[CQ_1]^{\#}CA. \tag{30}$$

由 (17)、(25) 可推得：

$$\begin{bmatrix}C\\ W\end{bmatrix}^{-1}=[\overline{C},\ D_0]. \tag{31}$$

于是由引理 3 可知，$(WA^*D_0,\ CA^*D_0)$ 可检测等价于 $(A^*,\ C)$ 可检测. 这就证明了条件 (b). 本定理得证.

将 (24) 和 (14) 代入 $(7\text{-}a)$ 可推得 G 的表达式：

$$G=S\begin{bmatrix}S_{11}C_0AV_0+S_{12}P_0CAD_0-\overline{F}_{11}S_{12}P_0-\overline{F}_{12}S_{22}P_0\\ S_{21}C_0AV_0+S_{22}P_0CAD_0-\overline{F}_{21}S_{12}P_0-\overline{F}_{22}S_{22}P_0\end{bmatrix}. \tag{32}$$

将 (14) 代入 $(7\text{-}b)$ 可得：

$$D=[D_0-\overline{D}_2S_{21}S_{11}^{-1},\ \overline{D}_2]S^{-1}, \tag{33}$$

$$H=V_0-D\begin{bmatrix}S_{12}\\ S_{22}\end{bmatrix}P_0, \tag{34}$$

其中 $\overline{D}_2\in R^{n\times(p-n+m)}$ 是任意的.

(14)、(24)—(27)、(32)—(34) 诸式就构成了任意维数 $(p\geqslant n-m)$ 的由 (5)、

(6)、(7)、(12) 定义的鲁棒观测器的一般表达式. 待定参数是诸矩阵 S、S_{11}、S_{12}、S_{21}、S_{22} 及 $\bar{F}_{12}$、$\bar{F}_{22}$、$\bar{D}_{20}$ 这些参数都将由极点配置、误差方差极小化等设计目标确定.

三、数值实例

设有一非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + 0.1x_2(t) + \cos(0.5x_2(t)), & (35) \\ \dot{x}_2(t) = 0.3x_1(t) - 0.5x_2(t) + 2\cos(0.5x_2(t)) + u(t), & (36) \\ y(t) = x_1(t). & (37) \end{cases}$$

第一步: 检验存在条件 (22)、(23).

容易算得: $CQ = 1$; $A^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2.3 & -0.7 \end{bmatrix}$, (A^*, C) 的不可观测子系统的特征值为 -0.7, 则 (22)、(23) 分别得到满足,于是鲁棒观测器存在.

第二步: 参数设计.

取 $W = (0, 1)$. 注意只要 $\det\begin{bmatrix} C \\ W \end{bmatrix} \neq 0$, 则最终设计结果不受$W$的影响. 由(16)、(17)、(25) 可算得:

$$P_0 = 0,\ C_0 = [-2, 1],\ V_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ D_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{38}$$

若不考虑减小噪声影响等问题,可以简单地采用最小维观测器, 即 $p = n - m$. 将 (38) 代入前节给出的鲁棒观测器的一般表达式得到:

$$\begin{cases} F = -0.7,\ G = 0.9S_{11},\ T = S_{11}(-2, 1) \\ D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} S_{11}^{-1},\ H = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \end{cases} \tag{39}$$

其中 S_{11} 可取不为 0 的任意值. 令 $S_{11} = 1$, 则得一鲁棒观测器为

$$\dot{z}(t) = -0.7z(t) + 0.9y(t) + u(t), \tag{40}$$

$$\hat{x}_1(t) = y(t), \tag{41}$$

$$\hat{x}_2(t) = z(t) + 2y(t). \tag{42}$$

仿真结果如下:

t	0	2	4	6	8	10	12	…
$\hat{x}_2(t) - x_2(t)$	10	2.47	0.61	0.15	0.037	0.0091	0.0025	…

四、结束语

(1) 在完成鲁棒性设计后,仍有一定的设计自由度可用以达到其它设计目的,如使误差方差较小等. 观测器维数越高,剩余的设计自由度越大.

(2) 由 (5)、(6)、(7)、(12) 定义的鲁棒观测器的最小维数是 $n - m$. 高维 ($p >$

$n-m$）鲁棒观测器的特征值由两部分组成，一部分是最小维鲁棒观测器的特征值，另一部分则是可任意配置的特征值。

（3）非理想因素 $f(x, u, t)$ 在影响状态 $x(t)$ 的同时，通过 $y(t)$ 影响到状态估计 $\hat{x}(t)$，从而有可能使估计误差 $\Delta\hat{x}=\hat{x}-x$ 不受非理想因素 $f(x, u, t)$ 的影响。因此，本文所给出的鲁棒观测器的存在条件，实质上就是系统输出 $y(t)$ 能够完全反映 $f(x, u, t)$ 的影响的条件。

参　考　文　献

[1] Luenberger, D. G., Observing the State of a Linear System, *IEEE Trans.* **MIL-8**(1964), 74—80.

[2] Watanabe, K., Cheok, K. C., and Loh, N. K., 20th IEEE Conf. Decision and Control (1981).

[3] Cheok, K. C., Watanabe, K., and Loh, N. K., IFAC Symp. Theory and Applic. Digital Control (1982).

[4] Watanabe, K., Himmelblau, D. M., Instrument Fault Detection of Systems with Uncertainties, *Int. J. Syst. Sci.*, **13**(1982), 137—158.

[5] Watanabe, K., and Himmelblau, D. M., Incipient Fault Diagnosis of Nonlinear Processes with Multiple Causes of Faults, *Chemical Engineering Sci.*, **39**(1984), 491—508.

附录：几个引理的证明

引理 1a. 当且仅当 T、C 的行可以生成 R^n 空间时，(7-a)、(7-b) 有解。

证明：(7-a)、(7-b) 可以写成

$$[F, G]\begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix}=TA, \quad [D, H]\begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix}=I_n. \tag{43}$$

则该引理显然。

引理 1. 设 (7-a)、(7-b)、(12) 有解，用 Q 右乘 (12) 得：

$$HCQ=Q, \tag{44}$$

由 (44) 可得 (13)，必要性得证。

设 (13) 成立．定义两线性空间如下：

$$\Omega_T=\{\gamma \mid \gamma\in R^{1\times n},\ \gamma Q=0\}, \tag{45}$$

$$\Omega_C=\{\beta \mid \beta=\rho C,\ \rho\in R^{1\times m}\}. \tag{46}$$

由 (3) 知 $\dim(\Omega_T)=n-q$，由 (4) 知 $\dim(\Omega_C)=m$，由 (13) 知 $\dim(\Omega_T\cdot\Omega_C)=m-q$，则有：

$$\dim(\Omega_T+\Omega_C)=\dim(\Omega_T)+\dim(\Omega_C)-\dim(\Omega_T\cdot\Omega_C)=n. \tag{47}$$

(47) 表明 $\Omega_T+\Omega_C=R^n$，由引理 1a，本引理得证．

引理 2a. (13) 成立时，P_0 的行可以生成 $\Omega_T\cdot\Omega_C$.

证明：由 (15)、(16) 知 $P_0CQ=0$，即 P_0 的行属于 $\Omega_T\cdot\Omega_C$．另外，由 (15) 知 $CQ_1[CQ_1]^{\#}$ 是秩为 q 的幂等矩阵，且是单纯矩阵，因此有：

$$\mathrm{rank}(P_0)=\mathrm{rank}(I_m-CQ_1[CQ_1]^{\#})=m-q, \tag{48}$$

即 $\dim(\Omega_T\cdot\Omega_C)=\mathrm{rank}(P_0)$，从而本引理得证．

引理 2. 证明：由 (17)、(18) 知 $\det\begin{bmatrix} C \\ C_0 \end{bmatrix}\neq 0$，从而对任意列数为 n 的矩阵 T，存在矩阵 S_1、S_2^*，使得

$$T=S_1C_0+S_2^*C. \tag{49}$$

(49) 代入 (12) 得 $S_2^*CQ=0$，即 S_2^* 的行属于 $\Omega_T\cdot\Omega_C$，由引理 2a，则存在矩阵 S_2，使得

$$S_2^*=S_2P_0. \tag{50}$$

(50) 代入 (49) 得：

$$T=[S_1, S_2]\begin{bmatrix} C_0 \\ P_0C \end{bmatrix}. \tag{51}$$

于是，(51) 给出了满足 (12) 的全体 T 矩阵，其中 S_1、S_2 任意．因为由 (16)、(17) 知对任意 S_1、S_2，(51) 满足 (12).

由引理 1a 知 (7-a)、(7-b) 被 (51) 满足的充分必要条件是 S_1 中含有 $n-m$ 维子式不为 0，从而 (51) 可以写

成(14)，本引理得证.

引理 3. 证明：设

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = g, \tag{52}$$

由(4)知 $g \geqslant m$. 由线性系统的理论知存在某一矩阵 $L \in R^{(n-m)\times n}$，使得

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} C \\ L \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} C \\ L \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} CAC^* & CAL^* \\ LAC^* & LAL^* \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} CAC^* & CAL_1^* & 0 \\ L_1AC^* & L_1AL_1^* & 0 \\ L_2AC^* & L_2AL_1^* & L_2AL_2^* \end{bmatrix}, \tag{53}$$

$$\bar{C} = C\begin{bmatrix} C \\ L \end{bmatrix}^{-1} = [I_m, 0, 0], \tag{54}$$

其中 $L_1 \in R^{(g-m)\times n}$, $L_2 \in R^{(n-g)\times n}$, $L_1^* \in R^{n\times(g-m)}$, $L_2^* \in R^{n\times(n-g)}$, $C^* \in R^{n\times m}$,

$$\begin{bmatrix} C \\ L \end{bmatrix}^{-1} = [C^*, L^*], \tag{55}$$

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}, \quad L^* = [L_1^*, L_2^*], \tag{56}$$

$$LAL^* = \begin{bmatrix} L_1AL_1^* & 0 \\ L_2AL_1^* & L_2AL_2^* \end{bmatrix}, \tag{57}$$

$$CAL^* = [CAL_1^* \ 0]. \tag{58}$$

根据(53)、(54)展开矩阵 $\bar{C}\bar{A}^k (k = 1, 2, \cdots, n-1)$，则对于某一个行变换（设变换矩阵为 $m \times n$ 阶非奇异方阵 Φ），可以有：

$$\begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} I_m & 0 & 0 \\ 0 & CAL_1^* & 0 \\ 0 & CAL_1^*(L_1AL_1^*) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & CAL_1^*(L_1AL_1^*)^{n-2} & 0 \end{bmatrix}. \tag{59}$$

由(52)、(59)可得：

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} CAL_*^1 \\ CAL_1^*(L_1AL_1^*) \\ \vdots \\ CAL_1^*(L_1AL_1^*)^{n-2} \end{bmatrix} = g - m. \tag{60}$$

(60)表明 $(L_1AL_1^*, CAL_1^*)$ 是可观测的. 于是由(57)、(58)知 (LAL^*, CAL^*) 的不可观测子系统的特征值为矩阵 $L_2AL_2^*$ 的特征值. 由于 $L_2AL_2^*$ 的特征值，同时又是 (A, C) 的不可观测子系统的特征值，则对于 $W = L$ 的特殊情形，本引理得证.

对于任意使 $\det\begin{bmatrix} C \\ W \end{bmatrix} \neq 0$ 的矩阵 W，存在矩阵 P_1、P_2 使得

$$W = P_1C + P_2L, \tag{61}$$

且

$$\det(P_2) \neq 0. \tag{62}$$

由(21)、(55)、(61)、(62)可推得：

$$\overline{W} = L^*P_2^{-1}, \tag{63}$$

则

$$WA\overline{W} = P_2LAL^*P_2^{-1} + P_1CAL^*P_2^{-1}, \tag{64}$$
$$CA\overline{W} = CAL^*P_2^{-1}. \tag{65}$$

上两式表明，$(WA\overline{W}, CA\overline{W})$ 是由 (LAL^*, CAL^*) 经坐标变换和输出反馈得到的，因此二者的不可观测子系统的特征值相同，本引理得证.

CONDITIONS FOR THE EXISTENCE OF ONE TYPE OF ROBUST OBSERVERS

GE WEI FANG CHONGZHI
(*Tsinghua University*)

ABSTRACT

Necessary and sufficient conditions for the existence of one type of robust observers are proposed and proved in this paper. Under such conditions, it is possible to design a state observer, the estimation error of which is totally unaffected by the nonlinearities, parameter uncertainties and parameter variations of the system to be observed.

全国办公自动化学术会议

征 文 通 知

中国自动化学会综合办公自动化专业委员会、中国仪器仪表学会办公自动化学会、中国计算机学会办公自动化学组、中国电子学会计算机工程与应用学会中文信息处理与办公自动化学组，订于1988年9月下旬在沈阳联合召开全国办公自动化学术会议．征文内容如下：

办公自动化系统的系统分析和几种典型的办公自动化的活动模型；办公自动化系统的系统结构与系统描述方法；办公自动化系统的系统集成技术；办公自动化系统的设计与方法论；办公自动化系统开发环境与开发工具；办公自动化系统中系统、设备接口标准化与规范研究；办公自动化的人机接口技术；用于办公自动化系统的工作站设计与实现；办公自动化系统及其专用设备的研制与介绍；人工智能、语音识别、文字识别、图象处理技术在办公自动化中应用；通讯技术(包括局部网、PBX等)、分布式数据库、分布式信息处理技术与计算机辅助决策系统的研究；电子邮件、电子会议、电子文档系统和电子印刷系统；办公自动化系统中各种应用软件；人与办公自动化系统的关系研究；发展我国办公自动化系统的战略和展望．

应征论文必须未在国内学术会议和刊物上发表过的．论文一般不超过8000字，字迹要端正，图例要清楚．论文前必须附有不超过500字的摘要，论文及摘要截止到1988年3月31日前寄出． 论文寄各所属学会专业委员会或学组初审，然后四个学会集中复审．不属上述四个专业委员或学组的论文请寄东北工学院计算机系赵秉智． 论文录用通知将于1988年6月初发出．

稿件请寄：中国自动化学会综合办公自动化专业委员会
中国仪器仪表学会办公自动化学会
中国计算机学会办公自动化学组
中国电子学会计算机工程与应用学会中文信息处理与办公自动化学组．

中国自动化学会综合办公室自动化专业委员会
一九八七年九月三十日