

基于特征结构配置的最小灵敏度控制器设计

施颂椒 王跃云

(上海交通大学)

摘 要

本文描述了一种多变量控制系统的最小灵敏度控制器的设计方法。该方法除将闭环系统的特征值配到给定点外,还利用状态反馈所剩余的自由度,对闭环特征向量实行部分配置,以满足其它设计指标,如低参数灵敏度和良好的响应特性等。设计举例和仿真表明,采用这种最小灵敏度控制器,被控系统既能获得满意的瞬态响应,又能降低状态轨迹对参数扰动的灵敏度。本设计采用的算法是以解矩阵 Sylvester 方程为主。

一、引 言

多变量控制几何理论指出^[1],用状态反馈配置 $\sigma(A + BF)$ 仅仅部分地满足了系统的某些设计要求。一个值得探讨的问题是,如何利用 F 所剩余的自由度,使系统满足更多的理想性质。这些性质关系到诸如瞬态响应的超调量和参数的灵敏度等等。对于这方面的研究,文献[2]曾用并矢状态反馈,配置了具有最小灵敏度的系统特征值。然而这种方法丢失了大量的反馈自由度,而且要进行坐标变换,所以计算复杂。

本文采用寻优配置特征结构的方法设计最小灵敏度控制器。其优点是:1)在分析了状态轨迹灵敏度与状态响应的关系的基础上,制定了系统设计的多目标函数 J 。通过优化设计,使闭环系统不仅具有满意的瞬态响应特性,而且具有抗参数变化的能力;2)充分利用了配置 $\sigma(A + BF)$ 以外的全部反馈自由度,对提高系统的性能有显著效果;3)算法简单,无需进行坐标变换,以解矩阵 Sylvester 方程为主。文章最后的设计举例表明,本方法是有效的。

二、控制问题描述

设一含有变化参数的被控对象为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\mathbf{a})x + B(\mathbf{a})u, \\ y &= C(\mathbf{a})x. \end{aligned} \quad (1)$$

式中 $x \in R^n$ 为状态向量, $u \in R^m$ 为输入控制, $y \in R^p$ 为量测输出,矩阵 $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $C \in R^{p \times n}$ 。而向量 $\mathbf{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r]'$ 为对象中变化缓慢的物理参数,其名义值用

$\alpha_0 = [\alpha_{10}, \alpha_{20}, \dots, \alpha_{r0}]'$ 表示. 对于方程(1), 令 $A_0 = A(\alpha_0)$, $B_0 = B(\alpha_0)$, $C_0 = C(\alpha_0)$. 定义 $\Sigma(A_0, B_0, C_0)$ 为名义系统.

1. 特征结构配置

考虑如下 Sylvester 矩阵方程

$$A_0V - VA^* = -B_0U. \quad (2)$$

其中 $V \in R^{nn}$, $A^* \in R^{nn}$, $U \in R^{mn}$. 对于可控的名义系统 $\Sigma(A_0, B_0, C_0)$, 如果满足 $\sigma(A_0) \cap \sigma(A^*) = \phi$, 则对任意的矩阵 U , 方程(2)存在唯一解 $V^{[3]}$. 且对几乎所有的矩阵 U , 方程的解 V 是非奇异的. 若给定一组期望的闭环特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (设它们为互不相同的实数). 令 $A^* = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 并将 $U = FV$ 代入方程(2), 设 V^{-1} 存在. 经整理后有

$$V^{-1}(A_0 + B_0F)V = A^*. \quad (3)$$

所以矩阵 $(A_0 + B_0F)$ 具有期望的特征值, 矩阵 V 的各列即为 $(A_0 + B_0F)$ 的特征向量. 由于给定不同的 U , 可以得到不同的 V . 因此利用方程(2), 可以配置闭环系统的特征结构. 而反馈矩阵 F 可由下式确定

$$F = UV^{-1}. \quad (4)$$

2. 最小灵敏度控制器

(4)式中的 U 是几乎可以任意选取的. 这表明配置一组特定的闭环特征值时, F 不是唯一的. 因此希望找到一个最佳的 U^* , 由此确定 $F = U^*V^{-1}$. 使系统 (1) 在控制 $u = Fx(t, \alpha)$ 的作用下, 满足 $\sigma(A_0 + B_0F) = \{\lambda_i\}$, 且状态响应 $x(t, \alpha_0)$ 具有良好的瞬态特性. 同时要求当参数向量有扰动时, 即 $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$, 状态轨迹 $x(t, \alpha)$ 偏离 $x(t, \alpha_0)$ 最小. 满足这类要求的反馈阵 F 称为最小灵敏度控制器.

三、多目标函数

闭环系统 $\Sigma(A_0 + B_0F, B_0, C_0)$ 的状态响应可用谱展开的形式表示

$$x(t, \alpha_0) = \sum_{i=1}^n v_i(t'_i x_0) e^{\lambda_i t}, \quad t'_i v_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (5)$$

式中 λ_i 为 $(A_0 + B_0F)$ 的特征值; t_i, v_i 为相应的左特征向量和右特征向量; x_0 为状态初值. 式(5)表明状态轨迹对参数扰动的灵敏度将取决于闭环特征值和特征向量的灵敏度.

假定(1)中的参数 α 为一标量, 令 $S = \frac{d}{d\alpha} (A + BF)|_{\alpha=\alpha_0} = \left(\frac{dA}{d\alpha} + \frac{dB}{d\alpha} F \right)_{\alpha=\alpha_0}$, 同

时定义扰动矩阵为

$$P = TSV = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nn} \end{bmatrix}, \quad \beta_{ij} = t'_i S v_j, \quad i \in n, \quad j \in n. \quad (6)$$

上式中 $T = V^{-1}$. 根据矩阵的摄动理论^[4], 当 α 在 α_0 的附近扰动时, 可以求得系统的特征值和特征向量的灵敏度为

$$\frac{d\lambda_i}{d\alpha} = \beta_{ii}, \quad \frac{dt'_i}{d\alpha} = \sum_{j \neq i} \frac{\beta_{ij}}{\lambda_j - \lambda_i} t'_j, \quad \frac{dv_i}{d\alpha} = \sum_{j \neq i} \frac{\beta_{ji}}{\lambda_j - \lambda_i} v_j, \quad i \in n. \quad (7)$$

1. 参数灵敏度与超调量的关系

由 $1 = t'_i v_i = \|t_i\| \|v_i\| \cos \theta_i$ 知, $\|t_i\| \|v_i\| \geq 1$. 若有 $\|t_i\| \geq 1$ 和 $\|v_i\| \geq 1$, 并假定当 $j \neq i$ 时, $|\lambda_j - \lambda_i| \geq 1$. 根据 (6)–(7) 式, 应用欧几里德范数不等式的性质可以得到

$$\left| \frac{d\lambda_i}{d\alpha} \right| \leq \|t_i\| \|v_i\| \|S\| \|v_i\|, \quad \left\| \frac{dv_i}{d\alpha} \right\| \leq \left(\sum_{j \neq i} \|t_j\| \|v_j\| \right) \|S\| \|v_i\|. \quad (8)$$

定义条件数 $H = \sum_{i=1}^n \|t_i\| \|v_i\|$, 将 (8) 式的两个不等式相加

$$\left(\left| \frac{d\lambda_i}{d\alpha} \right| + \left\| \frac{dv_i}{d\alpha} \right\| \right) \leq H \|S\| \|v_i\| \quad \text{或} \quad \left(\left| \frac{d\lambda_i}{d\alpha} \right| + \left\| \frac{dv_i}{d\alpha} \right\| \right) / \|S\| \leq H \|v_i\|. \quad (9)$$

同理可证对于左特征向量的灵敏度有

$$\left(\left| \frac{d\lambda_i}{d\alpha} \right| + \left\| \frac{dt_i}{d\alpha} \right\| \right) / \|S\| \leq H \|t_i\|. \quad (10)$$

顺便指出, 即使对某一对下标 (l, k) , 有 $|\lambda_l - \lambda_k| < 1$, 也可以得到类似于 (9), (10) 式的不等式. 另一方面, 根据等式 (5) 有

$$\|x(t, \alpha_0)\| \leq \sum_{i=1}^n \|t_i\| \|v_i\| \|x_0\| e^{\lambda_i t} \leq \left(\sum_{i=1}^n \|t_i\| \|v_i\| \right) \|x_0\| \max_i e^{\lambda_i t}$$

或

$$\|x(t, \alpha_0)\| / \|x_0\| \leq H \max_i e^{\lambda_i t}. \quad (11)$$

由不等式 (9)–(11) 可知: 减小条件数 H , 既能限制状态响应 $x(t, \alpha_0)$ 的超调量, 又能降低状态轨迹对参数变化的灵敏度. 扰动矩阵 P 中的元素也可以度量 $x(t, \alpha)$ 的灵敏度 (见式 (7)). 事实上, 若对某个下标 i , 有

$$[\beta_{1i}, \beta_{2i}, \dots, \beta_{ni}]' = 0, \quad [\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{in}] = 0, \quad (12)$$

由 (7) 式直接推得 $\frac{d\lambda_i}{d\alpha} = 0, \quad \frac{dt'_i}{d\alpha} = 0, \quad \frac{dv_i}{d\alpha} = 0$.

2. 多目标函数

基于上述分析, 选取设计低灵敏度控制器的目标函数如下:

$$J = J_1 + hJ_2 \quad (h \text{ 为加权因子}), \quad (13)$$

$$J_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij}^2 = \frac{1}{2} \text{tr } P'P,$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\|v_i\| + \|t_i\|) = \frac{1}{2} \text{tr}(V'V + TT'). \quad (14)$$

一般还可取 $J_1 = \frac{1}{2} \text{tr } G_1 P' G_2 P$, $G_1 = \text{diag}(g_1, g_2, \dots, g_n)$, $G_2 = \text{diag}(f_1, f_2, \dots, f_n)$. 如果设计者强调减小第 i 个特征值和特征向量的灵敏度. 根据 (12) 式, 可令 $G_1 = \text{diag}(1, \dots, 1, g_i, 1, \dots, 1)$, $G_2 = \text{diag}(1, \dots, 1, f_i, 1, \dots, 1)$, 其中权因子 g_i 和 f_i 取值大于 1. 减

小指标 J_2 就可减小条件数 H , 从而既能限制瞬态响应的超调量, 又能降低状态轨迹的灵敏度. 另一方面, 由于 $F = UT$, 则 $\|F\| \leq \|U\|\|T\|$. 减小指标 J_2 也减小了范数 $\|F\|$.

因为方程(2)的解 V 依赖于矩阵 U , 所以目标函数 J 应是矩阵 U 的函数, 表示为 $J = J(U)$. 通过优化目标函数, 可以获得最佳的 U^* , 并求得 $F = U^*V^{-1}$.

四、控制器设计

考虑被控系统(1), 当变化的参数 α 为一向量时, 可以将上节的结论进行推广. 定义

$$S_i = \left. \frac{\partial A}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial B}{\partial \alpha_i} F \right|_{\alpha_i = \alpha_{i0}}, \text{ 第 } i \text{ 个扰动矩阵为}$$

$$P_i = TS_iV. \quad (15)$$

取目标函数

$$J = \sum_{i=1}^r J_{i1} + hJ_2, \quad J_{i1} = \frac{1}{2} \text{tr } P_i'P_i, \quad i \in r. \quad (16)$$

最小灵敏度控制器的设计过程可分作如下三步:

1) 按设计要求, 选定一组期望的闭环特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 令 $A^* = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

2) 优化目标函数(可采用共轭梯度法), 使 $J(U^*) \leq J(U)$. 目标函数的最速下降方向可确定为(设 $h = 1$)

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial U} = B_0'X' + \sum_{i=1}^r \frac{\partial B_0'}{\partial \alpha_{i0}} T'P_i, \\ A^*X - XA_0 = MT. \end{cases} \quad (17)$$

上式中 $M = \sum_{i=1}^r (P_i'R_i - P_iP_i') + V'V - TT'$, $R_i = T \frac{\partial A_0}{\partial \alpha_{i0}} V$ (证明见附录).

3) 当满足 $J(U^*) \leq J(U)$ 后, 解方程 $A_0V - VA^* = -B_0U^*$. 计算

$$F = U^*V^{-1}. \quad (18)$$

在设计系统时, 往往需要给系统配置一对复共轭特征值, $\lambda_1 = -\sigma + j\omega, \lambda_2 = -\sigma - j\omega$. 这时设计步骤 2) 和 3) 保持不变, 只要在步骤 1) 令

$$A^* = \begin{bmatrix} \sigma & \omega & & 0 \\ -\omega & \sigma & & 0 \\ & & \lambda_3 & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (19)$$

如果共轭复数 $\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ 是作为系统的主导极点, 可以将它们配到复平面上给定的点, 而其它特征值只要配到某一区域内. 例如

$$a_i \leq \lambda_i \leq b_i, \quad i = 3, \dots, n. \quad (20)$$

其中 a_i, b_i 为实数, $b_i \ll \sigma$. 解受不等式(20)约束的优化问题 $J = J(\lambda_3, \dots, \lambda_n, U)$, 能获得更多的自由度来改善系统的性能.

五、设计实例及仿真

例 考虑一被控对象

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1.38 & -0.2077 & 6.715 & -5.676 \\ -0.5814 & -4.29 & 0.0 & 0.675\alpha_1 \\ 1.067 & 4.273/\alpha_2 & -6.654 & 5.893 \\ 0.048\alpha_1 & 4.273 & 1.343 & -2.704 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 5.679 & 0.0 \\ 1.136 & -3.146 \\ 1.136\alpha_3 & 0.0 \end{bmatrix} u.$$

参数向量 $\alpha = [\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3]'$, 其名义值 $\alpha_0 = [1, 1, 1]'$. 由于 $\sigma(A(\alpha_0)) = \{0.0632, 1.991, -5.057, -8.666\}$, 所以名义系统是不稳定的. 现要求设计一最小灵敏度控制器, 将矩阵 $(A_0 + B_c F)$ 的特征值配到 $\lambda_1 = -2.0 + j2.0$, $\lambda_2 = -2.0 - j2.0$, $\lambda_3 = -4.0$, $\lambda_4 = -5.0$.

在用 IMS-8000 微型机设计此系统时, 按控制器的设计步骤, 先任选了一个矩阵 U^0 , 求得目标函数值 $J(U^0) > 10^8$. 对目标函数进行优化后 $J(U^*) = 55$. 又由 $F_0 = U_0 V^{-1}$ 和 $F = U^* V^{-1}$, 分别算得各自的反馈矩阵为

$$F_c = \begin{bmatrix} -4.8657 & -0.6260 & -6.8609 & 5.1989 \\ 0.2383 & 0.0546 & -1.3135 & 1.3337 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 0.2652 & -0.0849 & 0.1396 & -0.3364 \\ 0.9907 & 2.1678 & 0.1992 & 1.5222 \end{bmatrix}.$$

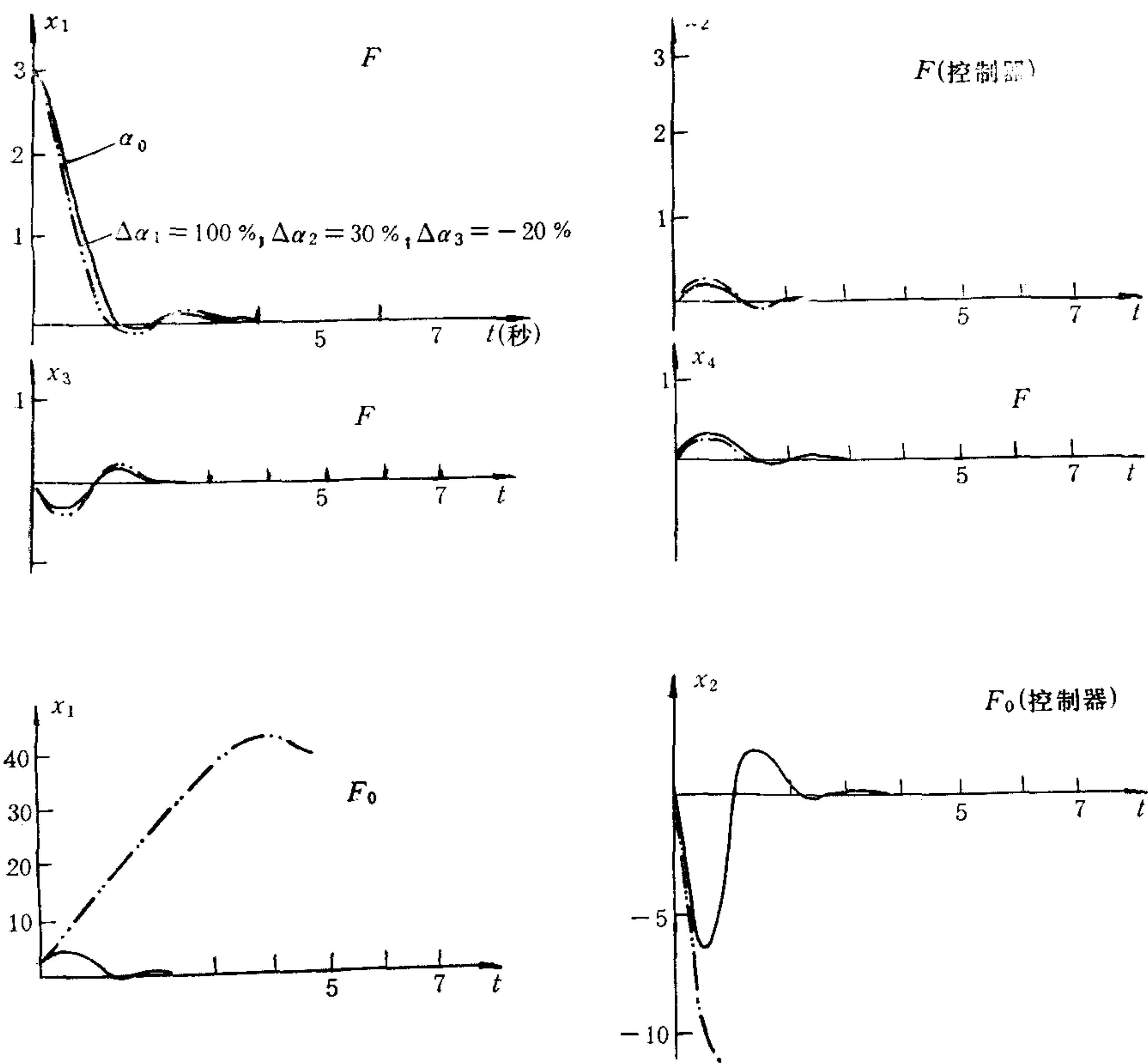


图 1 系统的时域响应, 初值 $x_0 = [3000]'$

经验证,有 $\sigma(A_c + B_0 F_0) = \sigma(A_0 + B_0 F) = \{-2 \pm j2, -4, -5\}$, 且 $\|F\| < \|F_0\|$. 假定由于某种原因, 参数向量 α 出现了扰动, 它们的相对变化率为 $\Delta\alpha_1/\alpha_{10} = 100\%$, $\Delta\alpha_2/\alpha_{20} = 30\%$, $\Delta\alpha_3/\alpha_{30} = -20\%$. 这时由控制器 F_0 构成的闭环系统变成了不稳定系统. 而由控制器 F 构成的闭环系统仍能保持原来良好的调节性能. 为便于对两个控制器进行比较, 图 1 给出了这两个闭环系统的时域响应. 状态初值 $x_c = [3000]'$ 为任意给定.

六、结 论

本文介绍了最小灵敏度控制器的设计方法. 该方法利用状态反馈, 为名义系统配置了最佳的闭环特征结构, 使名义系统具有良好的瞬态响应特性. 当系统(1)的参数向量 α 偏离名义值时, 通过反馈的作用, 可以降低系统对参数变化的灵敏度, 从而保持了系统原有的设计性能.

附 录

证明第四节第(17)式. 这里仅就参数 α 为标量的情况给予证明, 当 α 为向量的情况, 可作类似推广.

令 u_{ij} 为矩阵 U 的第 (i, j) 元, u_j 为矩阵 U 的第 j 列.

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_2}{\partial u_{ij}} &= \text{tr} \left(V' \frac{\partial V}{\partial u_{ij}} - T \frac{\partial V}{\partial u_{ij}} T T' \right) = \text{tr} \left(V' V T \frac{\partial V}{\partial u_{ij}} - T T' T \frac{\partial V}{\partial u_{ij}} \right) \\ &= \text{tr} (V' V - T T') T \frac{\partial V}{\partial u_{ij}} = \text{tr} D T \frac{\partial V}{\partial u_{ij}}. \end{aligned} \quad (21)$$

根据方程(2), 有 $v_j = (\lambda_j I - A_0)^{-1} B_0 u_j$, $j \in n$. 求得 $\frac{\partial V}{\partial u_{ij}}$ 并代入(21).

$$\frac{\partial J_2}{\partial u_{ij}} = \text{tr} D T [0, \dots, 0 (\lambda_j I - A_0)^{-1} B_0 e_i 0, \dots, 0] = \text{tr} [0, \dots, 0 D T (\lambda_j I - A_0)^{-1} B_0 e_i 0, \dots, 0]. \quad (22)$$

式中 e_i 为 $m \times 1$ 维列向量 $e_i = [0, \dots, 0 \underset{i}{1} 0, \dots, 0]'$. 令 d'_i 为 D 的第 i 行, 则

$$\frac{\partial J_2}{\partial u_{ij}} = d'_i T (\lambda_j I - A_0)^{-1} B_0 e_i.$$

或

$$\left(\frac{\partial J_2}{\partial u_j} \right)' = d'_i T (\lambda_j I - A_0)^{-1} B_0 [e_1 e_2 \dots e_m] = d'_i T (\lambda_j I - A_0)^{-1} B_0 = y'_j B_0. \quad (23)$$

式中 $y'_j = d'_i T (\lambda_j I - A_0)^{-1}$. 或写为

$$\lambda_j y'_j - y'_j A_0 = d'_i T. \quad (24)$$

将(24)式由 $j = 1$ 到 n 按行排列, 可组成矩阵方程

$$A^* Y - Y A_0 = D T. \quad (25)$$

其中矩阵 Y 的第 j 行为 y'_j . 再由(23)式

$$\left(\frac{\partial J_2}{\partial U} \right)' = Y B_0, \quad \text{或} \quad \frac{\partial J_2}{\partial U} = B_0' Y', \quad (26)$$

用同样的方式可以证明

$$\begin{cases} \frac{\partial J_1}{\partial U} = B'_0 Z' + \frac{\partial B'_0}{\partial \alpha_0} T' P, \\ A^* Z - Z A_0 = (P' R - P P') T. \end{cases} \quad (27)$$

令 $X = Y + Z$, 由导数的可加性 $\frac{\partial J}{\partial U} = \frac{\partial J_1}{\partial U} + \frac{\partial J_2}{\partial U}$, 即得第四节第(17)式. 证毕.

参 考 文 献

- [1] Wonham, W. M., *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*, New York, Springer-Verlag, (1974).
- [2] Gourishankar, V. and Zaokowski, G. V., Minimum Sensitivity Controllers with Application to VTOL Aircraft, *IEEE. Trans. Aerospace and Electronic Systems*, 16(1980), 217—226.
- [3] Kailath, T., *Linear Systems*, Prentice-Hall, (1980).
- [4] Wilkinson, J. H., *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Oxford Univ. Press (1965), 62—75.

DESIGN OF MINIMUM SENSITIVITY CONTROLLERS BY EIGENSTRUCTURE ASSIGNMENT

SHI SONGJIAO WANG YUEYUN

(Shanghai Jiao Tong University)

ABSTRACT

A procedure for the design of minimum sensitivity controllers of multivariable control systems is described in this paper. Besides assigning the closed-loop eigenvalues to the specified points, the remaining degrees of freedom of the state feedback are utilized to partially assign closed-loop eigenvectors to meet other design properties, such as low parameter sensitivity and good response. A design example and simulation show that with this controller, the controlled system can both achieve satisfactory transient characteristics and reduce trajectory sensitivity to parameter perturbation. The computational approach is based on the solution of the matrix Sylvester equation.