第 14 卷 第 2 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 14, No. 2
1988 年 3 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Mar., 1988

利用图象的估计值平滑噪声的一种方法

王　欣
(山东工业大学)

摘　　要

本文给出了直接计算图象的二维 Bayes 估计稳态增益的公式. 由此公式，提出了一种平滑图象噪声的方法.

一、引　　言

对叠加白噪声的图象,可以采用线性或非线性的方法进行处理[1,2].

本文首先给出了直接计算图象的二维 Bayes 估计稳态增益的公式,进而提出了一种平滑图象噪声的方法. 由于利用了图象的相关等统计特性，故在计算量增加不多的情况下,获得了较好的效果.

二、图象的二维 Bayes 估计稳态增益的直接算法

实际经验表明,对于一般图象离散归一化后,具有下述的相关函数[3]:

$$R(\alpha,\beta)=a_1^{|\alpha|}a_2^{|\beta|}. \tag{1}$$

其中 a_1, a_2 分别表示图象垂直和水平方向的相关系数,其值可从原始图象中采用估计的方法求出[4]. 在 (1) 式条件下,原始图象 $x(m,n)$ 适合下述差分方程[1]:

$$x(m,n)=a_1x(m-1,n)+a_2x(m,n-1)-a_1a_2x(m-1,n-1)+\sqrt{(1-a_1^2)(1-a_2^2)}\,w(m,n). \tag{2}$$

这里 m, n 取自然数; $w(m,n)$ 是零均值;方差为 $\sigma_0^2=1$ 的高斯白噪声.

当图象叠加零均值,方差为 σ^2 的高斯白噪声 $v(m,n)$ 后,所得图象

$$y(m,n)=x(m,n)+v(m,n). \tag{3}$$

为从观测值 $y(m,n)$ 求出图象的最佳估计值 $\hat{x}(m,n)$, 文献 [1] 给出了一个递推公式. 文献 [5] 给出了改进的形式

$$\hat{x}(m,n)=d_1\hat{x}(m-1,n)+d_2\hat{x}(m,n-1)-d_3\hat{x}(m-1,n-1)+K_{mn}y(m,n). \tag{4}$$

其中 K_{mn} 是增益; $d_1=(1-K_{mn})a_1$; $d_2=(1-K_{mn})a_2$; $d_3=(1-K_{mn})a_1a_2$.

虽然在平稳的情况下，K_{mn} 趋于常值 K，但它的递推算法是十分复杂的. 下面，将

本文于 1986 年 5 月 11 日收到.

给出稳态增益K的直接计算公式.

令 $B_{mn}=\{(p,q)|0\leqslant p\leqslant m,\ 0\leqslant q\leqslant n\}$ 表示图象中开始m行n列中的所有象点. 这样,作为图象的最佳估计值 $\hat{x}(m,n)$, 必须满足下述正交条件:

$$E\{[x(m,n)-\hat{x}(m,n)]y(p,q)\}=0. \tag{5}$$

其中E表示数学期望; $(p,q)\in B_{mn}$.

文献 [5] 推导图象的"二维 Bayes 估计"增益时,利用了在 (m,n) 点处必须满足正交的这一必要条件,即

$$E\{[x(m,n)-\hat{x}(m,n)]y(m,n)\}=0. \tag{6}$$

因此,如果能证明满足 (6) 式的K值是唯一存在的,那么K值显然就是图象的二维 Bayes 估计的稳态增益.

设 $y(m,n)$ 是输入, $\hat{x}(m,n)$ 是输出. 对 (4) 式进行二维 z 变换,可得传递函数

$$H(z_1^{-1},z_2^{-1})=K_{mn}/(1-d_1z_1^{-1}-d_2z_2^{-1}+d_3z_1^{-1}z_2^{-1}). \tag{7}$$

设上式可展成

$$H(z_1^{-1},z_2^{-1})=K_{mn}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}h_{ij}z_1^{-1}z_2^{-1}. \tag{8}$$

这里 $h_{00}=1$, 对其余 h_{ij} 并不需要求出. 因此,可以把 $\hat{x}(m,n)$ 写成卷积形式

$$\hat{x}(m,n)=K_{mn}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}h_{ij}y(m-i,n-j). \tag{9}$$

代入 (5) 式,并利用 (1),(2) 两式及 $w(m,n)$, $v(m,n)$ 的不相关特性,可得[6]

$$K_{mn}\left[\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}h_{ij}a_1^{|\alpha-i|}a_2^{|\beta-j|}+h_{\alpha\beta}\sigma^2\right]=a_1^{|\alpha|}a_2^{|\beta|}. \tag{10}$$

其中 $\alpha=m-p$; $\beta=n-q$.

正交条件 (6) 式相当于 $p=m$, $q=n$. 把它们代入上式,并令 $K_{mn}=K$, 则有

$$K\left[\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}h_{ij}a_1^ia_2^j+h_{00}\sigma^2\right]=1. \tag{11}$$

为了求出上式左端括号内二重和的值, 可把 $z_1^{-1}=a_1$, $z_2^{-1}=a_2$ 代入 (7), (8) 两式. 比较等式两边,可以得出

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}h_{ij}a_1^ia_2^j=1/(1-d_1a_1-d_2a_2+d_3a_1a_2). \tag{12}$$

把上式及 $h_{00}=1$ 代入 (11) 式

$$K/(1-d_1a_1-d_2a_2+d_3a_1a_2)+K\sigma^2=1. \tag{13}$$

把 $d_1=(1-K)a_1$, $d_2=(1-K)a_2$ 和 $d_3=(1-K)a_1a_2$ 代入上式, 并令 $s^2=a_1^2+a_2^2-a_1^2a_2^2$, 则有

$$\sigma^2s^2K^2+(1+\sigma^2)(1-s^2)K-(1-s^2)=0. \tag{14}$$

由于 $0<a_1, a_2<1$, 故 $0<s^2<1$, 因而上式对于K, 有且仅有唯一的正根

$$K=[\sqrt{(1+\sigma^2)^2(1-s^2)^2+4(1-s^2)\sigma^2s^2}-(1+\sigma^2)(1-s^2)]/2\sigma^2s^2. \tag{15}$$

这样,证明了满足 (6) 式的稳态增益K是唯一存在的,并且可由 (15) 式直接算出. 由于文献 [5] 中在利用递推方法求K值时, 同样使用了 (6) 式. 根据上述存在唯一解的结

论，便知 (15) 式实际也给出了"图象的二维 Bayes 估计"稳态增益的计算公式．这里，需要进一步指出的是：当 $a_2 = 0$ 时，(2),(3) 两式变为一维的情形．而 (15) 式则给出了相应的最佳估计的稳态增益值．

三、利用图象的估计值平滑噪声的方法

如何利用图象的邻域特性来增强图象，已经提出了很多方法[7,8,9]．下面将给出利用图象的二维 Bayes 估计值 $\hat{x}(m, n)$ 平滑噪声的一种方法．

当原始图象给定后，利用 (4) 式和 (15) 式便可以很快地算出 $x(m, n)$ 的估计值 $\hat{x}(m, n)$．令处理后图象右 (m, n) 点处的值

$$g(m, n) = \begin{cases} \hat{x}(m, n), & |\hat{x}(m, n) - y(m, n)| \leqslant \sigma. \\ A(m, n), & |\hat{x}(m, n) - y(m, n)| > \sigma. \end{cases} \tag{16}$$

其中 σ 表示图象中噪声的均方差；$A(m, n)$ 表示在原始图象 (m, n) 处相邻 8 个点灰度的平均值．上述方法，具有较好的保护边缘和平滑噪声的功能．

例．

如图 1 所示，框上的一串字符 (包括空格) 表示从 0—7 的 8 个灰度级．其中黑块是 12×12，其值为 6.1 的象点．框内其余象点的灰度值是 -1[10]，整个图象的灰度均值约为零．通过计算，$\sigma_0^2 = 6.1$，$a_1 = a_2 \doteq 0.89$．在图 1 上叠加零均值，方差 $\sigma^2 = 9$ 的高斯白噪声后得到图 2．由 (15) 式求得 $K \doteq 0.133$．因此，$d_1 = d_2 \doteq 0.779$，$d_3 \doteq 0.699$．图 3 是利用 (4) 式对图象进行"二维 Bayes 估计"后的图象，信噪比约改进 6.9 dB．图 4 是利用 (16) 式对图 2 处理的结果，信噪比约改进 7.4 dB．

(16) 式中 $A(m, n)$ 的值，亦可选用"中值滤波"等其它处理方法的结果代替．这样，有可能得到更好的处理效果．

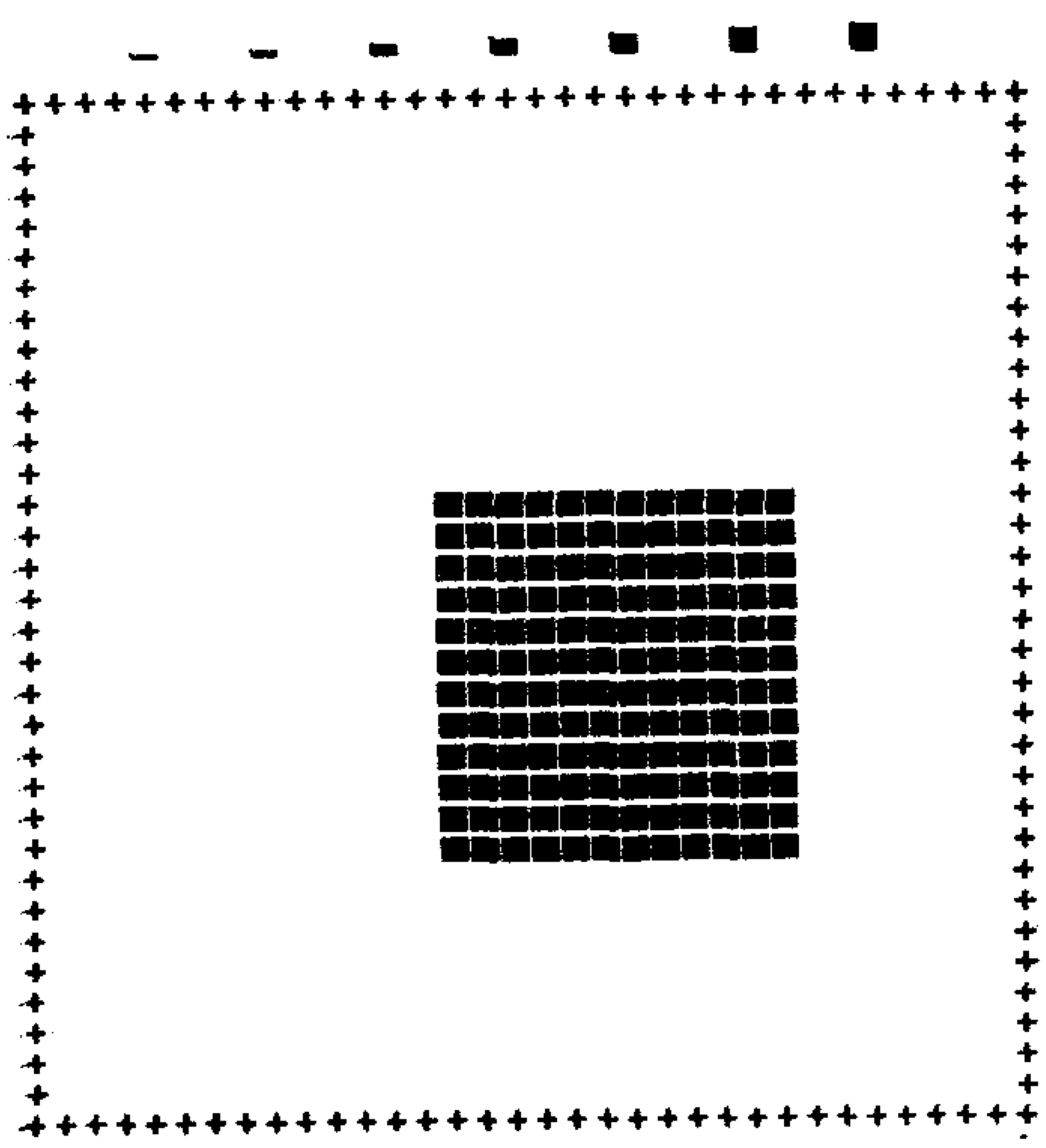

图 1　原始图象 $\sigma_0^2 \doteq 6.1$，$a_1 = a_2 \doteq 0.89$

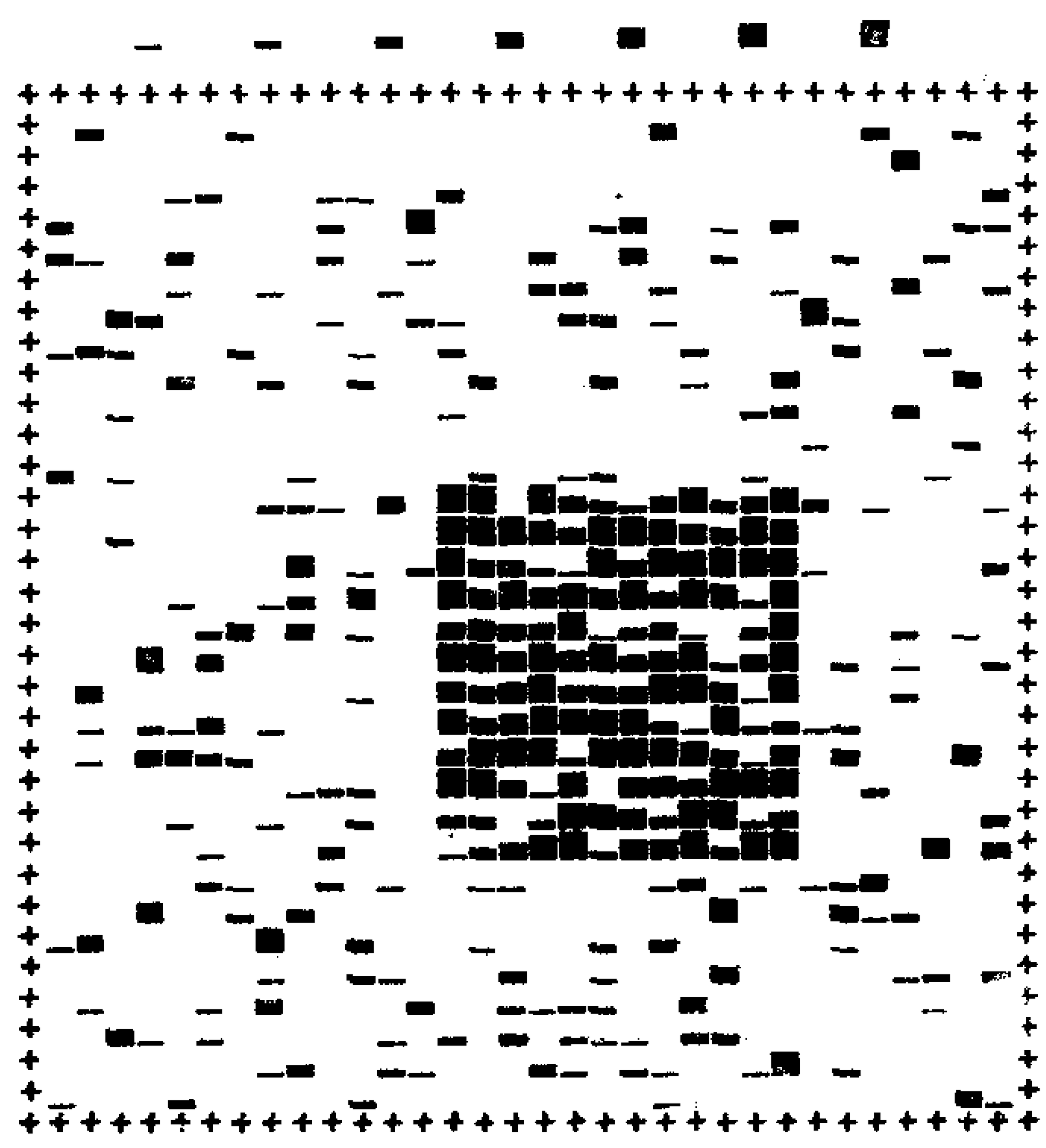

图 2　在图 1 上叠加 $\sigma^2 = 9$ 的高斯白噪声后的图象

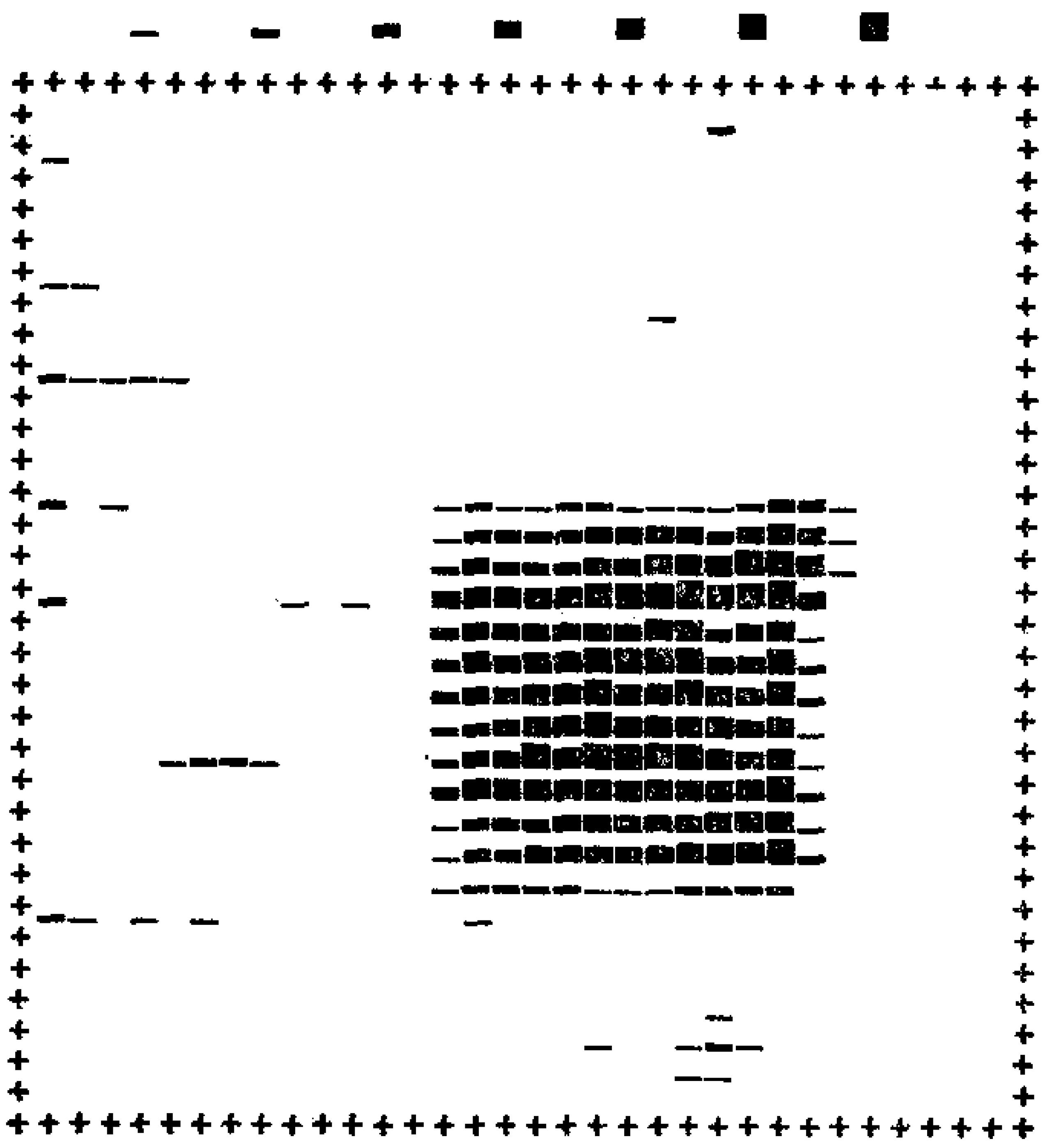

图 3 利用 (4) 式处理后的图象 $K\doteq 0.133$.

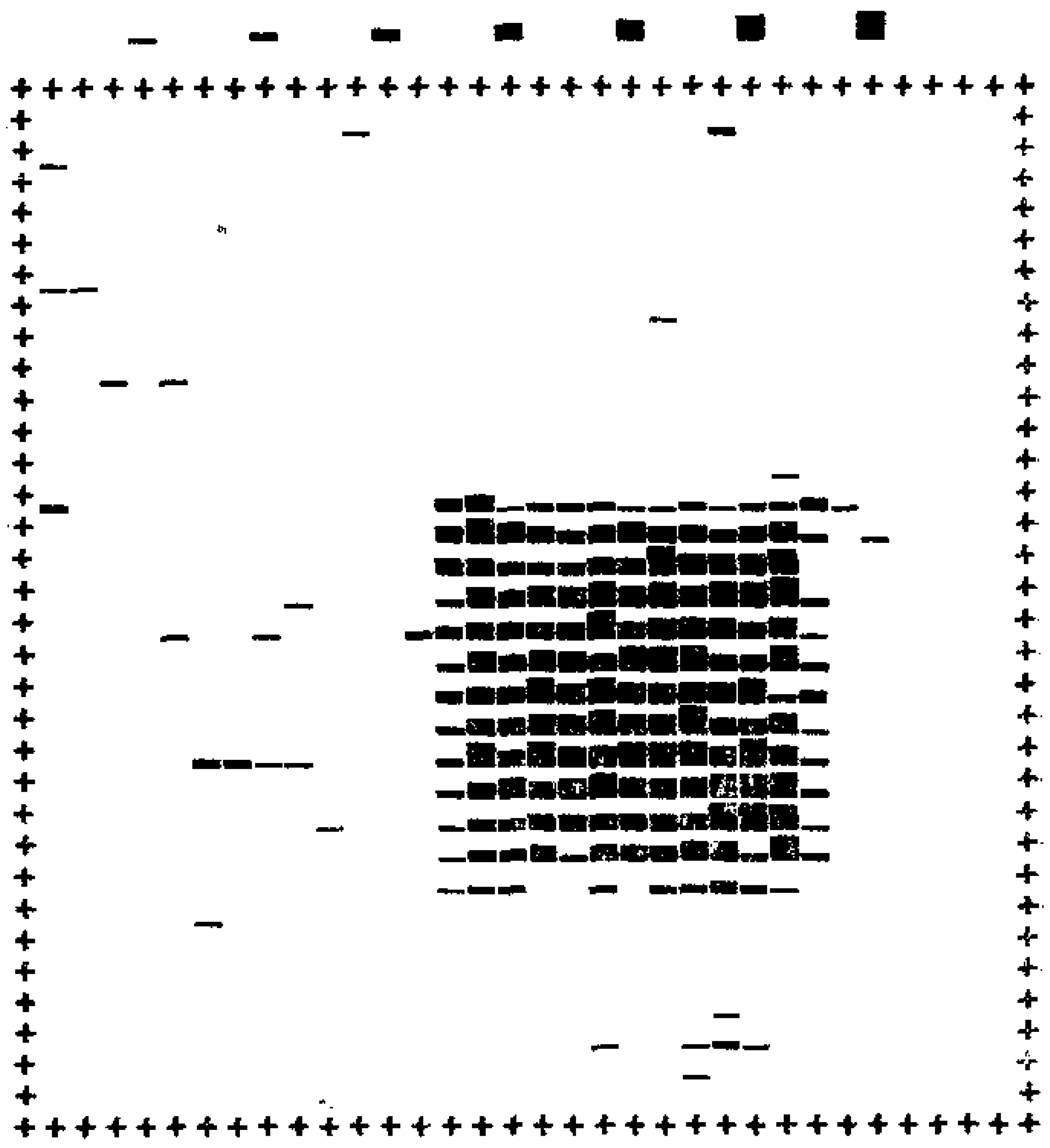

图 4 利用 (16) 式处理后的图象

参 考 文 献

[1] Habibi, A., Two-Dimensional Bayesian Estimate of Images, **60**(1972), 878—883.

[2] Gonazalz, R. C., Wintz, P., Digital Image Procession, Addision-Wesley Press, (1977).

[3] Franks, L. E., A Model for the Random Video Process, *BSTJ*, **45**(1966), 609—630.

[4] O'Neal. J. B., Predictive Quantizing Systems for the Transmission of Television Signals, *BSTJ*, **45**(1966), 689—721.

[5] Rosenfeld, A., Kak, A. C., The Digital Picture Processing, Academic Press, (1976).

[6] Strintzis, M. G., Comments On "Two-Dimensional Bayesian Estimate of Images", Proc. IEEE, **64**(1976), 1255—1257.

[7] Scher, A., Velaxo, F.R.D., and Rosenfeld, A., Some New Image Smoothing Techniques, *IEEE Trans.*, SMC-**10**(1980), 153—158.

[8] Hall, E., Computer Image Processing and Recognition, Academic Press, (1979).

[9] Rosenfeld, A., Davis, L. S., Interative Histogram Modification, *IEEE Trans.*, SMC-**8** (1978), 300—302.

[10] Nahi, N. E., Bayesian Recursive Image Estimation, *IEEE Trans.*, C-**21**(1972), 734—738.

A NOISE SMOOTHING METHOD USING THE ESTIMATION OF IMAGE

WANG XIN

(*Shandong Polytechnic University*)

ABSTRACT

In this paper, a formula for direct calculation of the steady-state gain of the two-dimensional Bayesian estimation of images is presented. Using the formula, an image smoothing technique is then developed.