第 14 卷 第 2 期
1988 年 3 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 14, No. 2
Mar., 1988

# 西安市大气 $SO_2$ 污染的最优控制

彭勤科　吴受章
(西安交通大学)

**摘　要**

本文给出了一种城市大气 $SO_2$ 污染治理的半无限规划优化模型,对文献[3]提出的算法补充讨论了其性质和收敛准则,并用此算法和 Dantzig-Wolfe 分解算法求出了西安市大气 $SO_2$ 污染的最优控制方案.

## 一、引　言

现在对城市大气 $SO_2$ 污染的控制可以采取许多措施,如调整产业结构、城市的合理布局、改进生产工艺、使用低污染的设备、改变燃料构成、集中供热、煤气化、煤脱硫、烟气脱硫和改善环境的自净能力等,而最优控制是合理地安排各种控制措施,使得在 $SO_2$ 污染得到全面改善的条件下,尽可能减少控制费用.

对城市大气 $SO_2$ 污染的控制不是一个孤立的问题,它与城市的经济发展、城市的性质、居民的愿望、政府的政策等紧密相关. 这种城市大气 $SO_2$ 污染控制系统是一个多因素、多目标、多层次的复杂大系统. 对这样的系统,其内部机理还没有全部搞清,现有的统计数据还很有限,所以模型要根据各城市的治理重点、对结果的要求和已有的统计资料建立. 本文所建模型是以大气质量评价为基础,控制措施能落实到具体的区域中. 并且适用于其它类型大气污染和粉尘污染的最优控制.

## 二、系统优化模型

设系统有 $N$ 个污染源,第 $i$ 个污染源有 $n_i$ 种控制措施,并用 $n_i$ 个三元组 $(a_{ij}, p_{ij}, h_{ij})$, $j=1,\cdots\cdots,n_i$ 表示,对应的决策变量用 $x_{ij}$, $j=1,\cdots\cdots,n_i$ 表示. 其中 $a_{ij}$, $p_{ij}$, $h_{ij}$ 分别为投资系数、排污系数、有效发热量. 定义为: $x_{ij}$ 是第 $i$ 个污染源由第 $j$ 种控制措施处理的燃料的数量; $a_{ij}$ 是对第 $i$ 个污染源采取第 $j$ 种控制措施时单位重量燃料所需的费用; $p_{ij}$ 是对第 $i$ 个污染源采取第 $j$ 种控制措施后单位重量燃料排放的 $SO_2$ 量,这样第 $i$ 个污染源 $SO_2$ 的排放量为

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n_i} p_{ij} x_{ij}. \tag{1}$$

本文于 1985 年 10 月 28 日收到.

$h_{ij}$ 是对第 $i$ 个污染源采取第 $j$ 种控制措施后单位重量燃料所放出的有用热量.

**1. 费用目标函数**

极小化目标函数是 $J=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_i}a_{ij}x_{ij}$，这里 $J$ 是一次性投资，不含实现控制措施后的运行费用.

**2. 约束条件**

浓度约束：设第 $i$ 个污染源在点 $s$ 造成的污染为 $d_i(s)$，则所有污染源在 $s$ 点的污染为 $\sum_{i=1}^{N}d_i(s)$. 若点 $s\in D\subset R^2$ 处 $SO_2$ 浓度允许的最大值是 $b(s):D\to R$，则浓度约束为

$$\sum_{i=1}^{N}d_i(s)\leqslant b(s). \tag{2}$$

本文采用文献[1]中的烟流模式计算 $d_i(s)$，

$$d_i(s)=\frac{Q_i}{\pi\bar{u}\sigma_y\sigma_z}\exp\left\{-\frac{H_e^2}{2\sigma_z^2}-\frac{(v-v_i)^2}{2\sigma_y^2}\right\}.$$

式中 $Q_i$ 是污染物排放量，单位是毫克/秒；$\sigma_z$ 和 $\sigma_y$ 是扩散参数，与大气稳定度有关，单位是米；$\bar{u}$ 是平均风速，单位是米/秒；$H_e$ 是有效排放高度，单位是米；$u$ 和 $v$ 是观测点 $s$ 的坐标，$u_i$ 和 $v_i$ 是污染源的坐标，单位是米. 浓度 $d_i(s)$ 的单位是毫克/立方米. 把此模式和(1)式代入式(2)得

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(s)x_{ij}\leqslant b(s). \tag{2'}$$

式中

$$a_{ij}(s)=\frac{p_{ij}}{\pi\bar{u}\sigma_z\sigma_y}\exp\left\{-\frac{H_e^2}{2\sigma_z^2}-\frac{(v-v_i)^2}{2\sigma_y^2}\right\}.$$

最后指出，在高斯烟流模式中，风向、风速，大气稳定度是随机干扰.

能量需求约束：设第 $i$ 个污染源需要的有用热量为 $W_i$，则能量需求约束为

$$\sum_{j=1}^{n}h_{ij}x_{ij}=W_i. \tag{3}$$

控制范围约束：有些控制措施的决策变量(如煤气量)应限定范围，即

$$x_{ij}\leqslant U_{ij}. \tag{4}$$

资源和技术约束：给定常数 $V$ 和共享资源或技术的指标集 $I$，则有约束

$$\sum_{ij\in I}x_{ij}\leqslant V. \tag{5}$$

非负约束：

$$x_{ij}\geqslant 0,\ j=1,\cdots,n_i;\ i=1,\cdots,N. \tag{6}$$

综合之，系统优化模型为

$$\min_{x_{ij}} J=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_i}a_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\ \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_i} a_{ij}(s)x_{ij} \leqslant b(s),\quad \sum_{j=1}^{n_i} h_{ij}x_{ij} = W_i,$$

$$x_{ij} \leqslant U_{ij},\quad \sum_{ij\in I} x_{ij} \leqslant V,\quad x_{ij} \geqslant 0,$$

$$j = 1, 2, \cdots, n_i;\ i = 1, 2, \cdots, N,\ s \in D.$$

简写为

$$\min \underset{\sim}{c}^T \underset{\sim}{x}$$

$$s.t.\ \underset{\sim}{a}^T(s)\underset{\sim}{x} \leqslant b(s),\ s \in D \tag{7.1}$$

$$\underset{\sim}{x} \in H. \tag{7.2}$$

式中 $\underset{\sim}{c} = (a_{11}, \cdots, a_{1n_1}, \cdots, a_{N1}, \cdots, a_{Nn_N})^T$, $\underset{\sim}{x} = (x_{11}, \cdots, x_{1n_1}, \cdots, x_{N1}, \cdots, x_{Nn_N})^T$, $\underset{\sim}{a}(s) = (a_{11}(s), \cdots, a_{1n_1}(s), \cdots, a_{N1}(s), \cdots, a_{Nn_N}(s))^T$. $H = \{\underset{\sim}{x} | \underset{\sim}{x}$ 满足式(3)—(6)$\}$.

式(7.1)依赖于参数 $s$, $s$ 可取无限多个值. 因此模型(7)是一个线性半无限规划优化模型.

## 三、算 法

线性半无限规划有许多求解方法[2],最简单的方法是把参数区域$D$网格化,用网格点生成的约束替代约束(7.1). 在一定条件下,只要网格足够密,就能达到所需的精度. 但网格点越密,生成的约束越多,从而计算所需的内存越大. 对高维问题,内存就变得更大. 因此本文采用文献[3]给出的算法,该算法既能达到满意精度,又能大大减小计算机内存. 但文献[3]并未研究此算法的收敛性.

### 1. 算法

设
$$f(s, \underset{\sim}{x}) = b(s) - a^T(s)\underset{\sim}{x}, \tag{8}$$

文献[3]提出了以下算法:

1) 给定初值 $\underset{\sim}{x}^0$, $k = 0$.

2) 求解

$$\min_s f(s, \underset{\sim}{x}^k)$$
$$s.t.\quad s \in D \tag{9}$$

的所有局部最优解 $s_1^k, s_2^k, \cdots, s_r^k$.

3) 计算

$$\underset{\sim}{x}^{k+1} = \arg\min_{\underset{\sim}{x}} \underset{\sim}{c}^T \underset{\sim}{x} \tag{10}$$
$$s.t.\ f(s_i^k, \underset{\sim}{x}) \geqslant 0,\ \underset{\sim}{x} \in H,\ i = 1, \cdots, r.$$

4) 判别是否收敛, 若不收敛 $k+1 \to k$ 回到 2). 此迭代算法是两级结构, 示于图1.

上级把问题(9)的局部极小点送给下级, 下级对指定的 $s_i^k$, $i = 1, \cdots, r$, 求解问题(10)并把 $\underset{\sim}{x}^{k+1}$ 送回上级,上级通过判断,不收敛时再做下一次迭代,这样直到收敛.

### 2. 算法的性质

下面对线性情况讨论算法的性质,并给出收敛准则. 以下假定 $\{\underset{\sim}{x}^k\}$ 是由算法产生的序列.

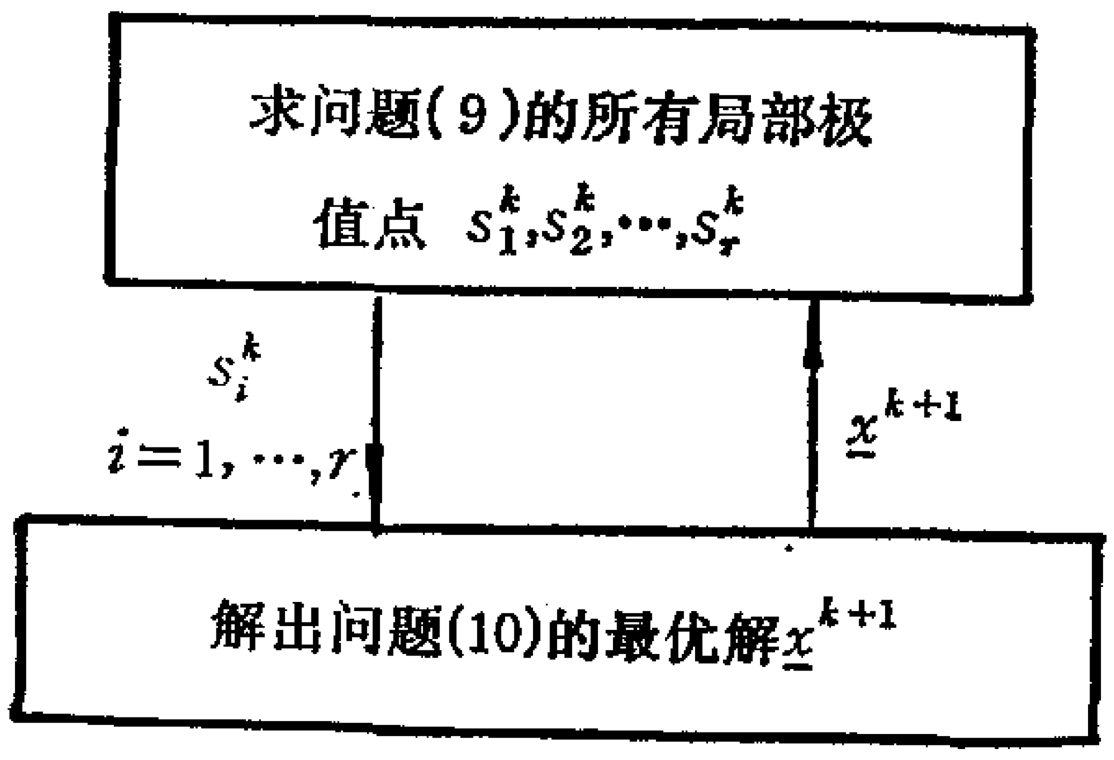


图 1　两级结构

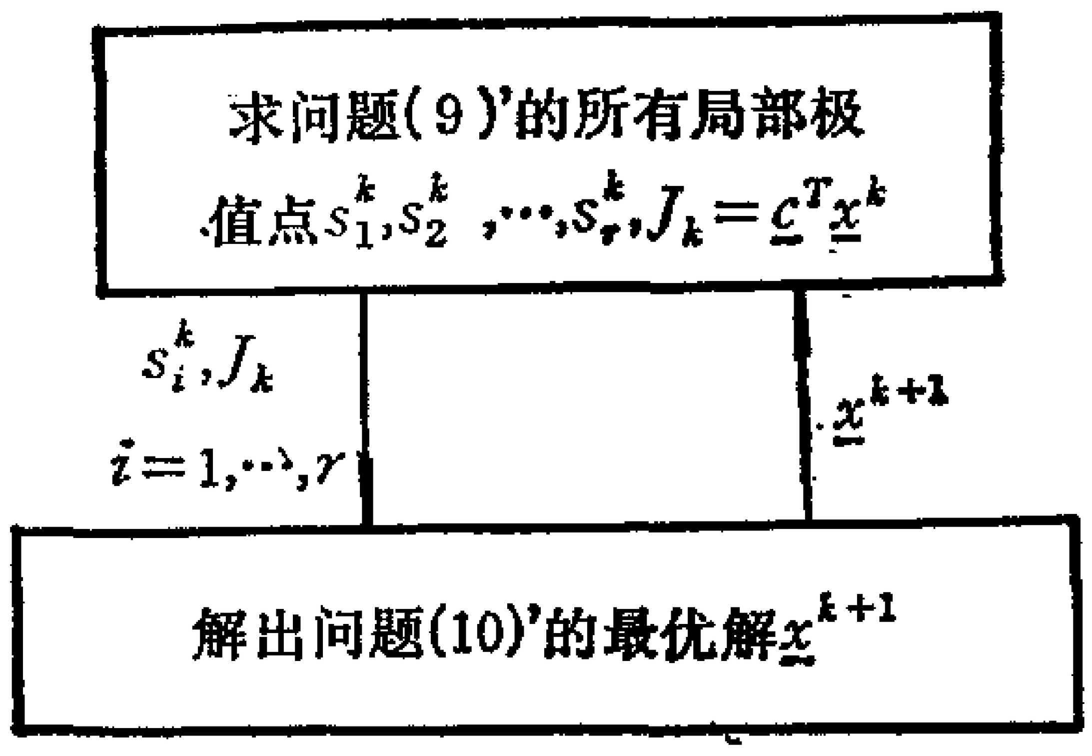


图 2　修改的两级结构

**命题 1.**　设 $\bar{\underline{x}}$ 是问题(7)的最优解，则对任意的 $k \geqslant 0$，有

$$\underline{c}^T\bar{\underline{x}} \geqslant \underline{c}^T\underline{x}^{k+1}.$$

证．因为 $\bar{\underline{x}} \in H$，且对任意的 $s \in D$，$f(s, \bar{\underline{x}}) \geqslant 0$，则 $f(s_i^k, \bar{\underline{x}}) \geqslant 0$，$i = 1, \cdots, r$．此表明 $\bar{\underline{x}}$ 是问题(10)的可行解，由于 $\underline{x}^{k+1}$ 是问题(10)的最小解，所以 $\underline{c}^T\underline{x} \geqslant \underline{c}^T\underline{x}^{k+1}$．证毕

因此可对上述算法进行如下修改：

1）给定初值 $\underline{x}^0$，取 $J_0$ 足够小，$k = 0$．

2）求解

$$\min_s f(s, \underline{x}^k) \quad s.t.\ s \in D \tag{9'}$$

的所有局部极值点 $s_1^k, s_2^k, \cdots, s_r^k$．

3）计算

$$\underline{x}^{k+1} = \arg\min_{\underline{x}} \underline{c}^T\underline{x} \quad s.t.\ f(s_i^k, \underline{x}) \geqslant 0,\ \underline{c}^T\underline{x} \geqslant J_K,\ \underline{x} \in H,\ i = 1, \cdots, r. \tag{10'}$$

4）判别收敛性，若不收敛 $J_{k+1} = \underline{c}^T\underline{x}^{k+1}$，$k + 1 \to k$ 回到 2)．此时，两级间信息交换示于图 2．该算法总能保证序列 $J_k$ 收敛．下列结论对上述两种算法都成立．

设 $H^k = \{\underline{x} | f(s_i^k, \underline{x}) \geqslant 0,\ i = 1, \cdots, r, \underline{x} \in H\}$．

**命题 2.**　若有 $k$ 满足 $\underline{x}^k \in H^k$，则 $\underline{x}^k$ 是问题(7)的最优解．

证．设 $\bar{\underline{x}}$ 是问题(7)的最优解，由命题 1 知 $\underline{c}^T\bar{\underline{x}} \geqslant \underline{c}^T\underline{x}^k$，而 $\underline{x}^k \in H^k$ 表明 $f(s_i^k, \underline{x}^k) \geqslant 0$，$\underline{x}^k \in H$，$i = 1, \cdots, r$，由 $s_i^k$ 的计算知 $\underline{x}^k$ 满足约束(7.1)，因而 $\underline{x}^k$ 是问题(7)的可行解，因此 $\underline{c}^T\underline{x} \leqslant \underline{c}^T\underline{x}^k$．所以 $\underline{c}^T\bar{\underline{x}} = \underline{c}^T\underline{x}^k$，表明 $\underline{x}^k$ 也是问题(7)的最优解．　证毕

令
$$f_k = \min_{1 \leqslant i \leqslant r} \{f(s_i^k, \underline{x}^k)\} \triangleq f(s^k, \underline{x}^k).$$

**命题 3.**　设 $\underline{a}(s)$ 和 $b(s)$ 在 $D$ 上有界，$H$ 是紧集，若对所有 $k$，$\underline{x}^k \notin H$，则当 $(\underline{x}^{k+1} - \underline{x}^k) \to 0$ 时，$f_k \to 0$．

证．因为 $f(s, \underline{x}) = b(s) - \underline{a}^T(s)\underline{x}$，由命题假设知，序列 $f_k$ 有界，因此只需证对任一收敛子列 $f_{km}$ 有 $f_{km} \to 0$．

设 $f_{km} \to f_0$，由于对所有 $km$，$\underline{x}^{km} \notin H^{km}$，所以 $f_{km} < 0$，从而极限 $f_0 \leqslant 0$．若 $f_{km} \not\to 0$，则 $f_0 < 0$，因此有 $M > 0$，使得 $km > M$ 时 $f_{km} < \frac{1}{2} f_0$．因为

$$b(s^{km}) - \underline{a}^T(s^{km})\underline{x}^{km+1}$$

$$= b(s^{km}) - \underline{a}^T(s^{km})\underline{x}^{km} + \underline{a}^T(s^{km})(\underline{x}^{km} - \underline{x}^{km+1})$$
$$= f_{km} + \underline{a}^T(s^{km})(\underline{x}^{km} - \underline{x}^{km+1}).$$

由于 $(\underline{x}^{k+1} - \underline{x}^k) \to 0$; $\underline{a}^T(s)$ 有界，所以有 $M_1 > 0$，使得 $km > M_1$ 时，$\underline{a}(s^{km})(\underline{x}^{km} - \underline{x}^{km+1}) < -\frac{1}{4}f_0$. 因此当 $km > \max(M, M_1)$ 时，$b(s^{km}) - \underline{a}^T(s^{km})\underline{x}^{km+1} < \frac{1}{2}f_0 - \frac{1}{4}f_0 = \frac{1}{4}f_0 < 0$. 另一方面，由 $\underline{x}^{km+1}$ 的计算知 $b(s^{km}) - \underline{a}^T(s^{km})\underline{x}^{km+1} \geqslant 0$，矛盾。

证毕

**命题 4.** 在命题 3 的假设下，若对所有$k$，$\underline{x}^k \in H^k$，则当 $(\underline{x}^{k+1} - \underline{x}^k) \to 0$ 时，$\underline{x}^k$ 收敛子列极限是问题(7)的最优解.

证. 由假设知序列 $\underline{x}^k$ 有界，从而有收敛子列，设此收敛子列为 $\underline{x}^{km}$，且 $\underline{x}^{km} \to \underline{x}^1$. 对问题(7)的最优解 $\bar{\underline{x}}$，由命题 1 知 $\underline{c}^T\bar{\underline{x}} \geqslant \underline{c}^T\underline{x}^{km}$，取极限得 $\underline{c}^T\bar{\underline{x}} \geqslant \underline{c}^T\underline{x}^1$.

另一方面由命题 3 知 $f_{km} \to 0$，因此对任意 $\varepsilon > 0$，有 $M > 0$，当 $km > M$ 时 $f(s^{km}, \underline{x}^{km}) = f_{km} > -\varepsilon$，由 $s^{km}$ 的定义知，对任一 $s \in D$ 有 $f(s, \underline{x}^{km}) \geqslant f(s^{km}, \underline{x}^{km}) > -\varepsilon$，取极限得 $f(s, \underline{x}^1) \geqslant -\varepsilon$，再由 $\varepsilon$ 的任意性知 $f(s, \underline{x}^1) \geqslant 0$ 对所有 $s \in D$ 成立，又因为$H$是紧集，由 $\underline{x}^{km} \in H$ 得 $\underline{x}^1 \in H$，因此 $\underline{x}^1$ 是问题(7)的可行解. 由于 $\bar{\underline{x}}$ 是最优解，所以 $\underline{c}^T\bar{\underline{x}} \leqslant \underline{c}^T\underline{x}^1$，从而 $\underline{c}^T\bar{\underline{x}} = \underline{c}^T\underline{x}^1$，表明 $\underline{x}^1$ 也是问题(7)的最优解. 证毕

由上面讨论知可用 $|f_k| < \varepsilon$ 或 $\|\underline{x}^{k+1} - \underline{x}^k\| < \varepsilon$ 作为收敛准则.

## 四、算法实现与计算结果

初值 $\underline{x}^0$ 可以任取. 问题 (9) 一般是一个不可微的非线性规划问题，本文用可变容差法[4]求解. 对上级求出的局部极值点 $s_i^k$, $i = 1, \cdots, r$，下级问题 (10) 是一个线性规划

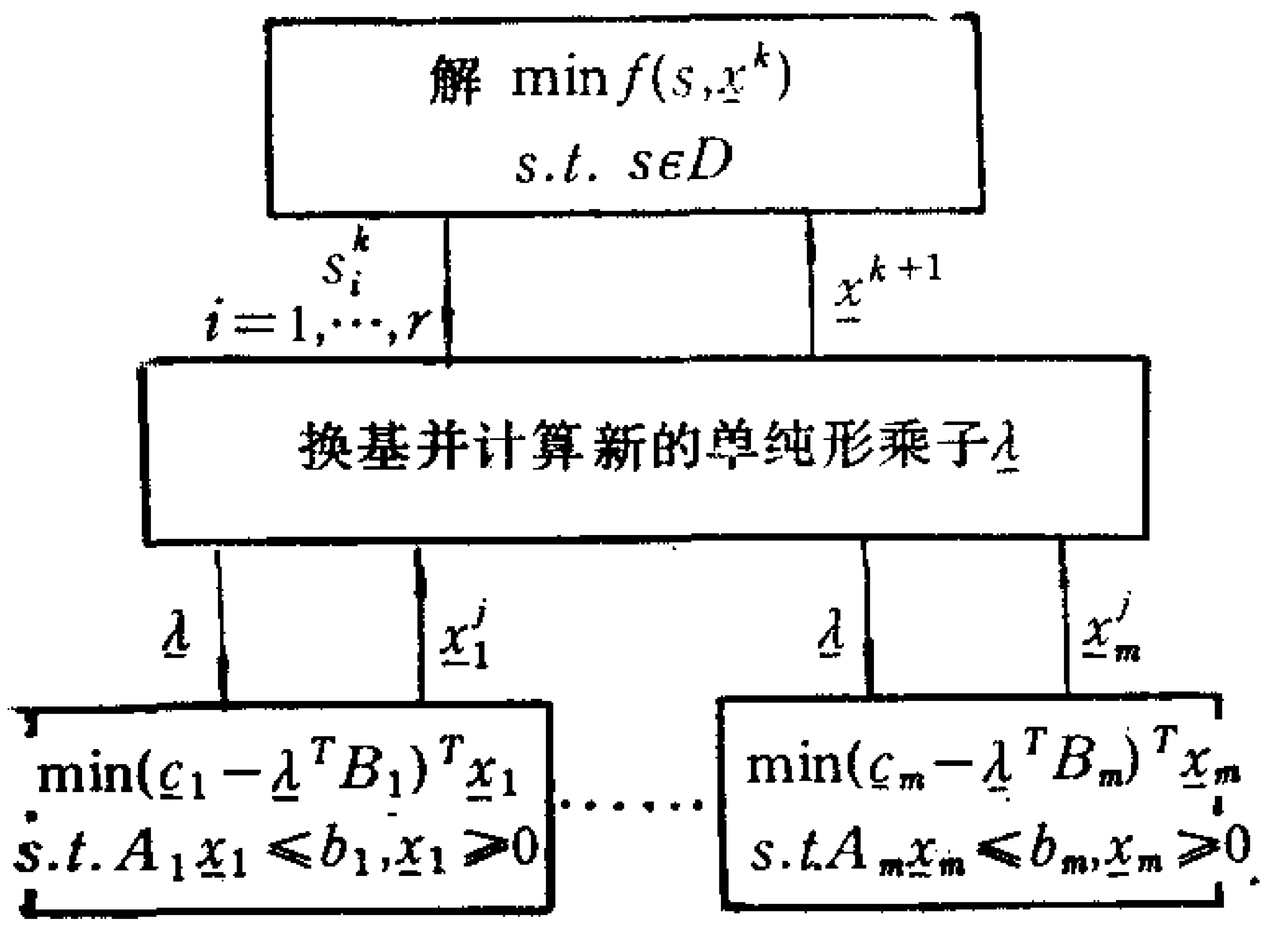


图 3 三级结构

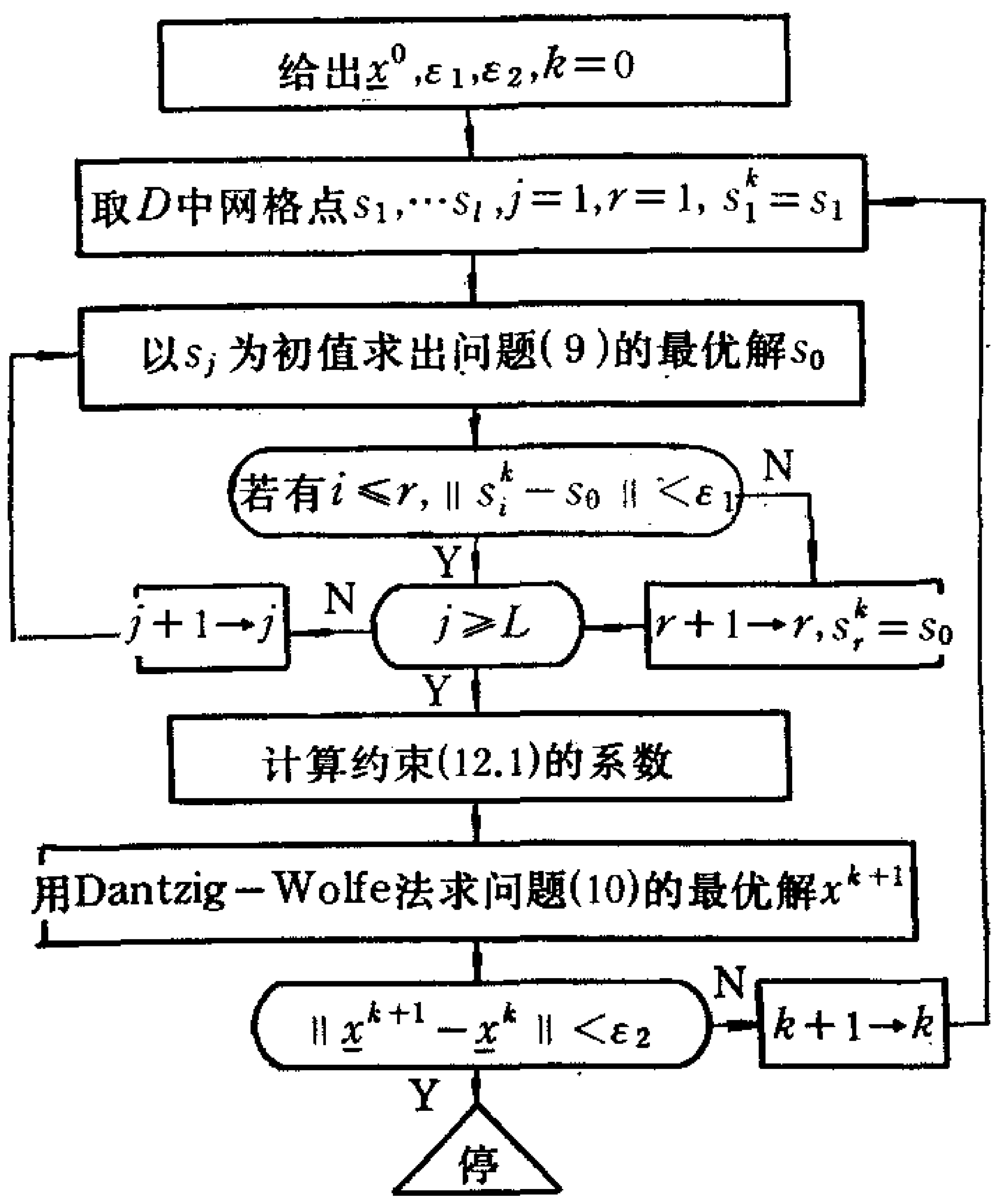


图 4 程序框图

问题，形式为

$$\min_{\underset{\sim}{x}} \underset{\sim}{c}^T \underset{\sim}{x}$$

$$s.t.\ \ \underset{\sim}{a}^T(s_i^k)\underset{\sim}{x} \leqslant b(s_i^k),\ \ \sum_{ij\in I} x_{ij} \leqslant V,\ \ i=1,\cdots,r, \tag{11.1}$$

$$A_j\underset{\sim}{x}_j \leqslant b_j,\ \ \underset{\sim}{x}_j \geqslant 0,\ \ j=1,\cdots,m. \tag{11.2}$$

每次迭代要重新计算约束 (11.1) 的系数．此问题可用单纯形法求解；对高维问题，可用 Dantzig-Wolfe[5] 分解法求解，此时整个算法有三级，该三级算法的结构见图 3．

在西安市大气 $SO_2$ 污染控制优化模型中，仅约束(11.2)就有 441 个方程，此时单纯形法的基矩阵已有二十多万个元素，超过了小、中型计算机的内存，因此采用了三级算法，并用 FORTRAN 语言在 Honeywell/DPS-8 机上实现．程序框图见图 4．

按 1983 年的统计数据，用此三级算法求出了西安市大气 $SO_2$ 污染的最优控制方案．求出了每个评价块所需的煤气量、集中供热量和需要控制的工业用煤量．在图 5 中标明了需要治理的地区和相应的控制措施．此最优控制方案可使西安市 $SO_2$ 浓度达到国家二级标准，费用最小．

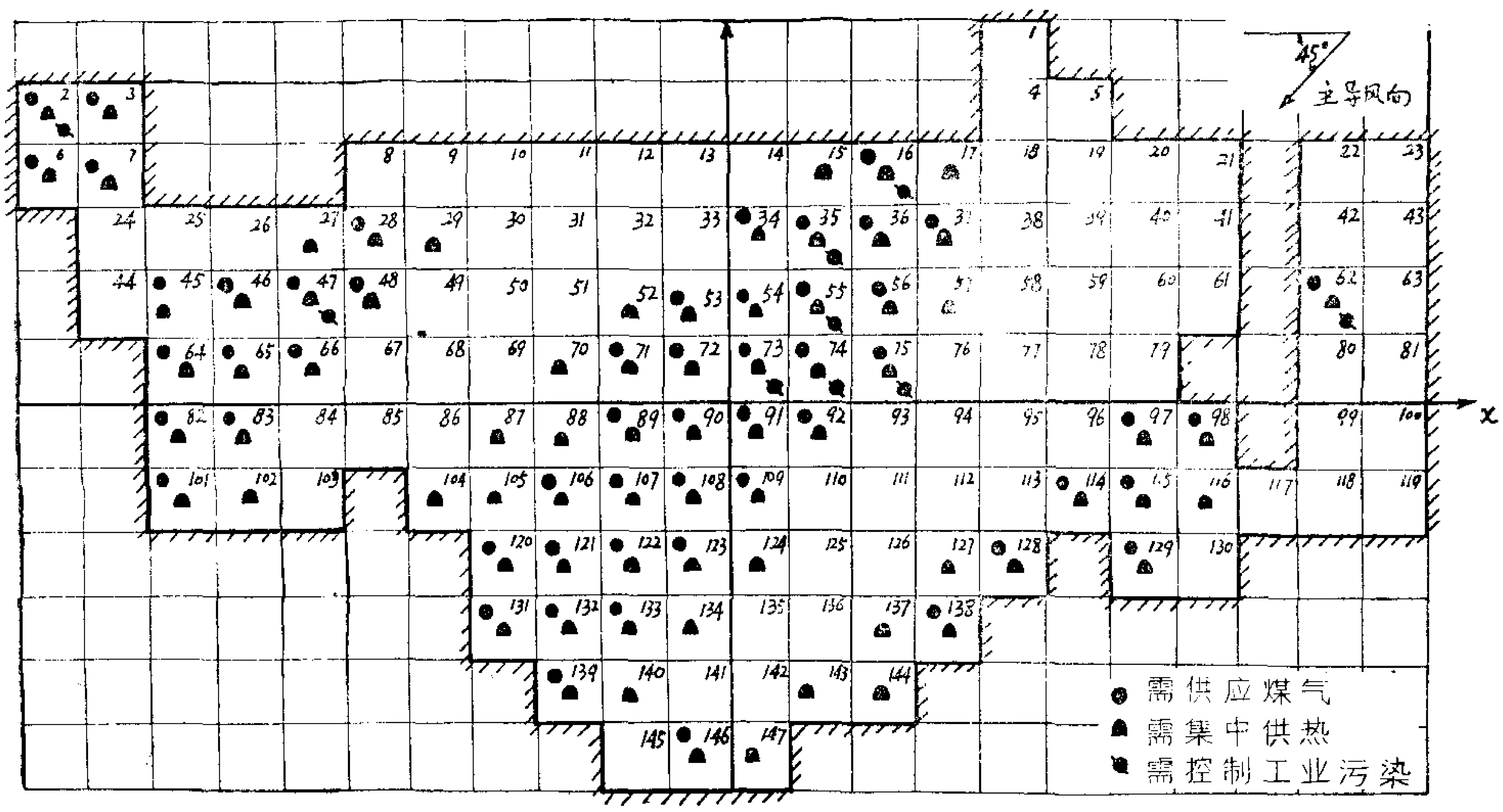


图 5　结果图示

陕西省气象科学研究所和陕西省环境科学研究所提供了资料和数据，谨致谢意．

## 参　考　文　献

[1] «环保工作者实用手册»编写组，环保工作者实用手册，冶金工业出版社，1984．
[2] Hettich, R., Semi-infinite Programming, Springer-Verlag, 1978.
[3] Van Honstede, W., An Approximation Method for Semi-infinite Problems, in R. Hettich (Ed): Semi-infinite Programming, Springer-Verlag, 1978, 126—136.
[4] Himmelblau, D. M., Applied Nonlinear Programming, McGraw-Hill, 1972.
[5] Luenberger, D. G., Linear and Nonlinear Programming, Second Edition, Addison-Wesley, 1984.

# OPTIMAL CONTROL OF AIR $SO_2$-POLLUTION FOR XI'AN CITY

PENG QINGKE WU SHOUZHANG
(*Xian Jiaotong University*)

ABSTRACT

A semi-infinite programming optimization model is given for urban air $SO_2$-pollution. Some more properties and convergence criteria for the algorithm proposed in [3] are developed. The optimal control of $SO_2$-pollution for Xi'an City is computed by this algorithm and Dantzig Wolfe decomposition algorithm.

## 《计算机程序结构及解释》

计算机程序结构及解释（The Structure and Interpretation of Computer Programs)，由麻省理工学院于1985年出版，共542页. 著者是哈·阿贝尔松（H. Aberson）和杰·撒丝曼（G. Sussman）及朱·撒丝曼. 这是一本 MIT 的教科书. 是计算机科学的导论课程之一. 著者的主导思想是：第一，计算机语言不仅是一种能叫计算机运转的工具，更重要的是，它是一种表达有关如何解决问题的方法的形式媒介；其二，著作通过多年的科研及教学经验，深感首先应向学生介绍的，既不是计算机语言的句法，也不是巧妙的算法，甚至也不是对算法进行的数学分析，而是控制大型软件复杂结构的技术. 这技术包括：抽象模型的建立，把小块程序连接成大块程序的中间介面，以及表述程序设计过程的一种新的语言. 自1980年秋以来，MIT 每年有600到700名学生修这门课. 其中大部份人预先未经过正规使用计算机的训练. 从教学效果看，这种试图把程序设计工程化的努力是有效的. 该书教授了程序设计的基本概念，使学生有了安排大程序复杂结构的能力及技巧. 使他们能够有详有略地读懂50页编写正常的程序. 使他们有能力去修改程序，同时又能保持原程序的基本精神及可运行性. 从长远看，这种对程序结构的阐述方法，不仅使学习程序设计的过程变得更条理化，更简捷，也为程序设计者之间的交流及程序本身的借用提供了方便. 书中程序是用 LISP 语言写的，但并不要求读者事先熟习 LISP 语言. 它所教授的程序设计思想适用于任何计算机语言.

（庞真）