

# 考虑电枢电感的电力拖动最小能耗控制及奇异解算法的研究

童调生  
(湖南大学)

## 摘要

大量的文献在不考虑电枢电感的条件下研究了电力拖动的最小能耗控制,其工程实现非常困难。本文给出包括电路方程在内的最小能耗控制的数学模型。针对其中的奇异解,提出解析数值混合算法,并运用在性能指标中引入辅助项,把奇异的最小能耗控制转化为非奇异的最优调节器问题,从而给出了考虑电感条件下最小能耗控制的工程实现。

## 一、引言

在不考虑电枢电感条件下直流电力拖动最小能耗控制的转速最优轨线是抛物线,电流最优轨线是在其初始点和终点有阶跃变化的直线<sup>[1-7]</sup>。对于目前广泛应用的晶闸管一直流电动机调速系统,由于要保证电枢电流的连续,其电枢电路的电感量可取很大的数值。在电感的作用下,电枢电流是不可能跃变的,所以忽略电感的最优轨线在实际上不可能准确地实现,一般取其近似的轨线。然而近似到什么程度为好,却是“心中无数”的。在考虑电枢电感以后,上述问题可以得到解决,并使得工程实现变得简单。

当考虑电感,并取相对单位以后,直流电力拖动系统的动力学方程为

$$\dot{\alpha} = \nu, \quad (1)$$

$$\dot{\nu} = i - i_c, \quad (2)$$

$$i = k_u u - k_v \nu - k_i i, \quad (3)$$

其中  $\alpha$ 、 $\nu$ 、 $i$ 、 $u$  分别为相对转角、转速、电流、电压。上式中的时间为相对时间  $\tau = t/T_m$ , 其基值为机械时间常数

$$T_m = \frac{GD^2 n_e}{375 M_e}$$

各常数分别为

$$k_u = \frac{T_m U_e}{L I_c}, \quad k_v = \frac{T_m E_e}{L I_c}, \quad k_i = \frac{T_m R}{L}$$

$U_e, E_e, I_e$  分别为电动机的额定电压、额定反电势和额定电流,  $L, R$  分别为电枢电路的电感和电阻.

在动态过程中, 由于电枢电流大大超过额定值, 铜耗是主要损耗, 故对于动态过程最小能耗控制, 取电枢电路的铜耗为性能指标是合理的<sup>[1-7]</sup>:

$$J_0 = \int_0^{\tau_f} i^2 d\tau. \quad (4)$$

对于(1)~(4)的最优控制问题, 其状态变量为  $x = (\alpha v i)^T$ , 控制变量为电枢电压  $u$ , 哈密尔顿函数将是  $u$  的线性函数, 其中包含有奇异解<sup>[8-10]</sup>.

## 二、第二类电力拖动的最小能耗控制

这类电力拖动的约束方程为运动方程(2)和电路方程(3). 考虑控制约束

$$|u| \leq u_m \quad (5)$$

根据第二类拖动的性质, 边界条件取为

$$v(0) = v_0, \quad i(0) = i_0, \quad v(\tau_f) = v_f, \quad i(\tau_f) = i_f, \quad (6)$$

则这类系统的最小能耗控制问题可叙述为在满足(2)、(3)、(5)、(6)的条件下求性能指标(4)为极小的最优控制和最优轨线.

根据(2)、(3)、(4)作哈密尔顿函数

$$H = i^2 + \lambda_1(i - i_c) + \lambda_2(k_u u - k_v v - k_i i), \quad (7)$$

$H$  是  $u$  的线性函数, 故其最优解可能由正常 (Bang-Bang) 弧和奇异弧构成.

在正常弧段最优控制应为

$$u = -u_m \text{sign}(\lambda_2 k_u) \quad (8)$$

正则方程(设为空载情况, 即  $i_c = 0$ )

$$\left. \begin{aligned} \dot{v} &= i, \\ \dot{i} &= -k_u u_m \text{sign}(k_u \lambda_2) - k_v v - k_i i, \\ \dot{\lambda}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial v} = k_v \lambda_2, \\ \dot{\lambda}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial i} = -2i - \lambda_1 + k_i \lambda_2, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

在奇异弧段上, 应有下式成立:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} &= \lambda_2 k_u = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \dot{\lambda}_2 = 0, \\ \frac{d}{d\tau} \frac{\partial H}{\partial u} &= k_u \dot{\lambda}_2 = k_u (-2i - \lambda_1 + k_i \lambda_2) = 0, \\ \lambda_1 &= -2i, \\ \frac{d^2}{d\tau^2} \frac{\partial H}{\partial u} &= k_u (-2\dot{i} - \dot{\lambda}_1 + k_i \dot{\lambda}_2) \\ &= k_u [-2(k_u u - k_v v - k_i i) \\ &\quad - k_v \lambda_2 + k_i (-2i - \lambda_1 + k_i \lambda_2)] = 0, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

解之,有

$$u = \frac{k_v v + k_i i}{k_u} \tag{11}$$

将上式之奇异控制  $u$  代入状态方程并解之,有

$$\left. \begin{aligned} \dot{i} &= 0, \quad i = c_1 \triangleq i_1, \\ \dot{v} &= i_1, \quad v = i_1(\tau - \tau_1) + v_1, \\ u &= \frac{k_v i_1(\tau - \tau_1) + k_v v_1 + k_i i_1}{k_u}, \\ \lambda_1 &= -2i = -2i_1, \\ \lambda_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

上式中,  $\tau_1$ 、 $v_1$  为对应着奇异弧起点时刻和转速, 并可见在奇异弧上电流是恒定的, 记  $i = i_1$ .

根据正常弧段和奇异弧段的不同组合, 可以得到以上奇异最优控制问题的各种解. 然而根据问题的物理性质, 不难判断正常弧段和奇异弧的组合形式.

如果给出的是加速过程 ( $v_f > v_0$ ), 显然正常弧段与奇异弧段的组合形式将如图 1 所示.

第一段正常弧段的边界条件应为

$$\left. \begin{aligned} v(0) &= v_0, \quad i(0) = i_0, \\ v(\tau_1) &= v_1, \quad i(\tau_1) = i_1, \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

其中  $v_0$ 、 $i_0$  是给定的,  $v_1$ 、 $i_1$  是待定的.

第三段正常弧段的边界条件应为

$$\left. \begin{aligned} v(\tau_2) &= v_2, \quad i(\tau_2) = i_2, \\ v(\tau_f) &= v_f, \quad i(\tau_f) = i_f. \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

其中  $v_f$ 、 $i_f$  是给定的,  $v_2$ 、 $i_2$  是待定的.

用解析法求(9)–(14)是十分复杂的, 以下给出解析数值混合算法和程序.

由图 1 知:

$$i(\tau_1) = i(\tau_2) = i_1, \tag{15}$$

且由(12)知:

$$v(\tau_2) = i_1(\tau_2 - \tau_1) + v(\tau_1). \tag{16}$$

根据(15)、(16)的关系可以设计计算程序.

在  $0 \leq \tau \leq \tau_1$  的区间上,  $i > 0$ , 由(8)知应取  $\lambda_2(\tau) < 0$ . 在此区间上, 从  $\tau = 0$ 、 $v(0) = v_0 = 0$ 、 $i(0) = i_0 = 0$  正向积分状态方程, 得到  $v(\tau'_1)$ 、 $i(\tau'_1)$ ; 在  $\tau_2 \leq \tau \leq \tau_f$  的区间上,  $i < 0$ . 取  $\lambda_2(\tau) > 0$ , 从  $\tau_f$ 、 $v_f$ 、 $i_f$  反向积分状态方程, 得到  $v(\tau'_2)$ 、 $i(\tau'_2)$ .

判断(15)式是否成立:  $i(\tau'_1) = i(\tau'_2)$  成立否? 若  $i(\tau'_2) > i(\tau'_1)$ , 则应在第一弧段上以  $\tau'_1$ 、 $v(\tau'_1)$  和  $i(\tau'_1)$  为积分初值, 且取  $u = u_m$  继续正向积分状态方程, 直至  $i(\tau'_1) = i(\tau'_2)$ ; 若  $i(\tau'_2) < i(\tau'_1)$ , 则应在第三弧段上, 以  $\tau'_2$ 、 $v(\tau'_2)$ 、 $i(\tau'_2)$  为起点, 且取  $u = -u_m$  继续反向积分状态方程, 直至  $i(\tau'_2) = i(\tau'_1)$ .

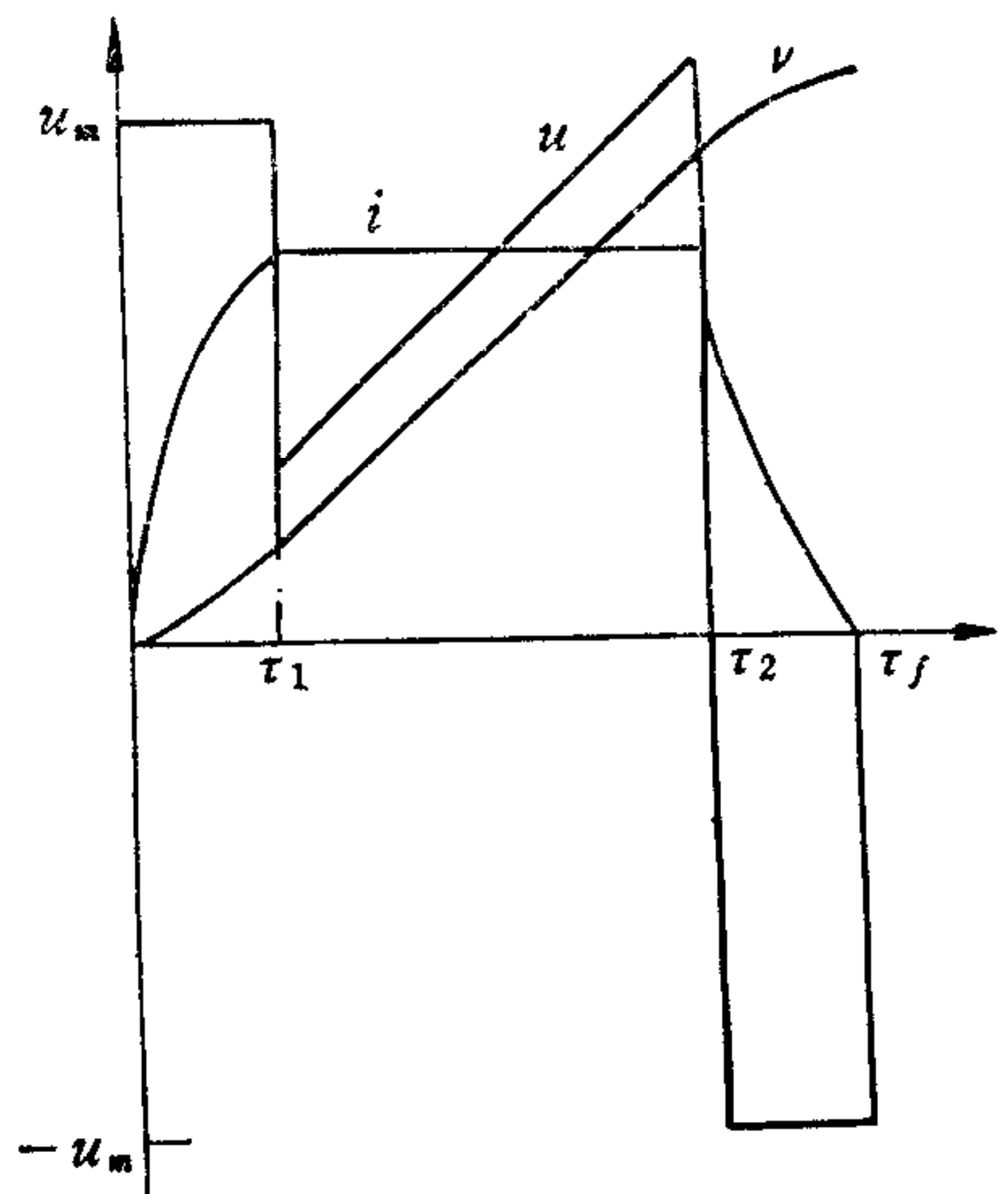


图 1

再判断(16)式是否成立： $v(\tau'_2) = i_1(\tau'_1 - \tau'_1) + v(\tau'_1)$  成立否？若成立，则所得到的  $\tau'_1$ 、 $\tau'_2$  就是正常弧与奇异弧的交点时刻  $\tau_1$ 、 $\tau_2$ ；否则应重复以上积分过程并反复判断(15)、(16)是否满足，直至足够的精度为止。显然在满足  $i(\tau)$ 、 $v(\tau)$ 、(18)、(19) 四个独

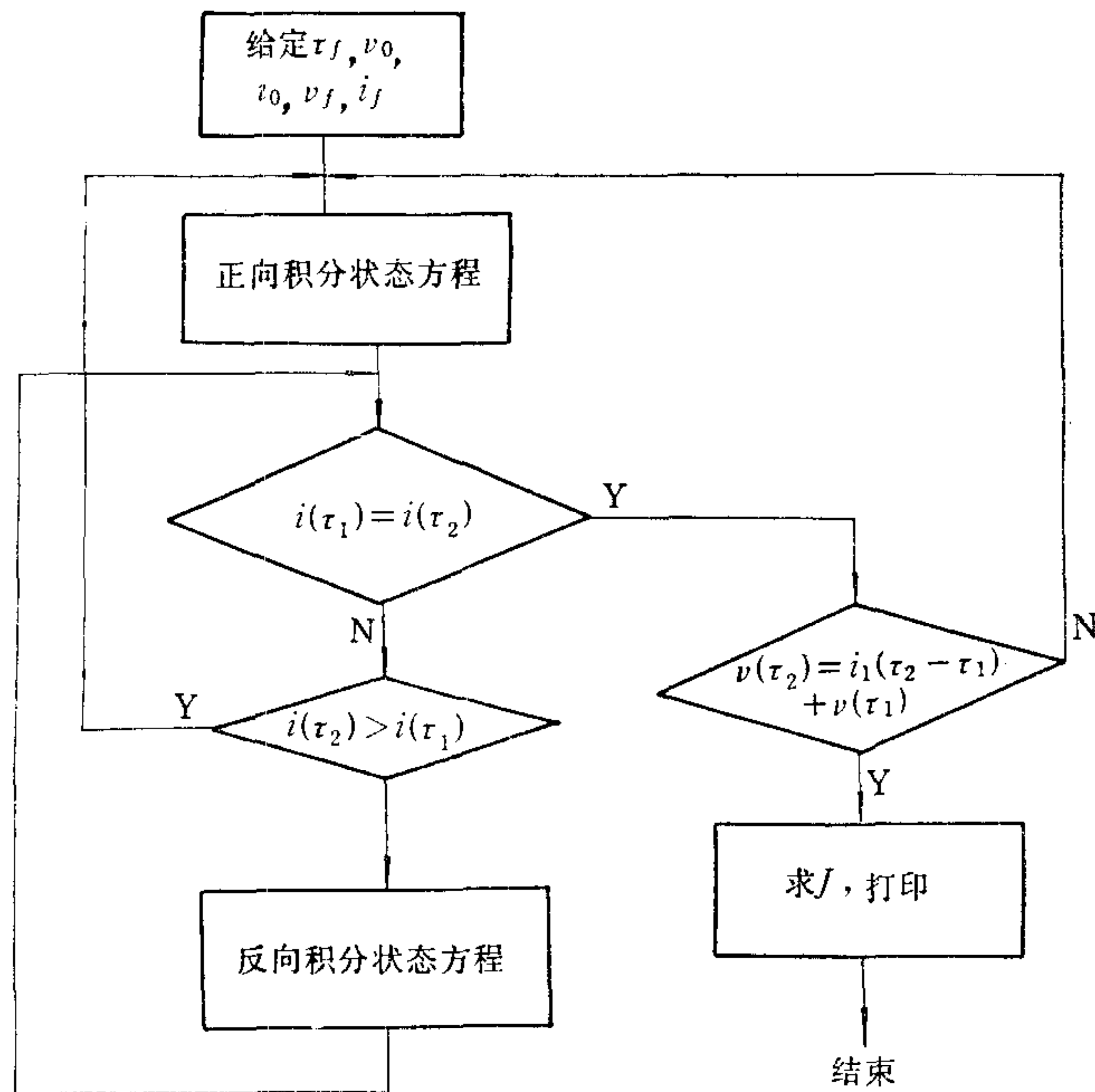


图 2

立方程的条件下可得到  $i(\tau_1)$ 、 $i(\tau_2)$ 、 $v(\tau_1)$ 、 $v(\tau_2)$  唯一的解。解析数值混合法的程序如图 2 所示。

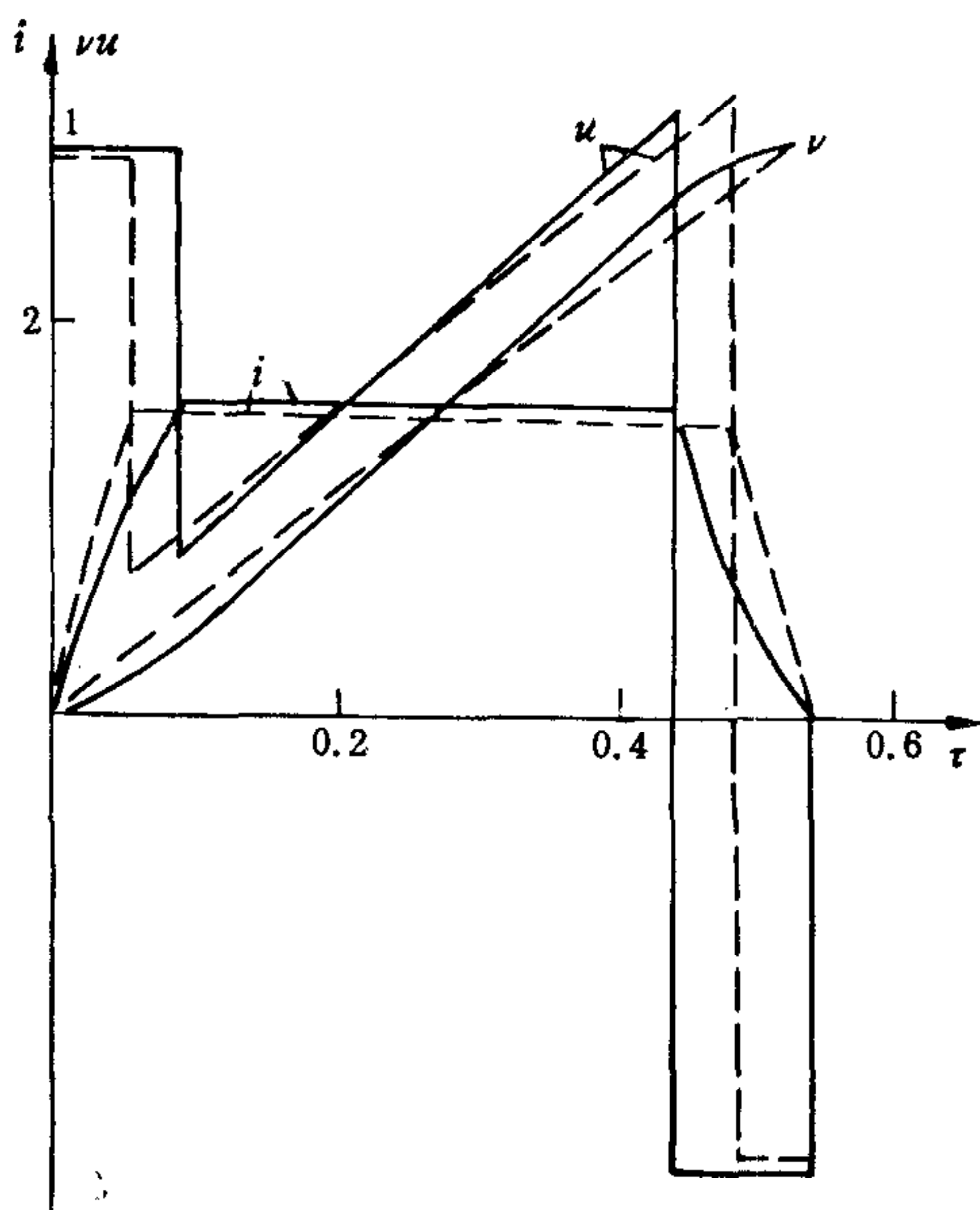


图 3

----  $T_e = 0.027s$     —  $T_e = 0.081s$

以下通过一个电力拖动系统的实例考察电枢电路的电感对最优轨线的影响。直流电动机：1.5kW, 220V, 8.7A,  $GD^2 = 0.12kg \cdot m^2$ ,  $C_e = C_m = 0.138$ ，在不同电感下的两组系数为

第一组： $T_e = L/R = 0.027s$

$k_u = 71, k_v = 66.7, k_i = 14.8,$

第二组： $T_e = 0.081s$

$k_u = 47.3, k_v = 44.7, k_i = 49.3,$

边界条件为

$v_0 = -0.5, v_f = 0.5, i_0 = 0, i_f = 0.$

控制约束  $u_m = 1.$

第一、二组的计算曲线分别以虚线和实线表示于图 3。由图可见，当电感较小时，最优轨线几乎是由奇异弧所构成，正常弧段所

对应的时间很短,而使电流轨线接近于矩形.

### 三、第一类电力拖动的最小能耗控制

第一类电力拖动的约束方程为(1)–(3),性能指标取为(4),边界条件为

$$\alpha(0) = 0, \quad v(0) = v_0, \quad i(0) = 0, \quad (17)$$

$$\alpha(\tau_f) = \alpha_f, \quad v(\tau_f) = v_f, \quad i(\tau_f) = 0. \quad (18)$$

由(1)–(4)作哈密尔顿函数

$$H = i^2 + \lambda_1 v + \lambda_2 i + \lambda_3 (k_u u - k_v v - k_i i),$$

对应着性能指标的梯度  $\nabla J[u] = \lambda_3 k_u = 0$  处的  $H$  函数不再包含  $u$ . 为了把该奇异最优控制转化成非奇异问题,在构造性能指标时引入一辅助项——控制的二次项,并且用代价函数法处理终端约束条件,所得性能指标为

$$J = w_1 [\alpha(\tau_f) - \alpha_f]^2 + w_2 [v(\tau_f)]^2 + w_3 [i(\tau_f)]^2 + \int_0^{\tau_f} [i^2 + \beta u^2] dt, \quad (19)$$

$w_1, w_2, w_3, \beta$ ——权系数,只要  $\beta$  取得足够小,就不会影响最小能耗控制的性质. 经过以上处理后,最小能耗控制转化为(1)–(3)、(17)、(19)的最优控制问题,哈密尔顿函数

$$H = i^2 + \beta u^2 + \lambda_1 v + \lambda_2 i + \lambda_3 (k_u u - k_v v - k_i i) \quad (20)$$

即控制的二次函数,不再有奇异解,容易用直接法搜索其最优控制. 由(20)有协态方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -H_\alpha = 0, \\ \dot{\lambda}_2 &= -H_v = -\lambda_1 + \lambda_3 k_v, \\ \dot{\lambda}_3 &= -H_i = -2i - \lambda_2 + \lambda_3 k_i. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

由(19)可得横截条件

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1(t_f) &= 2w_1 [\alpha(\tau_f) - \alpha_f], \\ \lambda_2(t_f) &= 2w_2 v(\tau_f), \\ \lambda_3(t_f) &= 2w_3 i(\tau_f). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

性能指标在  $u^k$  处的梯度

$$g^k(\tau) = \nabla J[u^k(\tau)] = \frac{\partial H}{\partial u} \Big|_{u=u^k} = \lambda_3 k_u + 2\beta u^k, \quad (23)$$

再利用共轭梯法的计算公式和程序<sup>[8,9]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}^k(\tau) &= -\mathbf{g}^k + \beta_k \mathbf{p}^{k-1}, \\ \beta_k &= \frac{(\mathbf{g}^k, \mathbf{g}^k)}{(\mathbf{g}^{k-1}, \mathbf{g}^{k-1})}, \\ \mathbf{u}^{k+1}(\tau) &= \mathbf{u}^k(\tau) + \alpha_k \mathbf{p}^k, \\ J[\mathbf{u}^k(\tau) + \alpha_k \mathbf{p}^k] &= \min_{\alpha > 0} J[\mathbf{u}^k + \alpha \mathbf{p}^k], \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

即可搜索最优控制.

根据前述两组数据,并取(19)式中的

$$w_1 = w_2 = w_3 = 2000, \quad \beta = 0.5,$$

$$\tau_f = 1.06, \alpha_f = 0.5^{[3]},$$

取寻优初始控制  $u^0 = 0$ . 搜寻所得最优控制和轨线表示在图 4(a) 上, 第二组数据寻优过程性能指标的收敛曲线如图 4(b) 所示.

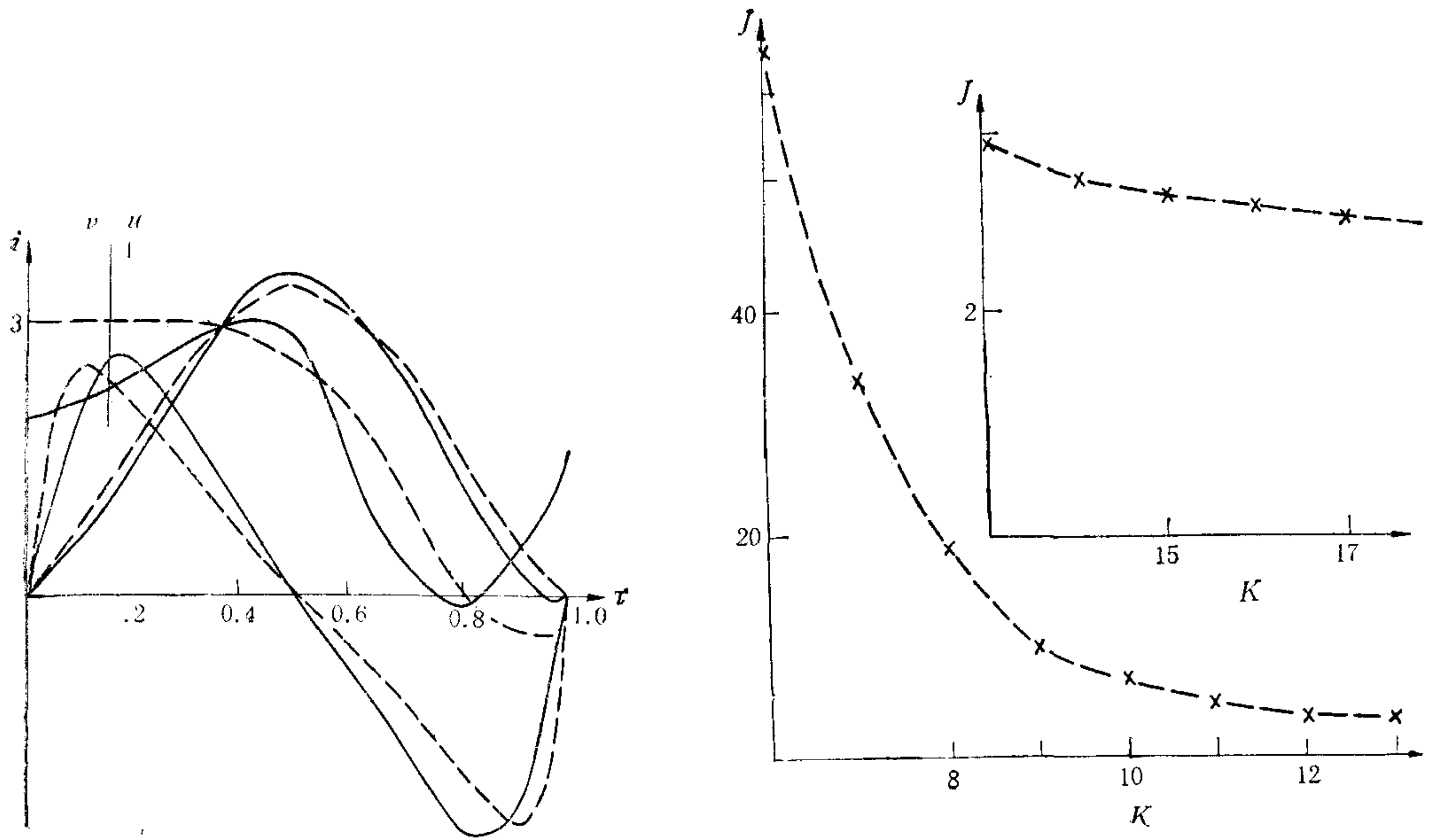


图 4

(a) ----  $T_e = 0.027s$  ———  $T_e = 0.081s$

(b)  $T_e = 0.081$

由图 4(b) 可见,  $\min J = 2.74$ , 对应的能耗经计算后为

$$\min J_0 = \min \int_0^{\tau_f} i^2 d\tau = 2.64.$$

表 1 给出了不考虑电感与考虑电感的最小能耗<sup>[1-3]</sup>的比较.

表 1

矩形电流控制	分段恒定电流控制	不考虑电感的最优控制	考虑电感最优控制
3.35	2.852	2.593	2.624

虽然不考虑电感的最优控制能耗最小,但由于实际上存在电感,故这样的能耗值不可能达到. 考虑电感的最优控制与通常的接近于矩形电流控制的能耗之比

$$\frac{2.624}{3.35} \approx 0.78$$

是更接近实际情况的.

如果对各物理量加上限制条件:  $|u| \leq 1, |i| \leq 3^{[10]}, |v| \leq 1$ , 由图 4、5 寻优的结果表明所有的物理量仍在最大允许值范围内,而且曲线平滑,与不考虑电感的最佳设计<sup>[1-6,7]</sup>

相比,易于实现.

## 四、工程实现和实验

有两种实现方法:

(1) 在性能指标中引入辅助项——控制二次项以后,即可按照线性二次型最优控制的方法用状态反馈的形式实现.一般这是时变调节器;当对过渡时间无严格规定时,可设计为无限时定常调节器.

(2) 用电压反馈形式实现,以最优控制电压  $u^*(t)$  作为电压调节器的给定值.由于微型计算机的运算速度低,一般应根据给定参数和运行条件离线计算出的一系列的最优控制函数  $u^*(t)$  固化于控制计算机.

应用以上实现方法对前述之直流电动机 (1.5kW, 220V, 8.7A) 进行实验研究.

(1) 第一类拖动工作方式的最小能耗起动控制实验,给定边界条件 ( $t_f = 0.55s$ ):

$$i(0) = 0, n(0) = 0, i(t_f) = 0, n(t_f) = 1500rpm.$$

图 5(a) 给出了电流和转速的最优轨线的波形,其中电流的平顶部分是奇异弧,上升和下降部分是正常弧.

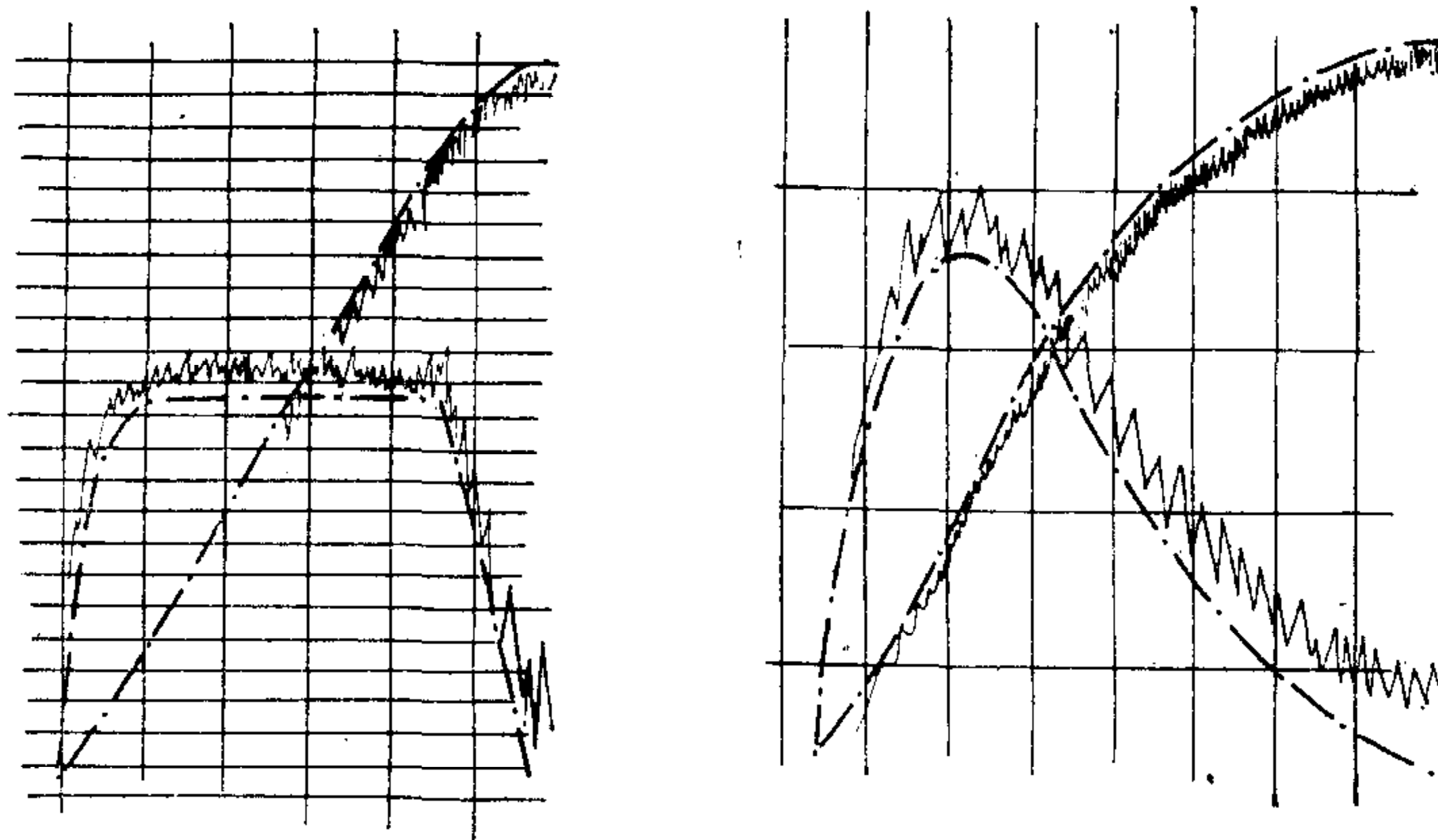


图 5

(a)  $T_e = 0.081s$

(b)  $T_e = 0.081s$

(2) 第二类拖动工作方式的最小能耗控制的起动实验,给定边界条件 ( $t_f = 0.75s$ ):

$$i(0) = 0, n(0) = 0, \alpha(0) = 0, i(t_f) = 0, n(t_f) = 1500rpm, \alpha(t_f) = 8.75.$$

图 5(b) 给出了电流和转速的最优轨线.

## 参 考 文 献

- [1] Петров, Ю.П., Оптимальное Управление Электрическим Приводом с Учетом Ограничений по Нагреву, Энергия, (1971).
- [2] 杨自厚等,电力拖最优控制问题,东工学报,3(1980),44—69.
- [3] 李世卿,杨自厚,吴宝祥,电力拖动最优控制,冶金自动化,1(1985);32—35;2(1985),33—39.
- [4] 胡中楫,节能控制,电气传动,2(1983),1—10.

- [5] 任兴权, 直流拖动系统位置最优控制及准确定位, 冶金自动化, 3(1982).
- [6] Fang Jingzheng, Cook, G., Energy Optimal Control for Steel Rolling, *IEEE Tr. IE*, 4(1985), 388—392.
- [7] Cathey, J.J., Reduction of DC Traction Motor Armature Copper Losses, *EME*, (1979), 269—281.
- [8] 宫锡芳, 最优控制问题的计算方法, 科学出版社(1979), 105, 135.
- [9] 童调生, 童季贤, 最优控制奇异解的探讨, 科学探索学报, 1(1984), 67—70.
- [10] 北京钢铁设计院等, 钢铁企业电力设计参考资料(下册), 冶金工业出版社(1976), 166.

## A STUDY ON THE MINIMUM-ENERGY CONSUMPTION CONTROL CONSIDERING ARMATURE INDUCTANCE AND THE ALGORITHM FOR SINGULAR SOLUTION

TONG TIAOSHENG

(Hunan University)

### ABSTRACT

The minimum-energy consumption control under the condition of neglecting the armature inductance has been described by many papers, in which the engineering realization of the optimization problem is very difficult.

In this paper, the mathematical model of minimumenergy consumption control problem with circuit-equation are presented. For singular solution of the mathematical model, an analytic-numerical method is presented, and with the introduction of an auxiliary term into the performance index the singular problem is transformed into a nonsingular optimal regulator. Then the engineering realization for the minimum-energy consumption control considering armature inductance is suggested.