

分散控制系统的稳定性频域判据¹⁾

许晓鸣 吴智铭
(上海交通大学)

摘 要

本文给出一个针对分散型控制系统的稳定性频域判据,这个判据将大系统的稳定性分解成 N 个小系统问题进行判别,因而具有很多优点.文中讨论了频域判据的物理意义,并将该判据应用到分散控制器的增益设定和分散镇定补偿器的设计.最后给出一个数值例子.

一、引 言

大系统的分散控制是近年来大系统理论中一个较为活跃的分支.由于历史的原因,在研究分散控制问题时一般都采用时间域中的方法.目前在多变量系统中,频域技术已得到了很大的发展^[1-3],将这些技术与大系统的方法论相结合,有可能产生一些大系统分析设计的频域方法,改变时域法“一统天下”的局面.就控制理论现有的水平来看,频域法仍具有其它方法一时难以取代的优点:1)控制对象的频率响应模型是一种可通过实验直接获得的非参数模型,从而减小了建模时引起的误差;2)频域法设计得到的控制器对参数扰动具有较好的鲁棒性^[4];3)由于系统的输入输出数目一般远小于状态的数目,所以采用频域模型可降低计算的维数;4)分析设计时的物理意义比较清楚.

本文准备对分散控制中最重要的稳定性问题提供一种新的研究方法.首先给出一个适用于分散控制系统的稳定性频域判据,并说明该判据的物理意义.然后讨论分散频域判据的两个应用:1)分散控制器的增益设定;2)分散镇定补偿器的设计.最后给出一个数值实例.

二、分散 Nyquist 稳定性判据

分散控制系统的稳定性问题,在状态空间法中的描述如下:给定对象

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} \mathbf{x}_j + \sum_{j=1}^N B_{ij} \mathbf{u}_j, & i = 1, \dots, N, \\ \mathbf{y}_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} \mathbf{x}_j, & i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} \mathbf{x}_j, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2)$$

其中 $\mathbf{x}_i \in \mathbf{R}^{n_i}$ 是子系统 i 的状态; $\mathbf{y}_i \in \mathbf{R}^{p_i}$ 是子系统 i 的输出; $\mathbf{u}_i \in \mathbf{R}^{m_i}$ 是子系统 i 的

本文于1986年6月4日收到.

1) 本文得到国家自然科学基金资助.

输入; $A_{ij} \in \mathbf{R}^{n_i \times n_i}$, $B_{ij} \in \mathbf{R}^{n_i \times m_i}$; $C_{ij} \in \mathbf{R}^{p_i \times n_i}$; $\sum_{j=1}^N n_j = n$; $\sum_{j=1}^N p_j = p$; $\sum_{j=1}^N m_j = m$.

分散控制器的状态方程为:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_i = H_i \mathbf{z}_i + L_i \mathbf{y}_i, & i = 1, \dots, N, \\ \mathbf{u}_i = -M \mathbf{z}_i - F_i \mathbf{y}_i + \mathbf{v}_i, & i = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (3)$$

$$(4)$$

其中 $\mathbf{z}_i \in \mathbf{R}^{r_i}$; $\mathbf{v}_i \in \mathbf{R}^{m_i}$; $H_i \in \mathbf{R}^{r_i \times r_i}$; $L_i \in \mathbf{R}^{r_i \times p_i}$; $M_i \in \mathbf{R}^{m_i \times r_i}$; $F_i \in \mathbf{R}^{m_i \times p_i}$; $\sum_{i=1}^N r_i = r$.

此时闭环大系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BFC & -BM \\ LC & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}. \quad (5)$$

其中 $\mathbf{x}^T = [x_1^T, \dots, x_N^T]^T$; $\mathbf{v}^T = [v_1^T, \dots, v_N^T]^T$; $\mathbf{z}^T = [z_1^T, \dots, z_N^T]^T$; $A = (A_{ij})_{N \times N}$; $B = (B_{ij})_{N \times N}$; $C = (C_{ij})_{N \times N}$; $F = \text{block-diag}(L_1, \dots, L_N)$; $M = \text{block-diag}(M_1, \dots, M_N)$; $L = \text{block-diag}(L_1, \dots, L_N)$; $H = \text{block-diag}(H_1, \dots, H_N)$. 显然闭环大系统稳定等价于(5)式中系统矩阵的所有根落在复平面的左半平面内.

命题 2.1. $\det(sI - A_c) = \det(sI - A) \prod_{i=1}^N \det(sI - H_i) \cdot \det[I + K(s)P(s)]$ (6)

其中 A_c 是闭环系统(5)的系统矩阵; $K(s) = \text{block-diag}(K_1(s), \dots, K_N(s))$; $K_i(s) = M_i(sI - H_i)^{-1}L_i + F_i$, $i = 1, \dots, N$; $P(s) = C(sI - A)^{-1}B$, 其它符号的定义可参见式(1)–(4).

证明参见文献 [5].

命题 2.2. $\det[I + K(s)P(s)] = \prod_{i=1}^N \det[I + K_i(s)G_{ii}^{(i)}(s)]$,

其中 $K(s)$, $P(s)$, $K_i(s)$ 的含义同命题 2.1, $G_{ii}^{(i)}(s)$ 是矩阵 $G^{(i)}(s)$ 的第(1,1)块子矩阵, $G^{(i)}(s)$ 的一般形式为

$$G^{(i)}(s) = \begin{bmatrix} G_{ii}^{(i)}(s) & \dots & G_{iN}^{(i)}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ G_{Ni}^{(i)} & \dots & G_{NN}^{(i)}(s) \end{bmatrix}.$$

$$G_{jk}^{(i)}(s) = G_{jk}^{(i-1)}(s) - G_{j,i-1}^{(i-1)}(s)[I + K_{i-1}(s)G_{i-1,i-1}^{(i-1)}(s)]^{-1}K_{i-1}(s)G_{i-1,k}^{(i-1)}(s),$$

$1 < i \leq N$; $j \geq i$; $k \geq i$. $G^{(i)}(s)$ 的初值 $G^{(1)}(s) = P(s)$.

证明. 反复应用行列公式

$$\det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \det A_{11} \cdot \det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}),$$

其中 $\det A_{11} \neq 0$, 即得所欲证.

定理 2.1 (分散 Nyquist 判据). 记 d 和 e_i 分别为 $P(s)$ 和 $K_i(s)$ 在右半平面内的极点数; D 是包含所有右半平面开环零极点的 Nyquist 路径; $N_{(\alpha)}[f(s)]$ 是当 s 沿 D 顺时针移动一周时 $f(s)$ 逆时针绕 (α, j_0) 的圈数; $\lambda_i^{(j)}(s)$ 是 $K_i(s)G_{ii}^{(i)}(s)$ 的第 j 条特征轨迹. 闭环系统(5)稳定的充分必要条件是:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m_i} N_{(-1)}[\lambda_i^{(j)}(s)] = d + \sum_{i=1}^N e_i. \quad (7)$$

证明. 应用复变函数的幅角原理和命题 2.1, 从(5)式可以得到闭环系统稳定的充分必要条件为

$$0 = d + \sum_{i=1}^N e_i - N_{(0)}[\det(I + K(s)P(s))]. \quad (8)$$

由特征根与矩阵的关系和命题 2.2, 有

$$\begin{aligned} N_{(0)}[\det(I + K(s)P(s))] &= \sum_{i=1}^N N_{(0)}[\det(I + K_i(s)G_{ii}^{(i)}(s))] \\ &= \sum_{i=1}^N N_{(0)} \left[\prod_{j=1}^{m_i} (1 + \lambda_i^{(j)}(s)) \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m_i} N_{(-1)}[\lambda_i^{(j)}(s)]. \end{aligned} \quad (9)$$

结合上式与(8)式, 即得所欲证.

与多变量系统的广义 Nyquist 判据^[5]相比, 分散 Nyquist 判据(定理 2.1)有以下特点:

- 1) 当 $N = 1$ 时, 分散判据和广义判据是一致的;
- 2) 分散判据绘制的是 $K_i(j\omega)G_{ii}^{(i)}(j\omega)$ 当 ω 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化时的特征轨迹, 涉及的维数比广义判据中的 $K(j\omega)P(j\omega)$ 要低得多;
- 3) 各个子系统控制器 $K_i(s)$ 的作用, 在(9)式中得到了体现, 这对于分析和设计分散控制器是有利的.

三、分散 Nyquist 判据的物理意义

定理 2.1 虽然将大系统的稳定性分解成 N 个低阶系统的问题加以研究, 但是 $G_{ii}^{(i)}(s)$ 所代表的物理意义尚不清楚, 它既不是开环系统 $P(s)$ 的第 (i, i) 子块, 也不是闭环系统 $P(s)[I + K(s)P(s)]^{-1}$ 的第 (i, i) 子块, 它的确定与 $P(s)$ 和 $K_1(s), \dots, K_{i-1}(s)$ 有关.

对于工程技术人员来说, 了解问题的物理背景, 往往能使他们充分利用其实践经验, 使分析和设计更易于成功. 此外, 了解 $G_{ii}^{(i)}(s)$ 的物理意义, 也为用实验方法获得 $G_{ii}^{(i)}(j\omega)$ 提供了理论上的依据.

命题 3.1. 记 $\hat{K}_i(s) = \text{block-diag}(K_1(s), \dots, K_{i-1}(s), 0 \dots, 0)$, 则以 $\hat{K}_i(s)$ 为反馈控制器的闭环系统传递函数矩成为

$$\tilde{G}^{(i)}(s) = P(s)[I + \hat{K}_i(s)P(s)]^{-1}, \quad \text{且} \quad \tilde{G}^{(1)}(s) = P(s).$$

上述 $\tilde{G}^{(1)}(s), \dots, \tilde{G}^{(N)}(s)$ 之间满足以下递推关系:

$$\tilde{G}_{j,k}^{(i)} = G_{j,k}^{(i-1)} - \tilde{G}_{j,i-1}^{(i-1)}(I + K_{i-1}\tilde{G}_{i-1,i-1}^{(i-1)})^{-1}K_{i-1}\tilde{G}_{i-1,k}^{(i-1)}, \quad i = 2, \dots, N; 1 \leq j, k \leq N,$$

其中 $\tilde{G}_{j,k}^{(i)}$ 是 $\tilde{G}^{(i)}(s)$ 的第 (j, k) 块子矩阵.

证明. 记 $E_i = [0, \dots, 0, I, 0, \dots, 0]^T$, 其中单位阵 I 在第 i 块列. 则

$$\begin{aligned} \tilde{G}^{(i)}(s) &= P(s)[I + \hat{K}_i(s)P(s)]^{-1} \\ &= P(s)[I + \hat{K}_{i-1}(s)P(s) + E_{i-1}K_{i-1}(s)E_{i-1}^T P(s)]^{-1} \\ &= \tilde{G}^{(i-1)}(s)[I + E_{i-1}K_{i-1}(s)E_{i-1}^T \tilde{G}^{(i-1)}(s)]^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \tilde{G}^{(i-1)}(s) - \tilde{G}^{(i-1)}(s)E_{i-1}(I + K_{i-1}(s)E_{i-1}^T\tilde{G}^{(i-1)}(s)E_{i-1})^{-1}E_{i-1}^T\tilde{G}^{(i-1)}(s) \\
 &= \tilde{G}^{(i-1)}(s) - \tilde{G}^{(i-1)}(s)E_{i-1}(I + k_{i-1}(s)\tilde{G}_{i-1,i-1}^{(i-1)})^{-1}E_{i-1}^T\tilde{G}^{(i-1)}(s).
 \end{aligned}$$

因此,对于任意的 $1 < i \leq N, 1 \leq j \leq N, 1 \leq k \leq N,$

$$\tilde{G}_{j,k}^{(i)} = E_j^T \tilde{G}^{(i)} E_k = \tilde{G}_{j,k}^{(i-1)} - \tilde{G}_{j,i-1}^{(i-1)}(1 + K_{i-1}\tilde{G}_{i-1,i-1}^{(i-1)})^{-1}\tilde{G}_{i-1,k}^{(i-1)}.$$

将命题 3.1 中的 $\tilde{G}_{j,i}^{(i)}$ 与命题 $G_{j,i}^{(i)}$ 相比较,不难发现 $\tilde{G}_{j,i}^{(i)} = G_{j,i}^{(i)}$. 由此可知, $G_{j,i}^{(i)}(s)$ 的物理意义是当子系统 $1 \sim (i-1)$ 加上反馈控制器 $K_1(s) \sim K_{i-1}(s)$, 而子系统 $i \sim N$ 开路时,第 i 个子系统的输入输出之间的传递函数矩阵.

借助于 $G_{j,i}^{(i)}(s)$ 的物理意义, $G_{j,i}^{(i)}(j\omega)$ 可以在 $K_1(s), \dots, K_{i-1}(s)$ 设计并闭路好之后直接从子系统 i 中测量得到. 判别大系统稳定性的工作可以按下列步骤依次进行:

- 1) 令 $i = 1$;
- 2) 在第 i 个子系统中,测量 u_i 到 y_i 之间的频率响应 $G_{j,i}^{(i)}(j\omega), 0 \leq \omega < +\infty$;
- 3) 绘制 $K_i(j\omega)G_{j,i}^{(i)}(j\omega)$ 的特征轨迹;
- 4) 将子系统 i 的反馈控制器 $K_i(s)$ 闭路;
- 5) $i + 1 \rightarrow i$, 若 $i > N$ 则转向 6), 否则返回 2);
- 6) 用分散 Nyquist 判据检验大系统的闭环稳定性.

显然,用上述方法判别大系统的稳定性,能避免由于 $K(j\omega)P(j\omega)$ 的高维性给特征轨迹计算所带来的不利影响,同时在计算机算法实现时大大减少了占用的内存.

四、分散 Nyquist 判据的应用

利用定理 2.1, 本节将给出两个分散控制器设计中有用的算法.

1. 分散控制器的增益设计

假设各子系统控制器的增益可以调节, 即 $K_i(s) = k_i K'_i(s)$, 其中 $k_i > 0$ 是可调增益. 我们希望增益 k_1, \dots, k_N 的设定, 能使闭环系统稳定. 从定理 2.1 出发, 很容易得到下面的推论.

推论 4.1. 设 $K_i(s) = k_i K'_i(s)$, $\lambda_i^{(j)}(s)$ 是 $K'_i(s)G_{j,i}^{(i)}(s)$ 的特征轨迹, 则闭环系统 (5) 稳定的充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m_i} N_{(-\frac{1}{k_i})} [\lambda_i^{(j)}(s)] = d + \sum_{i=1}^N e_i.$$

式中其它符号的含义同定理 2.1.

证明省略.

在大部分工业过程系统中,对象本身是稳定的,所设计的调节器也要求稳定,即 $d + \sum_{i=1}^N e_i = 0$. 利用推论 4.1, 可以导出分散调节器(或控制器)增益设定的算法.

算法 4.1.

step 1: 令 $i = 1, G^{(1)}(s) = P(s)$;

step 2: 确定适当的 k_i 值, 使 $\left| \sum_{l=1}^i \sum_{j=1}^{m_l} N_{(-\frac{1}{k_l})} [\lambda_l^{(j)}(s)] \right| \rightarrow \min$;

step 3: 计算 $G^{(i+1)}(s)$;

step 4: $i + 1 \rightarrow i$, 若 $i > N$ 转向 step 5, 否则返回 step 2;

step 5: 若 $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m_i} N_{(-\frac{1}{k_i})}[\lambda_i^{(j)}(s)] = 0$, 算法结束, 否则重新启动.

2. 分散镇定补偿器的设计

所谓分散镇定补偿器的设计, 是指在各子系统设计补偿器 $K_i(s)$, 使得整个闭环大系统是稳定的.

为了保证解的存在性, 不妨假定系统没有不稳定的固定模. 在以前的时域方法^[6]中, 设计分散镇定补偿器需要反复凑试. 现将多变量频域设计与分散 Nyquist 判据相结合, 导出分散镇定补偿器的设计算法. 我们仍限定补偿器 $K_i(s)$ 本身是稳定的.

算法 4.2.

step 1: 令 $i = 1$, $G^{(1)}(j\omega) = P(j\omega)$;

step 2: 确定期望的开环增益矩阵 $Q_i(j\omega)$, 在其它要求满足的前提下, 使

$$\left| \sum_{l=1}^i \sum_{k=1}^{m_l} N_{(-1)}[\tilde{\lambda}_l^{(k)}(j\omega)] - d \right| \rightarrow \min,$$

其中 $\tilde{\lambda}_l^{(k)}(j\omega)$ 是 $Q_l(j\omega)$ 的第 k 条特征轨迹;

step 3: 设计稳定的 $K_i(s)$, 使 $K_i(j\omega)G_{ii}^{(i)}(j\omega) \simeq Q_i(j\omega)$;

step 4: 若 $i = N$, 设计结束, 否则转向 step 5;

step 5: 计算 $G^{(i+1)}(j\omega)$, $i + 1 \rightarrow i$, 返回 step 2.

在算法 4.2 中, 如何选取 $Q_i(j\omega)$ 和计算 $K_i(s)$ 是设计的关键, 有关这些问题的详细讨论, 显然已经超出了本文的研究范围, 有兴趣的读者可以参见文献[7]和[8]. 但有两点值得注意.

1) $Q_i(j\omega)$ 是 $K_i(j\omega)G_{ii}^{(i)}(j\omega)$ 的期望值, 它的选取具有一定的自由度, 如果一次设计没有成功, 可以在下一次设计时改变它们;

2) 稳定的 $K_i(s)$ 的计算一般采用数值拟合的方法, 如果允许的拟合参数增多 (意味着阶数增高), $K_i(j\omega)G_{ii}^{(i)}(j\omega)$ 对 $Q_i(j\omega)$ 的拟合精度将得到提高.

与文献[6]提出的分散镇定方案相比, 本文提出的方法更便于实现, 这主要是因为设计 $K_i(s)$ 时, 以前设计好的 $K_1(s), \dots, K_{i-1}(s)$ 对系统的影响都给予了考虑.

五、数值例子^[1]

已知对象模型

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{1.0}{4s+1} & \frac{0.7}{5s+1} & \frac{0.3}{5s+1} & \frac{0.2}{5s+1} \\ \frac{0.6}{5s+1} & \frac{1.0}{4s+1} & \frac{0.4}{5s+1} & \frac{0.35}{5s+1} \\ \frac{0.35}{5s+1} & \frac{0.4}{5s+1} & \frac{1.0}{4s+1} & \frac{0.6}{5s+1} \\ \frac{0.2}{5s+1} & \frac{0.3}{5s+1} & \frac{0.7}{5s+1} & \frac{1.0}{4s+1} \end{bmatrix}.$$

将系统平均划分成两个子系统 S_1 和 S_2 , 假设 S_1 的控制器和 S_2 的控制器分别为

$$K_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{20}{s+4} & \frac{10}{s+10} \\ \frac{10}{s+10} & \frac{20}{s+4} \end{bmatrix}, \quad K_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{20}{s+4} & \frac{10}{s+10} \\ \frac{10}{s+10} & \frac{20}{s+4} \end{bmatrix},$$

全局系统的控制器 $K(s) = \text{block-diag} [K_1(s), K_2(s)]$, 现利用分散 Nyquist 判据来判别闭环系统的稳定性.

- 1) 确定工作频率集合 $\Omega = \{0.01, 0.02, \dots, 10.00\}$;
- 2) 计算 $K_1(j\omega)G_{11}^{(1)}(j\omega)$ 在 Ω 上的值, 其中

$$G_{11}^{(1)}(s) = P_{11}(s) + \begin{bmatrix} \frac{1.0}{4s+1} & \frac{0.7}{5s+1} \\ \frac{0.6}{5s+1} & \frac{1.0}{4s+1} \end{bmatrix};$$

- 3) 绘制 $K_1(j\omega)G_{11}^{(1)}(j\omega)$ 的特征轨迹(见图 1);
- 4) 计算 $K_2(j\omega)G_{22}^{(2)}(j\omega)$ 在 Ω 上的值, 其中

$$\begin{aligned} G_{22}^{(2)}(j\omega) &= G_{22}^{(1)}(j\omega) - G_{21}^{(1)}(j\omega)[I + K_1(j\omega)G_{11}^{(1)}(j\omega)]^{-1}K_1(j\omega)G_{12}^{(1)}(j\omega) \\ &= P_{22}(j\omega) - P_{21}(j\omega)[I + K_1(j\omega)P_{11}(j\omega)]^{-1}K_1(j\omega)P_{12}(j\omega); \end{aligned}$$

- 5) 绘制 $K_2(j\omega)G_{22}^{(2)}(j\omega)$ 的特征轨迹(见图 2).

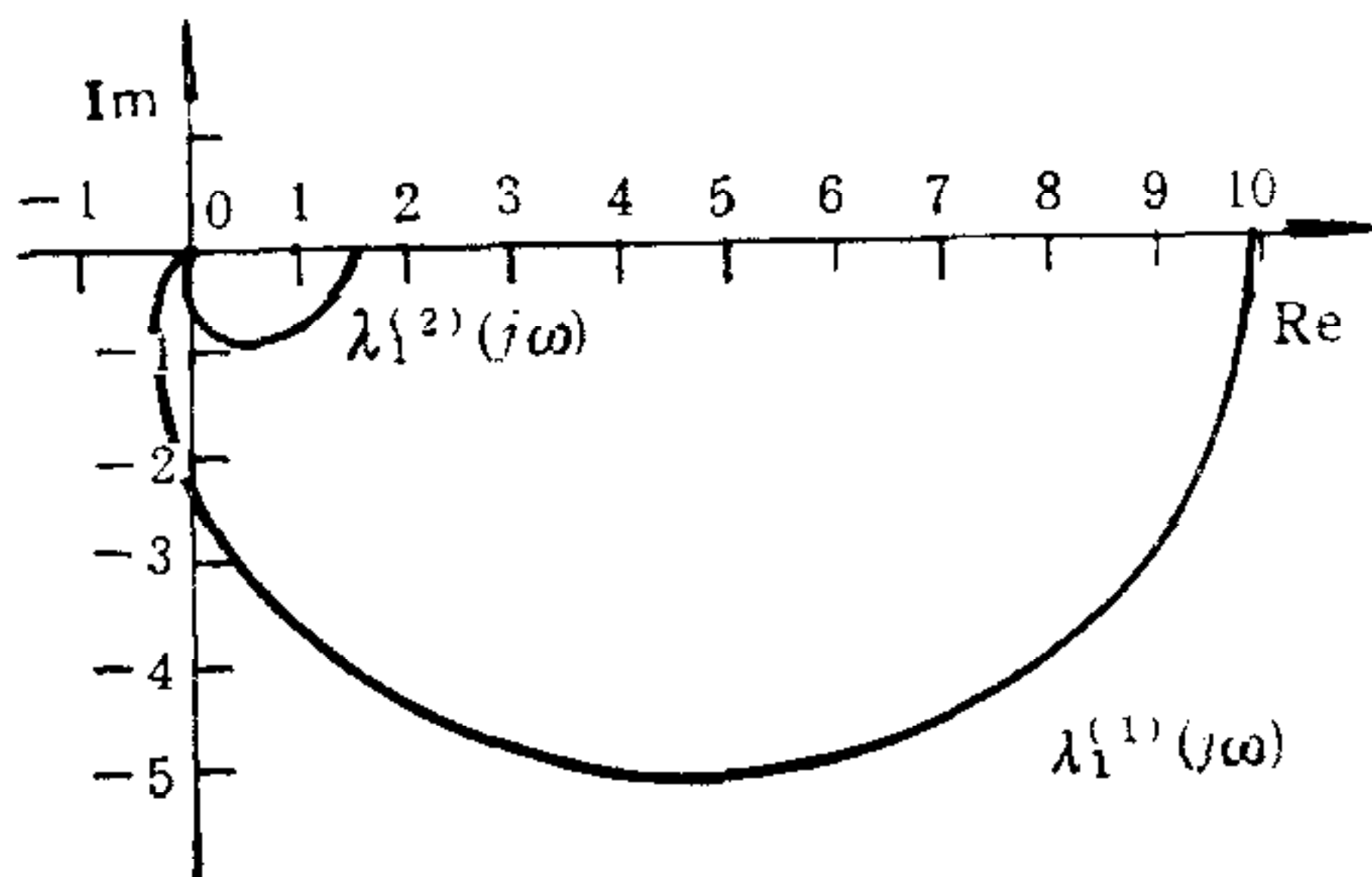


图 1

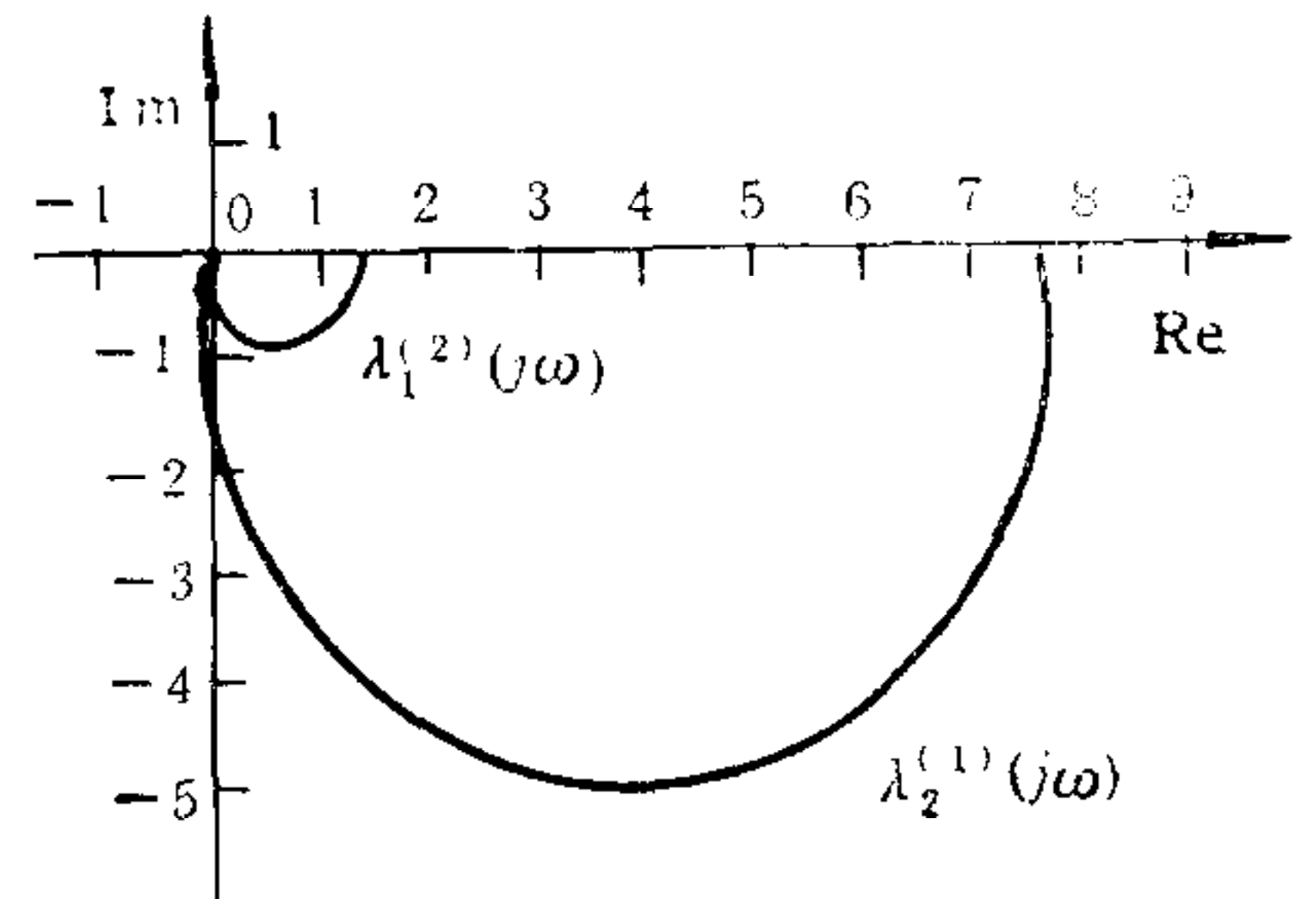


图 2

由于 $P(s), K_1(s), K_2(s)$ 在右半平面均无极点, 因此 $d + e_1 + e_2 = 0$ 。由图 1 和图 2 可以看出, Nyquist 曲线均没有包围 $(-1, j_0)$ 临界点, 故按定理 2.1, 闭环系统是稳定的。系统仿真的结果证实了这一点。

六、评 论

(1) 频域方法在大系统理论中的应用还只是刚刚开始, 本文仅对分散控制系统稳定性的判别问题进行了研究, 事实上对其它问题也可能得到类似的推广;

(2) 虽然分散 Nyquist 判据处理的是连续系统, 但只需将 s 换成 z , 右半平面换成单位圆外, 就可将该判据用于离散大系统;

(3) 本文中进行的频域分析和设计, 必须借助于数字计算机进行处理, 故属于一种计算机辅助设计 (CAD) 技术。

参 考 文 献

- [1] Rosenbrock, H. H., Computer-aided Control Systems Design, Academic Press, (1974).
- [2] Mayne, D. Q. and Chang, S. C., The Sequential Return Difference Method for Designing Linear Multivariable Systems, Proc. of the IEE Conference on Computer-aided Control Systems, Cambridge (1973).
- [3] MacFarlane, A. G. J. (editor), Complex Variable Methods for Linear Multivariable Feedback Systems, Taylor and Francis, (1980).
- [4] Horowitz, I. M. and Shaked, U., Superiority of Transfer Function Over State Variable Method, *IEEE Trans. AC-20*(1975), 84—97.
- [5] MacFarlane, A. G. J. and Postlathwaite, I., The Generalized Nyquist Stability Criterion and Multivariable Root Loci, *Int. J. Control*, **25**(1975), 84—97.
- [6] Wang, S. and Davison, E. J., On the Stabilization of Decentralized Control Systems, *IEEE Trans. AC-18*(1973), 473—478.
- [7] Wu, Z. M. and Hsu, X. M., A Frequency Domain Method for Approximately Decoupling Normalized Compensators, Proc. of 3rd IFAC/IFIP International Symposium on CADCE'85, Denmark (1985), 473—475.
- [8] Hung, Y. S. and MacFarlane, A. G. J., Multivariable Feedback: A Quasiclassical Approach, Lecture Notes in Control and Information Science, Springer-Verlag, (1982).

A FREQUENCY DOMAIN STABILITY CRITERION FOR DECENTRALIZED CONTROL SYSTEM

XU XIAOMING WU ZHIMING

(Shanghai Jiao tong University)

ABSTRACT

A frequency domain stability criterion is presented in this paper for large scale decentralized control systems. The criterion decomposes the stability problems of large scale systems into N small ones and, therefore, has many good properties. The physical background of the criterion is discussed in detail and its applications to the design of decentralized controller are proposed. A numeric example is given at the end.