第14卷 第4期 自 动 化 学 报 Vol.14, No.4
1988 年 7 月 ACTA AUTOMATICA SINICA July, 1988

一般多状态单调关联系统

于 凯 郭余庆
(中国矿院北京研究生部)

摘 要

多状态单调关联系统是系统可靠性理论的新发展,目前见到的研究均在元件(系统)状态集合为全序集条件下进行的. 这种结构实际应用有一定的局限性. 本文根据实际系统的单调性状,在元件与系统状态集合为偏序的假定下,给出一类多状态单调关联系统的定义. 并对其结构性质、随机性质及分布类封闭性质进行了研究,得出若干结果.

一、引 言

单调关联系统理论是系统可靠性理论的基础,它把元件(系统)状态看作两状态(完好、失效). 但现实中许多情况系统和元件不适于用两态来描述. 因此近十年来若干学者如 Ross. S[1], Barlow & Wu[2] 和 El-Neweihi[3]等人开始了关于多状态系统理论的研究. 其思路如下:

对由 n 个元件构成的系统,元件 $i(i\in\overline{1,n})$ 及系统的状态集合分别为 $E_i=\{e_i^0,\cdots,e_i^{M_i}\}$ 及 $S=\{s,\cdots,s_M\}$. 这里 M_i+1 $(M+1)$ 个状态表示元件 i (系统) 功能由完全正常的 $e_i^{M_i}(s_M)$ 逐次下降到完全失效的 $e_i^0(s_0)$ 的各级功能水平. 故 S, E_i 均为全序集. 用 $x_i\in E_i$ 表示元件 i 的状态; $\boldsymbol{x}\in E=\prod_{i=1}^{n}E_i$ 表示元件集合总状态. 系统与元件的结构关系定义为映射 $\phi: E\to S$, $\forall \boldsymbol{x}\in E$, $\phi(\boldsymbol{x})\in S$. 对于这种结构 El-Neweihi 等给出了多状态单调关联系统 (MSCS)1) 的定义[2,3],并对它的各种性质进行了研究.

单调性表现为元件功能降级决不会使系统功能提高. 关联性则表现为系统中每个元件功能变化都对系统有影响.

El-Neweihi 等定义的 MSCS 是以元件(系统)状态的全序集为条件的,即假定每个元件(系统)各个状态可按其对应的功能水平下降的严重程度、下降先后顺序及包含关系等从头至尾排成一序列. 这时元件(系统)的失效类型仅有一个,只是失效的严重程度分为不同级别. 然而,许多实际系统的某些元件功能降级常表现为不同类型不同程度的故障,对不同类型故障状态无法排序对比. 而大多数含这类元件的系统,元件功能降级(不管哪类故障的降级)时系统功能决不会提高. 虽具有单调关联性质,但全序 MSCS 不能描述这类系统的情况. 本文对全序 MSCS 结构进行扩充,在元件(系统)状态集为编序

本文于 1986 年 8 月 26 日收到.

1) MSCS; Multistata coherent Systems 的缩写.

集的假定下给出更一般的 MSCS 结构．并将全序 MSCS 理论对偏序 MSCS 进行推广．

二、符号及意义

为简化叙述，将本文用到的部分符号及其意义列于表 1．其它符号见文中说明．

表 1

符　号	意　义
$\prec$	偏序"先于"关系序；
$\preccurlyeq$	偏序"先于等于"关系符；
$a \succ\!-\!\prec b$	a 与 b 可比较；
$a \succ\!-\!/\!-\!\prec b$	a 与 d 不可比较；
$a \vee b$	$\{a, b\}$ 上确界；
$a \wedge b$	$\{a, b\}$ 下确界；
$B(g_i)$, $g_i \in G$	元素 g_i 的上集合：$B(g_i) = \{g_k : g_k \succcurlyeq g_i,\ g_k \in G\}$；
$W(g_i)$	元素 g_i 的下集合：$W(g_i) = \{g_k : g_k \preccurlyeq g_i, g_k \in G\}$；
$U(g_i)$	元素 g_i 上邻点集：$U(g_i) = \{g_k : g_k \succ g_i,\ g_k \in G$，但不存在另一元素 $g_l \in G$，使 $g_k \succ g_l \succ g_i\}$；
$L(g_i)$	元素 g_i 下邻点集：$L(g_i) = \{g_k : g_k \prec g_i,\ g_k \in G$，但不存在另一元素 $g_l \in G$，使 $g_k \prec g_l \prec g_i\}$；
p_i^k	元件 i 处于状态 e_i^k 的概率：$\mathrm{P_r}\{x_i = e_i^k\}$；
$P_i(e_i^k)$	元件 i 状态 e_i^k 上集概率：$\mathrm{P_r}\{x_i \succcurlyeq e_i^k\}$；
$Q_i(e_i^k)$	元件 i 状态 e_i^k 下集概率：$\mathrm{P_r}\{x_i \preccurlyeq e_i^k\}$；
$\boldsymbol{p}_i$	元件 i 概率分布向量：$(p_i(e_i^1), \cdots\cdots, p_i(e_i^{M_i}))$；
$\mathbf{P}$	元件集合概率分布：$(\boldsymbol{p}_1, \cdots\cdots, \boldsymbol{p}_n)$；
$1_{\{\cdot\}}(x)$	集合$\{\cdot\}$的示性函数．

三、基本定义及结构性质

实际系统中普遍存在这样一种多态元件，它有一个正常状态，多个不同类型的故障状态．正常状态向任一故障状态变化均表现为元件功能的降级，但各不同类型故障状态之间不存在降级关系．为能描述这类元件(系统)各状态的这种关系，对元件及系统状态集合定义如下：

定义 3.1. 对一具有 n 个元件的系统，元件及系统的状态集合为一有限偏序集

$$(E_i, \prec):\ E_i = \{e_i^1, e_i^2, \cdots, e_i^{M_i}\},\ (i \in \overline{1,n}).$$

$$(S, \prec): S = \{s_1, s_2, \cdots, s_M\}.$$

各集合均有唯一极大元即最大元 $e_i^{M_i}$, s_M; 有若干极小元 $e_i^{0_j}$, s_{0j}, $j = 1, 2, \cdots$; 集合内元素间关系为偏序关系．定义中最大元表示元件或系统完全正常的状态．

定义 3.2. 设 $(E_i, \prec)$ 为元件 i 状态集$(i \in \overline{1,n})$，在元件集合状态空间 $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ 上定义序关系为

$$\forall \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in E,\ \forall \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \boldsymbol{E},$$

$$\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y} \Longleftrightarrow \forall i \in \overline{1,n},\ x_i \leqslant y_i,\ \text{且}\ \exists i_0,\ x_{i0} \prec y_{i0}.$$

显然 E 内总有最大元 $e^M = (e_1^{M_1}, e_2^{M_2}, \cdots, e_n^{M_n})$.

定义 3.3. 设 E, S 为元件及系统状态集，E 上定义一结构函数 $\phi: E \to S$ 称为多态单调的 (MMS)，如果满足 $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E, \boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y} \Rightarrow \phi(\boldsymbol{x}) \leqslant \phi(\boldsymbol{y})$，单调结构有如下性质：

性质 3.1. 证明略.

1) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$, $\phi(\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}) \geqslant \phi(\boldsymbol{x}) \vee \phi(\boldsymbol{y})$.

2) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$, 如 $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}$ 存在，则 $\phi(\boldsymbol{x}) \wedge \phi(\boldsymbol{y})$ 存在，且有 $\phi(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}) \leqslant \phi(\boldsymbol{x}) \wedge \phi(\boldsymbol{y})$.

定义 3.4. 一单调结构函数 ϕ 称为单调关联的 MSCS，如果满足

1) 可达性：$\forall s_l \in S$, $\exists \boldsymbol{x} \in E$, 使 $\phi(\boldsymbol{x}) = s_l$;

2) 正则性：ϕ 将 E 内极小元映射为 S 内极小元，将 E 内最大元映射为 S 内最大元；

3) 关联性：对 $\forall_i \in \overline{1,n}$, E_i 内最大元 $e_i^{M_i}$ 及任一极小元 e_i^{0j}, $\exists \boldsymbol{x} \in E$, 使 $\phi((e_i^{M_i})_i, \boldsymbol{x}) \succ \phi((e_i^{0j})_i, \boldsymbol{x})$.

在 E_i, S 为全序集情况下，已有文章给出了结构函数对偶定义，并证明了 MSCS 的对偶也是 MSCS. 在偏序情况下，结构函数对偶不一定存在. 但对偶存在时，这个结论是成立的.

定义 3.5. 设 $(G, \prec)$ 为一有限偏序集，定义其对偶偏序集为 $(G^D, {}^D\!\prec)$: $G^D = G$，且 $\forall_i g, g_j \in G$, $g_i \prec g_j \Longleftrightarrow g_i^D \overset{D}{\succ} g_j^D$. 明显，有最小元的集合对偶有最大元.

定义 3.6. 若 $E_i (i \in \overline{1,n})$, S 均有最小元，则结构函数 $\phi: \prod_{i=1}^{n} E_i \to S$ 的对偶结构函数存在，定义为 $\left(\prod_{i=1}^{n} E_i^D, \overset{D}{\prec}\right)$ 至 $(S^D, \overset{D}{\prec})$ 的映射 ϕ^D: $\forall \boldsymbol{x}^D \in \prod_{i=1}^{n} E_i^D$, $\phi^D(\boldsymbol{x}^D) = \phi(\boldsymbol{x})$.
显然，当 E_i, S 为全序集时，以上定义与文献[2]中定义等价. 由定义 3.6 可证得：

定理 3.1. 若 ϕ 为 MSCS 且 ϕ^D 存在，则 ϕ^D 也为 MSCS.

文献[2,3]得出，全序 MSCS 以两个固定的 MSCS $\phi_{\min}$, $\phi_{\max}$ 为上、下界. 偏序 MSCS 的这种界一般不存在. 但附加一些条件后，这种界是存在的.

定义 3.7. 两偏序集 $(E, \prec)$, $(S, \prec)$ 间一映射 $\phi: E \to S$，称为相邻的，如果满足：
$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$, $\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y}$ 且 $\{\boldsymbol{z}: \boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{z} \prec \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in E\} = \{\text{空集}\} \Rightarrow \phi(\boldsymbol{x}) \succ\prec \phi(\boldsymbol{y})$，且
$\{s_k: \phi(\boldsymbol{x}) \prec s_k \prec \phi(\boldsymbol{y}), s_K \in S\} \cup \{s_l: \phi(\boldsymbol{x}) \succ s_l \succ \phi(\boldsymbol{y}), s_l \in S\} = \{\text{空集}\}$.

定理 3.2. 令 $\Omega = \{\phi\}$ 为所有满足相邻条件的 $(E, \prec) \to (S, \prec)$ 的 MSCS 结构函数 ϕ 组成的集合. 若 $(S, \prec)$ 为全序集，则 Ω 内存在最大元与最小元，即存在 $\phi_{\min}$, $\phi_{\max} \in \Omega$，使 $\forall \boldsymbol{x} \in E$, $\forall \phi \in \Omega$，恒有：$\phi_{\min}(\boldsymbol{x}) \leqslant \phi(\boldsymbol{x}) \leqslant \phi_{\max}(\boldsymbol{x})$.

以下讨论最小路、割向量的问题. 由于偏序关系的特殊性，这里定义的最小路、割向量与文献[2,3,7]稍有不同.

定义 3.8. 对 $\forall_{s_j} \in S$, s_j 水平最小路为一状态向量 $\boldsymbol{x}$ 满足

$$\begin{cases} \phi(\boldsymbol{x}) \geqslant s_j, & \boldsymbol{x} \in \prod_{i=1}^{n} E_i, \\ \phi(\boldsymbol{y}) \prec s_j, & \forall \boldsymbol{y} \prec \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in \prod_{i=1}^{n} E_i. \end{cases}$$

记水平 s_j 最小路向量总数为 P_{sj}.

定义 3.9. $\forall s_k \in S$，水平 s_k 最小割向量为一状态向量 $\boldsymbol{x}$，满足

$$\begin{cases} \phi(\boldsymbol{x}) \leqslant s_k, & \boldsymbol{x} \in \prod_{i=1}^{n} E_i, \\ \phi(\boldsymbol{y}) \succ s_k, & \forall y \succ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in \prod_{i=1}^{n} E_i. \end{cases}$$

记水平 s_k 最小割向量总数为 K_{s_k}.

引入两函数

$$p_{s_j}^i(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{当 } \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{x}_{s_j}^i,\ \boldsymbol{x}_{s_j}^i \in P_{s_j}, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

$$K_{s_k}^i(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0, & \text{当 } \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{x}_{s_k}^i,\ \boldsymbol{x}_{s_k}^i \in K_{s_k}, \\ 1, & \text{其它}. \end{cases}$$

可推得结构函数最小路、割表示式如下：

定理 3.3. ϕ 为一 MSCS，则 $\forall \boldsymbol{x} \in E$.

$$\begin{aligned} \phi(\boldsymbol{x}) &= \bigvee_{s_j \in S} s_j \cdot \max_{\boldsymbol{x}_{s_j}^i \in P_{s_j}} [p_{s_j}^i(\boldsymbol{x})] \\ &= \bigvee_{s_j \in S} s_j \max_{\boldsymbol{x}_{s_j}^i \in P_{s_j}} [p_{s_j}^i(\boldsymbol{x})] \cdot \min_{\substack{\forall s_l \\ s_l \succ s_j}} [1 - \max_{\boldsymbol{x}_{s_l}^i \in P_{s_l}} p_{s_l}^i(\boldsymbol{x})], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(\boldsymbol{x}) &= \bigwedge_{s_k \in S} s_k \cdot \max_{\boldsymbol{x}_{s_k}^i \in K_{s_k}} [1 - k_{s_k}^i(\boldsymbol{x})] \\ &= \bigvee_{s_k \in S} s_k \cdot \max_{\boldsymbol{x}_{s_k}^i \in K_{s_k}} [1 - k_{s_k}^i(\boldsymbol{x})] \cdot \min_{\substack{\forall s_l \\ s_l \prec s_k}} \{\min_{\boldsymbol{x}_{s_l}^i \in K_{s_l}} [k_{s_l}^i(\boldsymbol{x})]\}. \end{aligned}$$

最小路、最小割有如下性质：

性质 3.2. ϕ 为一 MSCS，则

1) 对 $\forall s_l, s_j \in S$, $s_l \succ / \prec s_j \Longleftrightarrow \forall \boldsymbol{x}_{s_l} \in P_{s_l}$, $\forall \boldsymbol{x}_{s_j} \in P_{s_j}$，若 $\boldsymbol{x}_{s_l} \neq \boldsymbol{x}_{s_j}$，则 $\boldsymbol{x}_{s_l} \succ / \prec \boldsymbol{x}_{s_j}$.

2) 若 $s_t = s_l \vee s_j$，则 $P_{s_t} \subseteq P_{s_l} \vee P_{s_j}$，这里

$$P_{s_l} \vee P_{s_j} = \{\boldsymbol{x}_{s_l} \vee \boldsymbol{x}_{s_j} : \forall \boldsymbol{x}_{s_l} \in P_{s_l},\ \forall \boldsymbol{x}_{s_j} \in P_{s_j}\}.$$

性质 3.3. ϕ 为一 MSCS，则

1) 对 $\forall s_l, s_j \in S$, $s_l \succ / \prec s_j \Longleftrightarrow \forall \boldsymbol{x}_{s_l} \in K_{s_l}$, $\forall \boldsymbol{x}_{s_j} \in K_{s_j}$，若 $\boldsymbol{x}_{s_l} \neq \boldsymbol{x}_{s_j}$，则 $\boldsymbol{x}_{s_l} \succ / \prec \boldsymbol{x}_{s_j}$.

2) 若 $s_t = s_l \wedge s_j$，则 $K_{s_t} \subseteq K_{s_l} \wedge K_{s_j}$，这里

$$K_{s_l} \wedge K_{s_j} = \left\{\boldsymbol{x}_{s_l} \wedge \boldsymbol{x}_{s_j} : \forall \boldsymbol{x}_{s_l} \in K_{s_l},\ \forall \boldsymbol{x}_{s_j} \in K_{s_j},\ \text{且 } \boldsymbol{x}_{s_l} \wedge \boldsymbol{x}_{s_j} \in \prod_{i=1}^{n} E_i\right\}.$$

容易推得，路、割向量与对偶结构有如下关系：

定理 3.4. 设 ϕ 为一偏序 MSCS 结构函数，若 ϕ^D 存在，则 $\forall \boldsymbol{x} \in \prod_{i=1}^{n} E_i$，$\boldsymbol{x}$ 为 ϕ 的最小路(割)向量的充要条件是 $\boldsymbol{x}$ 为 ϕ^D 的最小割(路)向量。

四、随机性质

由性质 3.1 中 1)可得

定理 4.1 设 $\phi: E \to S$ 为 MMS，E 上定义两随机向量 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$，则 $\forall s_j \in S$：

$$\Pr\{\phi(\boldsymbol{X} \vee \boldsymbol{Y}) \geqslant s_j\} \geqslant Pr(\{\phi(\boldsymbol{X}) \geqslant s_j\} \cup \{\phi(\boldsymbol{Y}) \geqslant s_j\}).$$

即，单调系统元件冗余优于系统冗余。

在研究随机性质前，引入随机大概念。

定义 4.1. 设 $G = \{g_t\}$ 为有限偏序集，其上定义两随机变量 X，Y 记为 $X \overset{st}{\leqslant} Y$，若满足

$$\forall \{g_t\}_{t\in T} \subseteq G, \ \Pr\left\{X \in \bigcup_{t\in T} B(g_t)\right\} \leqslant \Pr\left\{Y \in \bigcup_{t\in T} B(g_t)\right\}.$$

引理 4.1. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$；$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 为两组相互独立随机变量，X_i，$Y_i \in E_i$，$i \in \overline{1,n}$。若 $X_i \overset{st}{\leqslant} Y_i$，则 $\boldsymbol{X} \overset{st}{\leqslant} \boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y} \in \prod_{i=1}^{n} E_i$ 为对应随机向量。

定义 4.2. 系统期望效用为

$$h(\boldsymbol{P}) = \sum_{i=1}^{M} a_i \cdot Pr\{\phi(\boldsymbol{X}) = s_i\},$$

其中 $\{a_i\}_{i=1}^{M}$为系统各水平的效用函数值，它保持 $\{s_i\}_{i=1}^{M}$ 的序关系，且 $a_i - \sum_{s_k \in L(s_i)} a_k \geqslant 0$。

由引理 4.1 可推得

定理 4.2. 设 ϕ 为一 MSCS，则 $\boldsymbol{P} \overset{st}{\leqslant} \boldsymbol{P}^* \Rightarrow h(\boldsymbol{P}) \leqslant h(\boldsymbol{P}^*)$。

此定理表明，元件可靠性改善，关联系统可靠性将提高。下面讨论系统可靠度计算问题。为能考虑到元件不相互独立的部分情况，仿文献[10]定义元件变量相协 (Associated) 概念。

定义 4.3. 称随机变量 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是相协的，如果对任意递增 n 元函数 f，g 恒有：

$$\mathrm{Cov}(f(\boldsymbol{X}), g(\boldsymbol{X})) \geqslant 0.$$

由于 $(s, \prec)$ 为偏序集，系统由完全正常状态降至完全失效状态有多条途径。因此在系统所有下降途径上设置极限状态 s_t，$t \in T$，以极限状态上集的概率作为系统可靠性的估值才有意义。记由集合 $s - \bigcup_{t\in T} B(s_t)$ 内所有极大元组成的集合为 $\{s_{t'}\}_{t'\in T'}$，则有关系

$$\left[\bigcup_{t\in T} B(s_t)\right] \cap \left[\bigcup_{t'\in T'} W(s_{t'})\right] = \{空集\}$$

$$\left[\bigcup_{t\in T} B(s_t)\right] \cup \left[\bigcup_{t'\in T'} w(s_{t'})\right] = S.$$

引理 4.2. $\{s_t\}_{t\in T}$，$\{s_{t'}\}_{t'\in T'}$ 意义同上，ϕ 为一结构函数，有

$$\Pr\left\{\phi(\boldsymbol{X}) \in \bigcup_{t\in T} B(s_t)\right\} = 1 - \Pr\left\{\phi(\boldsymbol{X}) \in \bigcup_{t'\in T'} w(s_{t'})\right\}.$$

引理 4.3. 设 ϕ 为一 MSCS，$\{s_t\}_{t\in T}$，$\{s_{t'}\}_{t'\in T'}$ 意义同前，则有

$$1_{\{\phi(\boldsymbol{x}) \in \bigcup_{t\in T} B(s_t)\}}(\boldsymbol{X}) = 1 - \prod_{t\in T} \prod_{\boldsymbol{x}^i_{s_t} \in P_{s_t}} [1 - p^i_{s_t}(\boldsymbol{X})],$$

$$1_{\{\phi(\boldsymbol{x})\in \bigcup\limits_{t'\in T'} W(s_{t'})\}}(\boldsymbol{X}) = 1 - \prod_{t'\in T'} \prod_{\boldsymbol{x}^i_{s_{t'}}\in K_{s_{t'}}} \{1 - [1 - k^i_{s_{t'}}(\boldsymbol{X})]\}.$$

由引理 4.2，4.3 及相协随机变量的性质，可推出如下可靠度界公式：

定理 4.3. 设 ϕ 为 MSCS，$\{s_t\}_{t\in T}$，$\{s_{t'}\}_{t'\in T'}$ 意义同前．$\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 相协，则有

$$\prod_{t'\in T'} \prod_{\boldsymbol{x}^i_{s_t}\in K_{s_{t'}}} [1 - \mathrm{p_r}\{k^i_{s_{t'}}(\boldsymbol{X}) = 0\}] \leqslant \mathrm{p_r}\left\{\phi(\boldsymbol{X}) \in \bigcup_{t\in T} B(s_t)\right\}$$

$$\leqslant 1 - \prod_{t\in T} \prod_{\boldsymbol{x}^i_{s_t}\in p s_t} [1 - \mathrm{Pr}\{\mathrm{p}^i_{st}(\boldsymbol{X}) = 1\}].$$

应指出，上式给出的误差界较大(元件可靠性水平较低时更明显)．现改进如下：

$\{s_t\}_{t\in T}$，$\{s_{t'}\}_{t'\in T'}$ 意义同前，记集合 $\left\{\boldsymbol{X}: \phi(\boldsymbol{X}) \in \bigcup\limits_{t\in T} B(s_t)\right\}$ 中所有极小元构成的集合为 P_T．记集合 $\left\{\boldsymbol{X}: \phi(\boldsymbol{X}) \in \bigcup\limits_{t'\in T'} W(s_{t'})\right\}$ 中所有极大元构成的集合为 K_T．类似定理 4.3 可推得

$$\prod_{\boldsymbol{x}^i\in K_T} [1 - \mathrm{p_r}\{\boldsymbol{X} \leqslant \boldsymbol{x}^i\}] \leqslant \mathrm{p_r}\left\{\phi(\boldsymbol{X}) \in \bigcup_{t\in T} B(s_t)\right\}$$

$$\leqslant 1 - \prod_{\boldsymbol{x}^i\in P_T} [1 - \mathrm{p_r}\{\boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{x}^i\}].$$

若各变量 $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立，还有

推论. $$\prod_{\boldsymbol{x}^i\in K_T} \left[1 - \prod_{l=1}^{n} Q_l((\boldsymbol{x}^i)_l)\right] \leqslant \mathrm{p_r}\left\{\phi(\boldsymbol{X}) \in \bigcup_{t\in T} B(s_t)\right\}$$

$$\leqslant 1 - \prod_{\boldsymbol{x}^i\in P_T} \left[1 - \prod_{L=1}^{n} P_l((\boldsymbol{x}^i)_l)\right].$$

五、封闭性定理

在多态关联系统中，当各元件为 IFR (IFRA，NBU) 失效类时能否推知系统失效类也是 IFR (IFRA, NBU) 呢[2,3,8]？在元件、系统状态为全序集的条件下得出封团性对 IFRA, NBU 失效类是成立的．还得出仅当关联系统为串联结构时 IFR 类才封闭．

本节要证明 IFRA, NBU 失效类对偏序 MSCS 是封闭的．

定义 5.1. 非增随机过程 $\{X_i(t), t \geqslant 0\}$ 为 IFRA (NBU) 失效类，当且仅当 $\forall\{e^k_i\}_{k\in K} \subseteq E_i$，$T_u = \inf\left\{t: X_i(t) \bar{\in} \bigcup\limits_{k\in K} B(e^k_i)\right\}$ 是 IFRA (NBU) 的．

引理 5.1. 非增随机过程 $\{X_i(t), t \geqslant 0\}$ 为 NBU，当且仅当，对 $\forall t \geqslant 0$，$s \geqslant 0$，$\forall\{e^l_i\}_{l\in l} \subseteq E_i$．有

$$P\left\{X_i(s+t) \in \bigcup_{l\in L} B(e^l_i) \,|\, X_i(u), 0 \leqslant u \leqslant s\right\} \leqslant \mathrm{p_r}\left\{X_i(t) \in \bigcup_{l\in L} B(e^l_i)\right\}.$$

由引理 5.1 可证得

定理 5.1. 令 ϕ 为 n 个元件的 MSCS 结构函数,若 $\{X_i(t), t \geq 0\}$, $i \in \overline{1,n}$ 为相互独立的 NBU 随机过程,则 $\{\phi(\boldsymbol{X}(t)), t \geq 0\}$ 也为 NBU 随机过程.

引理 5.2. 非增随机过程 $\{X_i(t), t \geq 0\}$ 为 IFRA, 当且仅当对 $\forall t \geq 0$, $0 < \alpha < 1$ 及 $\forall \{e_i^l\}_{l \in L} \subseteq E_i$, 有

$$\mathrm{p}_r\left\{\boldsymbol{X}(\alpha t) \in \bigcup_{l \in L} B(e_i^l)\right\} \geq \left(\mathrm{p}_r\left\{\boldsymbol{X}(t) \in \bigcup_{l \in L} B(e_i^l)\right\}\right)^{\alpha}.$$

引理 5.3. 若 $\{X_i(t), t \geq 0\}$ $(i \in \overline{1,n})$ 为相互独立的 IFRA 随机过程, 则 $\{\boldsymbol{X}(t), t \geq 0\}$, $\boldsymbol{X}(t) = (X_1(t), \cdots, X_n(t))$ 也是 IFRA 随机过程.

由引理 5.2, 引理 5.3 可直接证得

定理 5.3. 令 ϕ 为具有 n 个元件的 MSCS 结构函数, $\{x_i(t), t \geq 0\}$, $i \in \overline{1,n}$ 为相互独立 IFRA 随机过程,则 $\{\phi(\boldsymbol{X}(t)), t \geq 0\}$ 也为一 IFRA 随机过程.

结 论

本文所定义的 MSCS 具有较广的适用性. 由于状态集上偏序关系的灵活性,使它几乎能描述任何单调关联性质的实际系统,确实体现了单调关联系统由二态到多态的推广. 由于全序集是一种特殊的偏序集,因此本文定义的 MSCS 自然包含了 El-Neweihi 等定义的 MSCS. 但由于偏序多链的复杂性, 也使偏序 MSCS 结构复杂化. 本文只是一个开端. 还有许多问题需要进一步研究.

参 考 文 献

[1] Ross, S., Multivalued State Component Reliability Systems, *Ann. Prob.*, 7(1979), 379—383.

[2] El-Neweihi, Multistate-Coherent Systems, *J., Appl., Prob.*, 15(1978), 675—688.

[3] Barlow, R. E. & Wu, A. S., Coherent Systems with Multistate Component, *Math. Operat. Res.*, 4(1978), 275—281.

[4] Joseph, C. A. & Kailsh, C. K., Reliability Bounds for Multistate Systems with Multistate Component, *Operat. Res.*, (1985), 153.

[5] David, A. B., Bounding the Reliability of Multistate Systems, *Operat. Res.*, (1982), 530.

[6] Williams, Griffith, Multistate Reliability Models, *J. Appl. Prob.*, 17(1980), 735—740.

[7] Block, Savits, Decomposition of Multistate Monotone Systems, *J. Appl. Prob.*, 19(1982), 391—402.

[8] Fumio, Ohi. & Toshio, Nishida, On Multistate Systems, *IEEE Trans. On Rel.*, 33(1984), 284.

[9] B. Natvig, Two Suggestions of How To Define A Multistate Coherent Systems, *Adv. Appl. Prob.*, 14(1982), 434—455.

[10] 曹晋华, 程侃, 可靠性数学引论, 科学出版社 (1986), 161—168.

[11] Ross, S., Multi-valued State Component Reliability Systems, Technical Report, Department of Industrial Engineering and Operation Research, University of California, Berkeley, (1977).

GENERALIZED MULTISTATE MONOTONE COHERENT SYSTEMS

YU KAI　GUO YUQING

(Beijing Postgraduate School, Mining Institute of China)

ABSTRACT

Multistate monotone coherent systems theory is a new development of system reliability theory. Up to now, the researches are all carried out under the hypothesis that the state sets of components and systems are totally ordered. These models have some limitations in practical applications. In this paper, a new multistate monotone coherent system model has been defined according to actual systems monotone features, which is under the hypothesis that the state sets of components and systems are partially ordered. And some of its features, such as deterministic properties, stochastic perfor mance and distribution class closure theorem, etc. have been discussed. Results are given.

书　　讯