

一类多变量系统的强抗扰控制¹⁾

高 龙 王幼毅
(清华大学)

摘 要

本文在文献[1]的基础上讨论一类多变量系统的强抗扰控制,以实现在幅度及噪声电平约束下尽量抑制一类外扰造成的动态误差,且保持输出调节。多变量强抗扰控制器由常规的鲁棒控制器和瞬态补偿器构成。

一、前 言

文献[1]讨论了标量系统的强抗扰控制问题,并取得了明显的效果。本文进而探讨一类工业多输入系统的强抗扰控制器的存在条件、构造、及设计方法等问题。通过举例讨论了参数选择问题,数字仿真结果表明这种多变量外扰控制器对抑制一类外扰所造成的动态、静态误差是相当有效的。

二、增广受控对象及多变量强抗扰控制器的存在条件

1. 问题的提出

不失一般性,考虑一类多输入多输出(MIMO)工业受控对象,其物理状态空间描述为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) + H\mathbf{w}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t) = [I \ 0]\mathbf{x}(t).\end{aligned}\quad (1)$$

式中 状态 $\mathbf{x}(t) \in R^n$; 输出 $\mathbf{y}(t) \in R^p$; 输入 $\mathbf{u}(t) \in R^m$; 且 $m \geq p$ 。其框图示于图1。

对于一般工业 MIMO 受控对象,从物理和工程来看和每一个输出量 $y_i(t)$ 相对应的总有一个输入量对它的作用最明显,于是 $m(\geq p)$ 个输入量就可按这种控制上的对应关系依次排列成 $\mathbf{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t), \dots, u_m(t)]^T$, 我们称其中的前 m 个为主导控制通道。

外扰模型已知^[2]为

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = F\mathbf{z}(t), \quad \mathbf{w}(t) = \Gamma\mathbf{z}(t).\quad (2)$$

其中 $\mathbf{z}(t) \in R^q$ 为外扰向量, $\{\Gamma, F\}$ 能观测,且 F 的特征值全不稳定。为了实现在外扰 $\mathbf{w}(t)$ 作用下系统的输出调节,应设置伺服补偿器^[2]

1) 中国科学院科学基金资助的课题。本文曾在1985年全国控制理论与应用学术交流会(屯溪)上宣读。
本文于1986年4月14日收到。

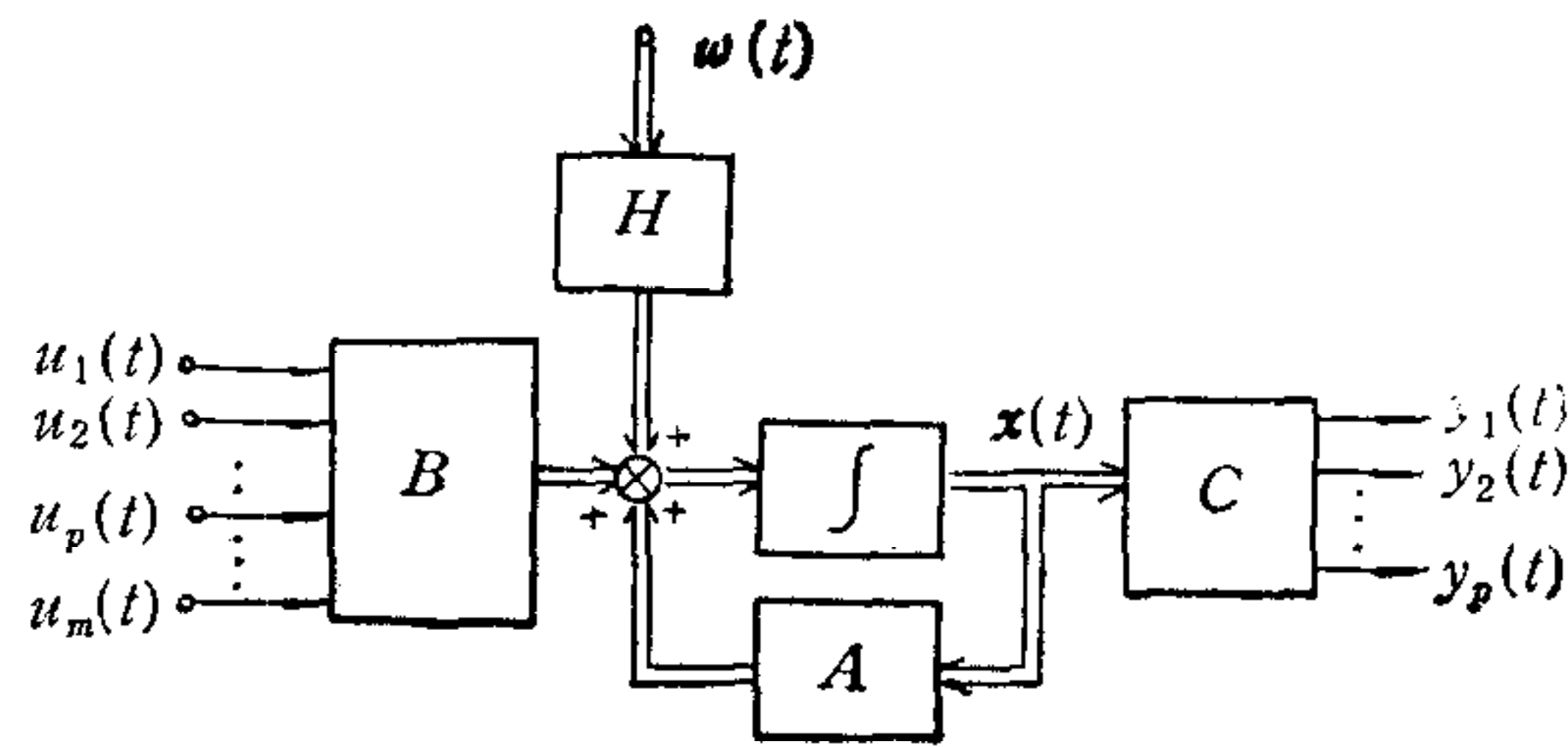


图1 受控对象

$$\dot{\xi}(t) = \mathcal{C}^* \xi(t) + \beta^* [L_c y(t) - y_{re}] \quad (3)$$

其中 $\xi(t) \in R^{pq}$, $L_c = \text{diag}\{\alpha_i, i = 1, 2, \dots, p\}$ 为单位变换阵, $\mathcal{C}^* = \text{diag}\{\underbrace{\mathcal{C}, \dots, \mathcal{C}}_{p \text{ 个}}\}$,

$\mathcal{C} \in R^{q \times q}$, 且其特征值全不稳定, 及 $\{\mathcal{C}^*, \beta^*\}$ 能控。

为了提高动态抗扰性, 在每一输出量 $y_i(t)$ 上设置一个瞬态补偿器^[1]以反应它的变化量, MIMO 系统瞬态补偿器的传递关系是

$$\Psi(s) = \text{diag} \left\{ \beta_i \frac{\tau_i s}{\tau_i s + 1}, i = 1, 2, \dots, p \right\} y(s) \quad (4)$$

对应的状态空间描述为

$$\dot{\psi}(t) = \Lambda \Psi(t) + LC \dot{x}(t) = \Lambda \Psi(t) + LCAx(t) + LCBu(t) + LCHw(t) \quad (5)$$

式中 $\Psi(t) \in R^p$ 为瞬态补偿器的状态; $\Lambda = \text{diag} \left\{ -\frac{1}{\tau_i}, i = 1, 2, \dots, p \right\}$; $L = \text{diag}\{\beta_i, i = 1, 2, \dots, p\}$ 为量测系数阵(非异)。

瞬态补偿器的输出信号按主导控制通道的对应关系, 馈给相应的输入通道, 以增强动态抗扰能力。

2. 强抗扰增广受控对象及其能观测性能控性

将对象(1)、伺服补偿器(3)和瞬态补偿器(5)合并, 便可得出强抗扰增广受控对象方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\xi}(t) \\ \dot{\Psi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \beta^* L_c C & \mathcal{C}^* & \mathbf{0} \\ LCA & \mathbf{0} & \Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \\ \Psi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ \mathbf{0} \\ LCB \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\beta^* \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} y_{re} + \begin{bmatrix} H \\ \mathbf{0} \\ LCH \end{bmatrix} w(t),$$

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ \xi(t) \\ \Psi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \\ \Psi(t) \end{bmatrix} \quad (6)$$

上式亦可略作

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A} \bar{x}(t) + \bar{B} \bar{u}(t) + \bar{G} y_{re} + \bar{H} w(t), \\ \bar{y}(t) &= \bar{C} \bar{x}(t). \end{aligned} \quad (7)$$

强抗扰增广受控对象(7)能观测的充要条件为 $\{C, A\}$ 能观测, 这一点由式(6)是显然可见的. 式(7)的能控性充要条件根据 PBH 秩检验方法^[3]可知为

$$\text{秩} \begin{bmatrix} A - \lambda I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & B \\ \beta^* L_c C & \mathcal{C}^* - \lambda I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ LCA & \mathbf{0} & A - \lambda I & LCB \end{bmatrix} = n + (q + 1)p, \forall \lambda. \quad (8)$$

下列引理、定理及推论则更为简洁有用：

引理 1. 若 $m \geq p$ ，则 (8) 式左边矩阵前两行块对于所有的 λ 均有 $n + pq$ 个线性无关的行向量的充要条件为： $\{A, B\}$ 能控；且

$$\text{秩} \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ C & \mathbf{0} \end{bmatrix} = n + p, \forall \lambda \in \sigma(\mathcal{C}^*). \quad (9)$$

(证明请参阅文献[4]。本引理说明对象 $\{A, B, C\}$ 带上伺服补偿器后的增广系统能控的充要条件是： $\{A, B\}$ 能控，且 $\{A, B, C\}$ 的传输零点不得与伺服补偿器的极点相重。此结果是十分有趣的。)

引理 2. 若 $m \geq p$ ，则 (8) 式左边矩阵的第一及第三行块对于所有的 λ 均有 $n + p$ 个线性无关的行向量的充要条件为： $\{A, B\}$ 能控；且

$$\text{秩} \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ C & \mathbf{0} \end{bmatrix} = n + p, \forall \lambda \in \sigma(\Lambda). \quad (10)$$

(证明与引理 1 的证明类似，从略。本引理表明当对象 $\{A, B, C\}$ 带上瞬态补偿器 (5) 后的增广系统能控的充要条件是： $\{A, B\}$ 能控，且 $\{A, B, C\}$ 的传输零点不得与瞬态补偿器的极点相重。)于是同时带有瞬态补偿器和伺服补偿器的强抗扰增广系统的能控性条件便可由下述定理给出：

定理 1. 强抗扰增广受控对象 (7) ($m \geq p$) 能控的充要条件是下列条件同时满足：

1) $\{A, B\}$ 能控；

2) 秩 $\begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ C & \mathbf{0} \end{bmatrix} = n + p, \forall \lambda \in \sigma(\mathcal{C}^*) \cup \sigma(\Lambda). \quad (11)$

证明。因伺服补偿器 (3) 全部特征值 $\sigma(\mathcal{C}^*)$ 都是不稳定的^[2]，而瞬态补偿器 (5) 全部特征值 $\sigma(\Lambda)$ 都位于左半开平面，故 $\sigma(\mathcal{C}^*) \cap \sigma(\Lambda) = \phi$ 。所以只须上两引理的条件均能满足，就可保证在所有 λ 下 (8) 式成立。反之，若引理 1, 2 中任一条件不满足，都将导致 (8) 式不成立。 △△△

在更为一般的情况下，会遇到所加的瞬态补偿器个数 (p_1) 多于输入维数 (m)^[1]。此时我们有

推论 1. 当 $p_1 > m$ (且 $m \geq p$) 时，式 (7) 能控的充要条件是下列条件同时成立：

1° $\{A, B\}$ 能控；

2° 秩 $\begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ C & \mathbf{0} \end{bmatrix} = n + p, \forall \lambda \in \sigma(\mathcal{C}^*) \cup \sigma(\Lambda);$

3° $\Lambda = \text{diag} \left\{ -\frac{1}{\tau_i}, i = 1, 2, \dots, p_1 \right\}$ 的特征值中，最多不得有 m 个相重。 (12)

证明。只须将引理 2 略加修改，写成：“若 $p_1 > m$ 且 $m \geq p$ ，则式 (8) 左边矩阵的第一、三行块对于所有的 λ 均有 $n + p_1$ 个线性无关的行向量的充要条件为：(i) $\{A, B\}$

能控;且 (ii) 秩 $\begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + m, \forall \lambda \in \sigma(A)$; 及 (iii) 秩 $[A - \lambda I] \geq p_1 - m, \forall \lambda \in \sigma(A)$. 再考虑定理 1 的证明, 便可得证上面的结论. $\triangle\triangle\triangle$

讨论. 当 $m = 1$ (SISO 情况) 及 $p_1 = 2$ 时, 式(7)能控的充要条件就是下列条件同时满足: (i) $\{A, b\}$ 能控; (ii) $\tau_1 \neq \tau_2$; (iii) 秩 $\begin{bmatrix} A - \lambda I & b \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} = n + 1, \forall \lambda \in \left\{-\frac{1}{\tau_1}\right\}$ (式中 c_1 为 τ_1 瞬态补偿器的接入量之输出矩阵); (iv) 秩 $\begin{bmatrix} A - \lambda I & b \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} = n + 1, \forall \lambda \in \left\{-\frac{1}{\tau_2}\right\}$, (c_2 与 c_1 类似); (v) 秩 $\begin{bmatrix} A - \lambda I & b \\ c & 0 \end{bmatrix} = n + 1, \forall \lambda \in \sigma(\mathcal{C}^*)$ (c 为伺服补偿器的接入量之输出矩阵).

其实, 这就是文献[1]中定理 1 的内容. $\triangle\triangle\triangle$

三、强抗扰控制器的参数选择

和文献[1]的原理类似, 不断增大各输出 $y_i(t)$ 到与它对应的主导控制通道 $u_i(t)$ 间的反馈系数 k_{ii} ($i = 1, 2, \dots, p$)——我们称之为主导反馈系数, 只要闭环系统是稳定的, 就可提高系统的动态抗扰能力. 在 k_{ii} 的物理约束为 $\overline{k_{ii}}$ (上限) 时, 将瞬态补偿器并接在这些通道上, 即可进一步改善动态抗扰性, 而后一通道的反馈强度则要受噪声电平上的物理限制. 至于稳态抗扰问题则完全由伺服补偿器来解决^[2]. 下面先介绍有关的论点:

性质 1. 对于隔直网络 $\beta_i \tau_i s / (\tau_i s + 1)$, 当 τ_i 选得充分大时, 其动态响应和传输系数为 β_i 的比例环节近似相同, 即在一定频程内有

$$\lim_{\tau_i \rightarrow \infty} \beta_i \tau_i s / (\tau_i s + 1) = \beta_i, \quad (i = 1, 2, \dots, p). \quad (14)$$

引理 3. 若(1)式的对象 $\{A, B\}$ 对于加权阵 $R_1 = R_1^T > 0$, 及 $Q_1 = Q_1^T \geq 0$ 的二次型最优反馈控制律为

$$u_1(t) = -K_1 x(t) = -R_1^{-1} B^T P_1 x(t), \quad (15)$$

那么另一个增强型的反馈控制律

$$u_2(t) = -K_2 x(t) = -\mu K_1 x(t), \quad (\mu \geq 1, \text{实数}) \quad (16)$$

亦必为 $\{A, B\}$ 对于 $R_2 = R_1$ 及某个 $Q_2 = Q_2^T \geq 0$ 下的 LQ 最优反馈控制律.

证明. 知 $K_2 = \mu K_1$, 再取 $P_2 = \mu P_1$ 及 $R_2 = R_1$, 由 Riccati 方程, 得

$$Q_2 = -\mu P_1 A - \mu A^T P_1 + \mu^2 K_1^T R_1 K_1 = \mu Q_1 + \mu(\mu - 1) K_1^T R_1 K_1.$$

再由 R_1 的正定性, 可知上式的 $Q_2 > 0$ 且对称. $\triangle\triangle\triangle$

在此基础上提出如下设计步骤:

1) 按定理 1 的条件检验(7)的能控性, 若第 2) 项不满足, 可修改 A 阵的元素 τ_i 即可解决;

2) 再对(7)中不带瞬态补偿器的部分

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \beta^* L_c C & \mathcal{C}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\xi}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\beta^* \end{bmatrix} \mathbf{y}_{rc} + \begin{bmatrix} H \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{w}(t), \\ \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \boldsymbol{\xi}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \boldsymbol{\xi}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

按普通 LQ 最优控制方法, 通过试选 $R = R^T > 0$ 及 $\tilde{Q} = \tilde{Q}^T \geq 0$, 求解代数 Riccati 方程确定反馈控制律

$$\mathbf{u}(t) = -\tilde{K}_1^* \tilde{\mathbf{x}}(t), \quad \tilde{K}_1^* = R^{-1} \tilde{B}^T \tilde{P} = [K_{1x}^* : K_{1\xi}^*],$$

其中 $\tilde{\mathbf{x}}^T(t) = [\mathbf{x}^T(t), \boldsymbol{\xi}^T(t)]$, $\tilde{B}^T = [B^T \mathbf{0}]$. (18)

同时使 k_{ix}^* 中的主导元素 k_{ii} 接近其物理上限值 \bar{k}_{ii} , 而其它元素则无特殊要求;

3) 根据对 k_{ii} 的噪声电平物理约束值 \bar{k}_{ii} (一般总有 $\bar{k}_{ii} > \underline{k}_{ii}$; 否则瞬态补偿器不得加入), 然后计算

$$\mu_i = \bar{k}_{ii} / \underline{k}_{ii}, \quad (i = 1, 2, \dots, p), \quad (19)$$

再定义 $\mu \triangleq \min\{\mu_i\}$, $(i = 1, 2, \dots, p)$. (20)

可取 $\tilde{K}_2^* = [\mu K_{1x}^* : \mu K_{1\xi}^*]$. (21)

那么增广受控对象(7)的强抗扰控制律就可由下式确定

$$\mathbf{u}^*(t) = -\bar{K}^* \bar{\mathbf{x}}(t) = -[K_x^* : K_\xi^* : K_\psi^*] \bar{\mathbf{x}}(t) = -[K_{1x}^* : \mu K_{1\xi}^* : (\mu - 1) K_{1x}^*] \bar{\mathbf{x}}(t). \quad (22)$$

4) 校验: 可按文献[5,6]的方法校核闭环稳定性及 $R = R^T > 0$, $P = P^T > 0$, $Q = Q^T \geq 0$ 是否存在. 亦可通过数字仿真来直接检查闭环稳定性及抗扰能力. 若发现问题, 可修改(22)式中 K_ξ^* , K_x^* 及 K_ψ^* 阵的非主导元素, 以找出满意的强抗扰反馈增益阵 \bar{K}^* .

四、举 例

考虑文献[7]中的受控对象, 并按前述的主导控制通道依次安排 $u_i(t)$ 的序号后, 有

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0.395 & 0.01145 \\ -0.011 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.038 & 0.03362 \\ 0 & 0.000966 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (23)$$

知外扰函数 $w_1(t) = w_2(t)$ 为单位阶跃函数, 按照前节的设计步骤找出(23)式的一个强抗扰控制器:

1) 考虑性质 1, 试选 $A = -I_2$ (即 $\tau_1 = \tau_2 = 1$ 秒), 经检验知(7)式满足定理 1 的条件;

2) 对不带瞬态补偿器的部分按普通 LQ 最优控制方法, 试选 $R = I_2$ 及 $\tilde{Q} = \text{diag}\{3 \times 10^3, 5 \times 10^6, 5 \times 10^7, 10^8\}$, 求得代数 Riccati 方程之解为

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 123.76 & -180.33 & 6806.34 & -383.17 \\ -180.33 & 5252097 & 54238.82 & 1.036 \times 10^7 \\ 6806.34 & 54238.82 & 912048.4 & 102517.7 \\ -383.17 & 1.036 \times 10^7 & 102517.7 & 5.071 \times 10^7 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

于是有

$$\tilde{K}_1^* = R^{-1}\tilde{B}^T\tilde{P} = [K_{1x}^* : K_{1\xi}^*] = \begin{bmatrix} 128.45 & -187.19 & | & 7064.96 & -397.73 \\ 3.99 & 5067.46 & | & 281.22 & 9992.1 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

使得 K_{1x}^* 的主导元素 $\{k_{11}, k_{22}\}$ 接近给定的物理约束值 $\{\bar{k}_{11}, \bar{k}_{22}\} = \{150, 5200\}$.

在前述外扰函数作用下,这个系统的响应曲线示于图 2 的 A, B. 由之得动态扰动误差最大值为

$$\{y_{1\max}, y_{2\max}\} = \{0.0062, 0.138\}. \quad (26)$$

3) 假设噪声电平物理约束为 $\{\bar{k}_{11}, \bar{k}_{22}\} = \{2\bar{k}_{11}, 2\bar{k}_{22}\}$, 即 $\mu = 2$. 由式(21)得

$$\tilde{K}_2^* = 2\tilde{K}_1^*. \quad (27)$$

这个物理上无法实现的“伪系统”的扰动响应为图 2 的 C, D 曲线. 动态误差明显改善

$$\{y_{1\max}, y_{2\max}\} = \{0.004, 0.078\}. \quad (28)$$

4) 用瞬态补偿器来承担(27)式中主导元素的超出物理上限 $\{\bar{k}_{11}\}$ 部份, 从而使上面的“伪系统”借助于瞬态补偿器而成为物理可实现的. 也就是按(22)式选定增广系统的反馈增益阵

$$\bar{K}^* = [K_{1x}^* | \mu K_{1\xi}^* | (\mu - 1)K_{1x}^*] = \begin{bmatrix} 128.45 & -187.19 & | & 14121.96 & -795.46 & | & 128.45 & -187.19 \\ 3.99 & 5067.46 & | & 562.44 & 19984.2 & | & 3.99 & 5067.46 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

这个强抗扰系统的抗扰曲线示于图 2 的 E, F. 它的特点是动态抗扰能力改善情况和式(27)的“伪系统”接近,其值为

$$\{y_{1\max}, y_{2\max}\} = \{0.004, 0.081\}. \quad (30)$$

同时具有输出调节的性质,且稳定性很好.

讨论. 本例中假设 $\mu K_{1\xi}^*$ 各元素均未超过其物理约束值. 不然的话,就应修改 R, \tilde{Q} , 重新计算 \tilde{K}_1^* , 直到其元素全低于物理约束值为止; 或用逆问题方法先把 $\mu K_{1\xi}^*$ 中偏大的元素降下来, 再检验是否符合 LQ 条件. 工程上直接用数字仿真方法亦可找到很好的结果.

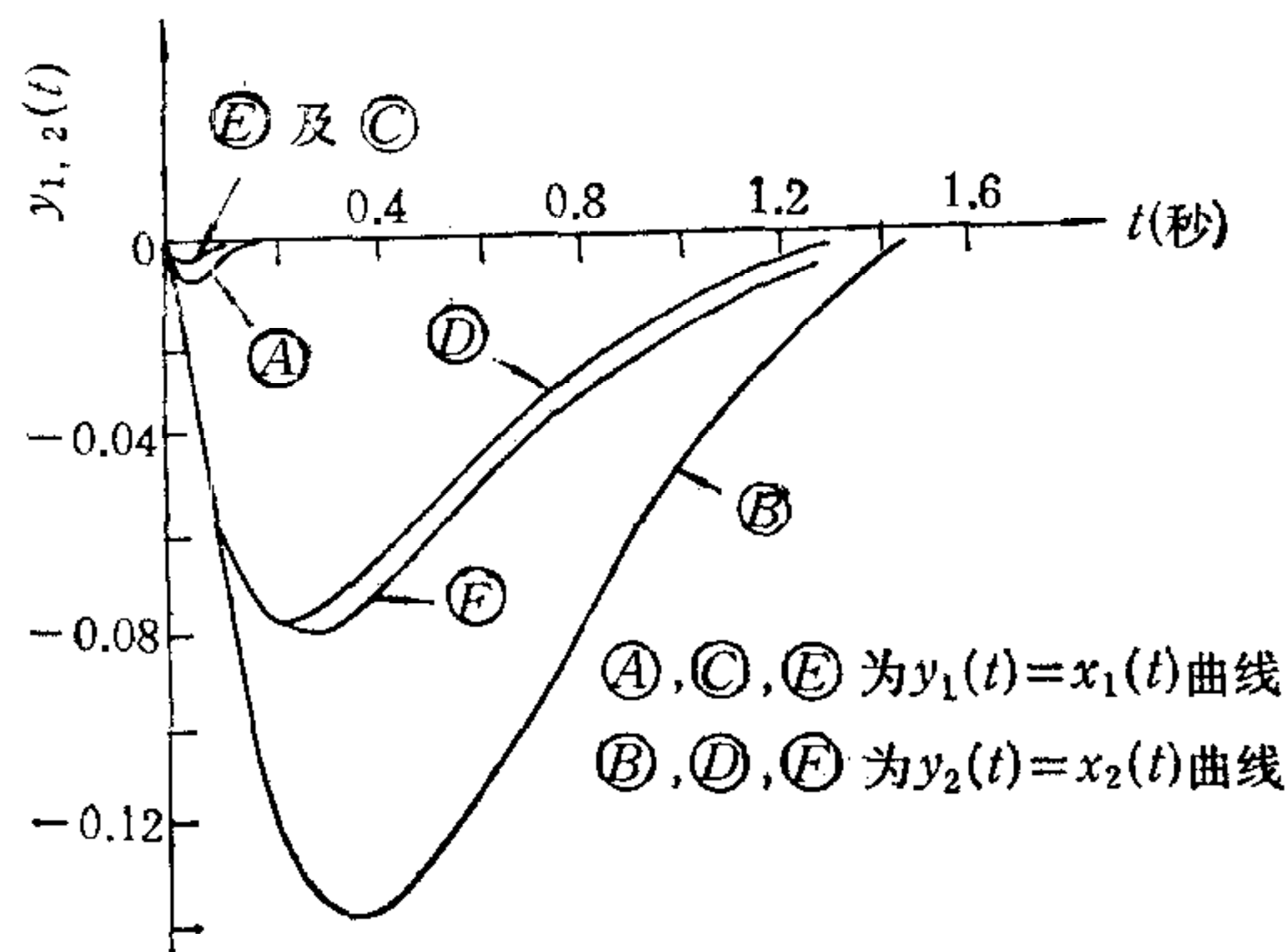


图 2 抗扰响应曲线

五、结 束 语

(1) 加强输出到其对应的主导控制通道的反馈作用, 可以提高稳定系统的动态抗扰能力.

(2) 强抗扰控制器(22)实质上是一种特殊的增广型鲁棒控制器, 所以必能保持在一类

外扰作用下的输出调节性质；而动态抗扰能力则完全依靠瞬态补偿器及特定的参数选择方法来提高。

(3) 强抗扰控制器的参数选择上， Λ 阵中的 $\{\tau_i\}$ 应选得稍大些(不得过大，以免出现“拖长尾”的过程)，以保持隔直性质。反馈增益阵用 LQ 逆问题方法则更合乎逻辑。

参 考 文 献

- [1] 高龙, 王幼毅, 强抗扰恒值系统的逆 LQ 设计, 自动化学报, 2(1986), 120—127.
- [2] Davison, E. J., Goldenberg, A., Robust Control of a General Servomechanism Problem: The Servo Compensator, *Automatica*, 11(1975), 461—471.
- [3] Kailath, T., Linear Systems, Prentice-Hall Inc., (1980), 366.
- [4] Davison, E. J., A Generalization of the Output Control of Linear Multivariable Systems with Unmeasurable Arbitrary Disturbances, *IEEE Trans. Auto. Control*, AC-20(1975), 788—792.
- [5] Jameson, A., and Kreindler, E., Inverse Problem of Linear Optimal Control, *SIAM J. Control*, 1(1973), 1—19.
- [6] Molinari, B. P., The Stable Regulator Problem and Its Inverse, *IEEE Trans. Auto. Control*, AC-18(1973), 454—459.
- [7] MacFarlane, A. G. J., and Belletrutti, J. J., The Characteristic locus Design Method, *Automatica*, 9(1973), 575—588.

THE STRONG DISTURBANCE REJECTION CONTROL FOR A CLASS OF MULTIVARIABLE SYSTEMS

GAO LONG WANG YOUYI
(Tsinghua University)

ABSTRACT

Referring to [1], the strong disturbance rejection control for a class of multivariable systems is discussed in this paper so as to reject the dynamical errors caused by a class of external disturbances, and preserve the output regulation properties, at the same time the amplitude and the noise level constraints are considered. The multivariable strong disturbance controller is composed of an ordinary robust controller and a transient compensator.