配置特征结构的 $(n-l)$ 阶补偿器

程　鹏
(北 京 航 空 学 院)

摘　　要

本文研究配置特征结构的 $n-l$ 阶动态补偿器的设计问题，证明了当原始系统可观测时，阶数为 $n-l$ 的动态补偿器不仅可以达到给定特征结构的配置，而且可以做到任意设置附加的 $n-l$ 个特征值。

考虑以下系统：

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ y = Cx, \tag{1}$$

其中 A、B 和 C 分别为 $n\times n$、$n\times m$ 和 $l\times n$ 的常量矩阵，并且假定 $\mathrm{rank}\,B = m$，$\mathrm{rank}\,C = l$. 设给定的 n 个特征结构为 φ_n，并用与文献[3]中相同的记号 $\{\Lambda_1, S_{11}\}$ 来表示特征值构成的矩阵及相应的特征向量组，而且总假定 $\mathrm{rank}[B\ \ S_{11}\Lambda_1 - AS_{11}] = \mathrm{rank}\,B$ 满足. 加 p 阶动态补偿器后的系统如图 1 所示，图 1 所对应的开环系统矩阵为

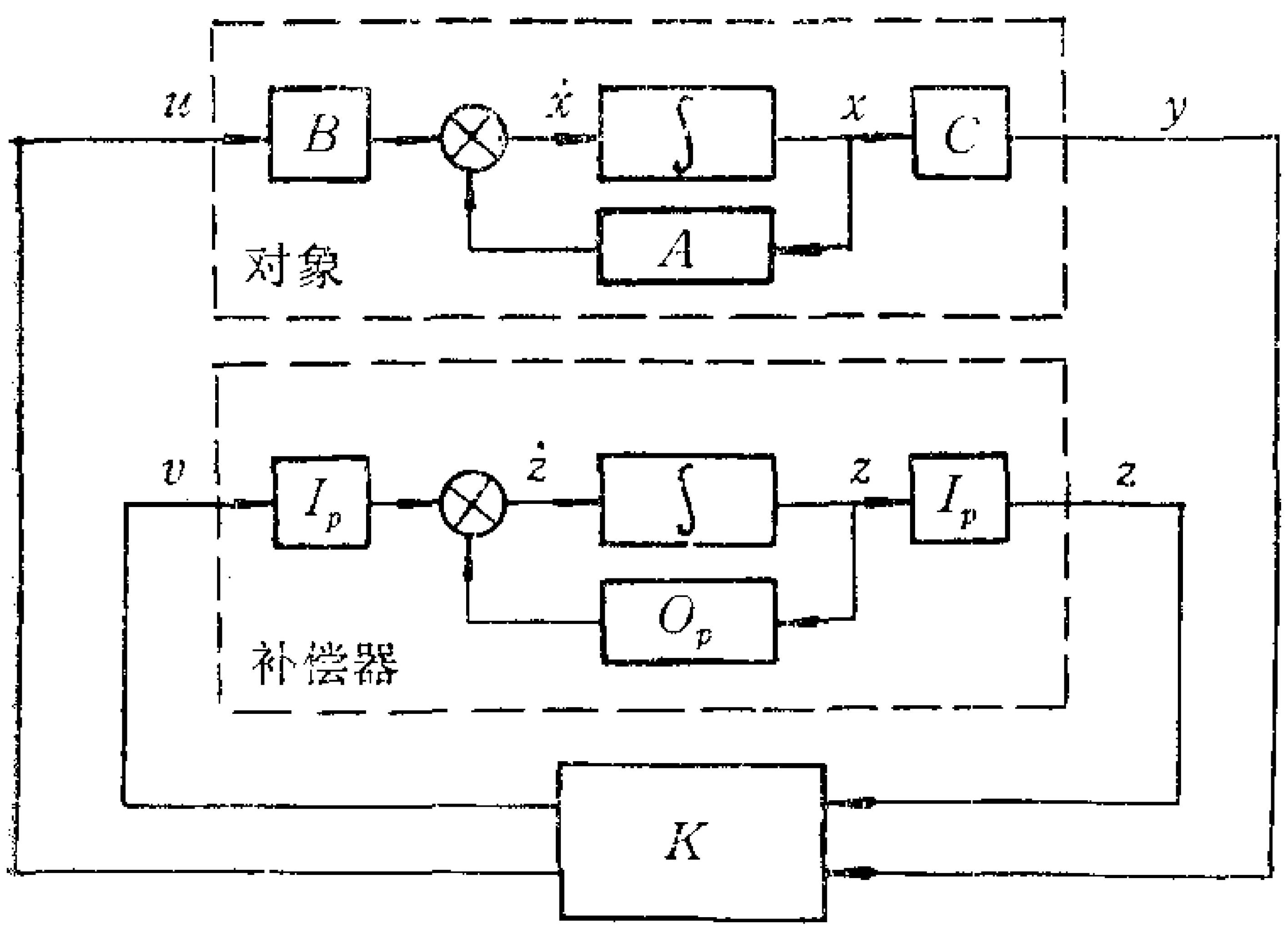

图　1

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & O_p \end{bmatrix},\quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix},$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}. \tag{2}$$

若

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} CS_{11} \\ S_{11}\Lambda_1 - AS_{11} \end{bmatrix} = l + \alpha,$$

根据文献[3]的命题1可知，存在 p 阶补偿器使

$$\left\{\Lambda_1, \bar{S} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{21} \end{bmatrix}\right\}$$

可配置，即下式成立：

$$\begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{21} \end{bmatrix}\Lambda_1 = \begin{bmatrix} A + M_1C & N_1 \\ M_2C & N_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{21} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

这里 p 是满足 $\alpha \leqslant p \leqslant n-l$ 的某一整数，S_{21}, M_1, N_1, M_2, N_2 分别为 $p\times n$、$n\times l$、$n\times p$、$p\times l$、$p\times p$ 的矩阵.

引理 1. 对于加 p 阶动态补偿器后的系统(2)，其余 p 个特征值由 $N_2 - S_{21}S_{11}^{-1}N_1$ 决定.

本文于 1985 年 10 月 7 日收到.

为了讨论如何设置 $N_2 - S_{21}S_{11}^{-1}N_1$ 的特征值，研究 $p = n - l$ 阶的补偿器. 令 (3) 式中的 p 为 $n-l$，考虑 $\begin{bmatrix} C & S_{11} \\ & S_{21} \end{bmatrix}$ 的行空间的基底变换:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ F & G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & S_{11} \\ & S_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S_{11} \\ & \bar{S}_{21} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

这里 $\bar{S}_{21} = FCS_{11} + GS_{21}$，$G$ 是 $(n-l)\times(n-l)$ 的可逆矩阵，F 是某一个 $(n-l)\times l$ 矩阵. 由文献 [3] 可知，用 $\bar{S}_{21}$ 也可形成 $p = n - l$ 阶的动态补偿器，即有

$$\begin{bmatrix} S_{11} \\ \bar{S}_{21} \end{bmatrix} A_1 = \begin{bmatrix} A + \bar{M}_1 C & \bar{N}_1 \\ \bar{M}_2 C & \bar{N}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_{11} \\ \bar{S}_{21} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

另一方面，因为 CAS_{11} 的任一行均可由 CS_{11} 和 S_{21} 的行向量所表出，故可记为

$$CAS_{11} = H_0CS_{11} + H_1S_{21}, \tag{6}$$

这里 H_0、H_1 是 $l\times l$ 和 $l\times(n-l)$ 的矩阵.

引理 2. 经过 (4) 式的变换后，下列关系式成立:

$$\begin{cases} \bar{M}_1 = M_1 - N_1G^{-1}F \\ \bar{N}_1 = N_1G^{-1} \\ \bar{M}_2 = GM_2 - (GN_2 + FCN_1 + FH_1)G^{-1}F + F(CM_1 + H_0) \\ \bar{N}_2 = (GN_2 + FCN_1 + FH_1)G^{-1}. \end{cases} \tag{7}$$

(4) 式的变换使附加的 $n-l$ 个特征值发生了变化. 实际上它可由矩阵 $\bar{N}_2 - \bar{S}_{21}S_{11}^{-1}\bar{N}_1$ 来决定，由 (4) 和 (7) 式可得:

$$\bar{N}_2 - \bar{S}_{21}S_{11}^{-1}\bar{N}_1 = G(N_2 - S_{21}S_{11}^{-1}N_1 + G^{-1}FH_1)G^{-1}. \tag{8}$$

(8) 式为研究变换式 (4) 改变附加的 $n-l$ 个特征值的能力提供了方便的形式. 运用引理和 (8) 式，可以证明下面的定理.

定理. 若系统 (1) 可观测，则存在 $p = n - l$ 阶动态补偿器，可以使系统达到给定的 φ_n 的配置，并且可任意配置附加的 $p = n - l$ 个闭环特征值.

证明. 设系统 (1) 的可观测性指数为 ν. 由可观性矩阵中按排列的行序选取 n 个线性无关的行向量，并记为 $E_iCA^i (i = 0, 1, \cdots, \nu - 1)$，这里 E_0 是 $l\times l$ 的单位阵，$E_i (i \neq 0)$ 是 $l_i \times l$ 的矩阵，它的行是 l 阶单位阵的某些行，E_iCA^i 表示按前述要求从 CA^i 中取出的 l_i 行所组成的 $l_i\times n$ 的矩阵. 显然有

$$l \geqslant l_1 \geqslant l_2 \geqslant \cdots \geqslant l_{\nu-1},\quad l_1 + l_2 + \cdots + l_{\nu-1} = n - l.$$

构成 $(n-l)\times n$ 的矩阵

$$S_{21} = \begin{bmatrix} E_1CAS_{11} \\ E_2CA^2S_{11} \\ \vdots \\ E_{\nu-1}CA^{\nu-1}S_{11} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

引进以下记号:

$$CA^iS_{11} = H_{i0}CS_{11} + [H_{i1}H_{i2}\cdots H_{i,\nu-1}]S_{21},\quad i = 1, 2, \cdots, \nu-1, \nu \tag{10}$$

对于 (9) 的 S_{21}，可计算出 $N_2 - S_{21}S_{11}^{-1}N_1$ 如下:

$$N_2 - S_{21}S_{11}^{-1}N_1 = X_1 = \begin{bmatrix} E_1H_{21} & E_1H_{22} & 0 & & \\ E_2H_{31} & E_2H_{32} & E_2H_{33} & 0 & \mathbf{0} \\ & & \cdots & & \\ E_{\nu-2}H_{\nu-11} & & \cdots & & E_{\nu-2}H_{\nu-1,\nu-1} \\ E_{\nu-1}H_{\nu 1} & & \cdots & & E_{\nu-1}H_{\nu,\nu-1} \end{bmatrix}.$$

进行 (4) 式的变换，可得:

$$\bar{N}_2 - \bar{S}_{21}S_{11}^{-1}\bar{N}_1 = G(X_1 + G^{-1}FH_1)G^{-1}. \tag{11}$$

计算矩阵对 (X_1, H_1) 所对应的可观测性矩阵的前 $(\nu - 1) \times l$ 行，可得:

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_1X_1 \\ H_1X_1^2 \\ \vdots \\ H_1X_1^{\nu-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & & & \mathbf{0} \\ & H_{11}E_1H_{22} & & \\ & & H_{11}E_1H_{22}E_2H_{33} & \\ & * & & \ddots & \\ & & & & \prod_{i=1}^{\nu-2} H_{ii}E_iH_{\nu-1,\nu-1} \end{bmatrix}.$$

由于上面矩阵的秩为 $n - l$，所以矩阵对 (X_1, H_1) 可观测. 因而可通过 $G^{-1}F$ 的选择来任意配置 (11) 式的 $n - l$ 个特征值.

参 考 文 献

[1] 杨 玲，关于反馈系统的特征结构配置，控制理论与应用. 第1卷第2期 (1984)，130—110.
[2] Sambandan, A. and Chandrasekharan, P. C., Eigenvector Assignment Using Output Feedback, *Int. J. Control*, **34**. (1981), 1143—1152.
[3] 程 鹏，配置特征结构的动态补偿器设计，自动化学报. 第11卷第4期 (1985)，364—371.

THE $(n-l)$ TH ORDER COMPENSATOR USING EIGENSTRUCTURE ASSIGNMENT

Cheng Peng

(Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics)

Abstract

In this paper, the design of the $(n$-1)th order compensator for eigenstructure assignment is discussed. It has been showed that, if the original system is observable, then the designer not only could complete the assignment of the given eigenstructure, but also could arbitrarily set the additive n-1 eigenvalues.