两状态非单调关联系统的形式理论

廖炯生
(北京控制工程研究所)

摘　　要

两状态单调关联系统理论已经成为可靠性数学理论的基础之一，正在向着多状态单调关联系统理论的方向发展.

1977年 Lapp & Powers 提出非单调关联系统模型[1],引起可靠性学术界热烈讨论. 一般自动控制系统中存在着反馈回路，这导致系统的非单调关联性. 为处理此类系统，本文推广两状态单调关联系统理论的某些结果,提出两状态非单调关联系统的形式理论.

一、引　　言

系统可靠性理论的中心问题是要确定复杂系统可靠性及其单元可靠性之间的关系. 作为可靠性数学理论基础之一，三根久、Birnbaum, Barlow & Proschan 等人建立了单调关联 (Coherent) 结构函数理论[2]，国内已有所介绍[3]. 对于两状态单元和系统来说，上述理论取得了很大的成功. 近些年又出现了建立多状态单调关联系统理论的积极动向[4,5].

下面首先对两状态单调关联结构(函数)的定义作一小引.

若 $\phi(X)\leqslant\phi(Y)$，当 $X\leqslant Y$，即 $x_i\leqslant y_i$, $i=\overline{1,n}$; X, Y 都是 n 元向量,则称结构函数 ϕ 是单调的. 这里 $\phi(X)$, $\phi(Y)$ 和 x_i, y_i 取值 0 或 1，表示系统或单元失效或成功.

若 $\exists X$ 使 $\phi(1_i, X)=\phi(0_i, X)$ 成立,则称单元 i 对于结构 $\phi(X)$ 无关，否则称为关联的. 其中记号

$$(1_i, X)=(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \cdots, x_n),$$
$$(0_i, X)=(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \cdots, x_n).$$

定义 1. 如果: (a) 多单元系统的结构是单调的; (b) 每个单元对系统是关联的,则称为单调关联系统.

定义 2. 称单元 i 的所有可能状态的集合 (x_i, $\bar{x}_i$) 为补全集 (Complete Set). 其含义与完备集 (Complete Set) 不同,与补集或余集 (Complement Set) 也不同.

定义 1 中条件 (a) 意味着任一单元性状的改善决不导致系统性状变坏,由此易证

性质 1. 单调关联结构函数必定不包含任一单元的补全集或其状态变量 x_i 的补 (即

本文于1986年6月9日收到.

逆变量 $\bar{x}_i$) 作为使 $\phi(X)=1$ 的必要条件,即 $\phi(X)$ 的所有质蕴涵集中必不包含逆变量或补全集.

这是因为，设结构 $\phi(X)$ 有一质蕴涵项包含 $\bar{x}_i$, 即 $P=M\bar{x}_i$, 则 Mx_i 也必须是 $\phi(X)$ 的质蕴涵项,否则单元之性状的改善导致系统性状变坏,与条件 (a) 相矛盾; 这样 $M(x_i\cup\bar{x}_i)=M$ 是 $\phi(X)$ 的质蕴涵,而 $M\bar{x}_i$ 不是,又与初始假设相矛盾.

但在有些实际系统中，结构函数必然地包含补全集或逆变量. 例如带有反馈回路的自动控制系统,其结构函数就是非单调的. 如国外某卫星控制发动机的氧化剂管路堵塞，燃烧不好,偏差增大. 反馈控制系统就把阀门开大,多送燃料. 但因无氧化剂，还是烧不好,偏差继续增大,反馈控制系统就把阀门开得更大,这样恶性循环,很快就把卫星携带的燃料耗完，造成不可挽救的故障. 这情形可叫做“故障危险”. 假如燃料和氧化剂管路同时堵塞,或反馈失灵,至少不会把燃料耗完,则这种故障还有可能挽救，这叫“故障安全”. 显然这种系统是非单调关联的，某两个单元同时故障比一个单元故障强一点. 这在反馈控制系统的故障关系中有普遍性.

为处理这类系统，本文提出： 非单调关联结构函数在形式上也可用最小路集 MPS (或最小割集 MCS) 来表示. 通过不交化，可计算系统成功(失效)概率，以及单元重要度(只是应当区分单元的正、逆重要度). 这些和单调关联系统的处理方法相似. 而全部 MPS (MCS) 可作为寻找全部质蕴涵 Prime Implicate (Prime Implicant) 即完备基的基础. 这后半部工作可称为非单调关联结构函数最小化，原则上可和开关函数最小化理论方法统一起来.

二、非单调关联系统的定义和基本性质

定义 3. n 个单元组成的系统 S，如果: (a) 其结构函数 $\phi(X)$ 是非单调的; (b) 每个单元对于结构 $\phi(X)$ 是关联的,则称 S 为非单调关联系统 (Non-coherent).

这里不考虑单元对 $\phi(X)$ 无关的情形. 质言之,非关联单元可以弃去而不影响系统性状.

如前讨论可有

性质 2. 两状态非单调关联结构函数之中至少存在一个逆变量或补全集.

分解公式

$$\phi(X)=x_i\phi(1_i,X)+(1-x_i)\phi(0_i,X),\ i=\overline{1,n}. \tag{1}$$

对于任何 n 阶结构成立，即对于单调关联和非单调关联系统同样适用. 因为它即是 Shannon 定理，对于一般布尔函数(不论其中是否包含逆变量或互补的布尔变量)恒真.

对偶结构 对于 n 阶结构函数 $\phi(X)$，称

$$\phi^D(X)=1-\phi(1-X) \tag{2}$$

为它的对偶结构函数,这里

$$(1-X)\triangleq(1-x_1,1-x_2,\cdots,1-x_n).$$

易证,非单调关联结构的对偶也是一个非单调关联结构.

定理．对于 n 阶非单调关联结构 $\phi(X)$ 有

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \leqslant \phi(X) \leqslant \coprod_{i=1}^{n} x_i = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i). \tag{3}$$

这是因为，当 $\phi(X)$ 至少包含一个补全集时，(3) 式左方恒等于 0，右方恒等于 1；而 $\phi(X)$ 只能取 0 或 1，满足 (3) 式关系． 而当 $\phi(X)$ 不含补全集时，式 (3) 显然成立．

注意到单调关联结构的下列定理

$$\begin{aligned} &\phi(X \cup Y) \geqslant \phi(X) \cup \phi(Y), \\ &\phi(XY) \leqslant \phi(X)\phi(Y). \end{aligned} \tag{4}$$

对于非单调关联结构未必成立，因为 (4) 式的证明依赖于 ϕ 的单调性质．

(4) 式的第一式的含义是，在部件一级上的并联备分比系统一级的并联备分更有效．这个为可靠性工程师所共知的原则对于单调关联系统是对的，但对于非单调关联系统不一定对．由于非单调性，在某种特定情况下，把某部件搞得更可靠有可能反而不利于系统性状的改善．

三、非单调关联结构的割集和路集表示

单调关联结构可用割集或路集表示，非单调关联结构在形式上也可以用割集或路集表示．这是因为，虽然后者可含有补全集，但在每一个 MPS 或 MCS 中，必定不含补全集．

“在形式上”是指： 对于非单调关联结构来说，可能存在形如 Ax_i，$AB\bar{x}_i$ 这样的 MPS 或 MCS． 这时 $AB\bar{x}_i$ 只是在形式上、在故障树或网络图的直观意义上才是“最小”．而在隐含的意义上它可以被质蕴涵 AB 所吸收．

定义 4. 路向量是使 $\phi(X) = 1$ 的向量 X，它相应于路集

$$c_1(X) = \{i, k \mid x_i = 1, \bar{x}_k = 1, i \neq k, 1 \leqslant i, k \leqslant n\}. \tag{5}$$

对于路向量 X，若任意 $Y < X$（即 $y_i \leqslant x_i$，而且至少对某一分量取不等号)，在故障树或网络图的直观意义上有 $\phi(Y) = 0$，则此 X 为“最小”路向量，相应的 $c_1(X)$ 为“最小”路集 MPS.

当“最小”路集的单元都出现(逆变量出现表示该单元故障，正变量出现表示正常)时，系统正常．

设已找出全部 MPS：$P_1, P_2, \cdots, P_m$.

记

$$\rho_j(X) = \prod_{i \in P_j} x_i, \quad j = \overline{1, m};$$

则

$$\phi(X) = \max_{1 \leqslant j \leqslant m} \rho_j(X) = \coprod_{j=1}^{m} \rho_j(X). \tag{6}$$

即 $\phi(X)$ 可通过 MPS（串联结构)的并联来表示．

定义 5. 割向量是使 $\phi(X)=0$ 的向量 X，它相应于割集

$$c_0(X)=\{i,k\mid x_i=0,\bar{x}_k=0,i\neq k,1\leqslant i,k\leqslant n\}. \tag{7}$$

对于割向量，若任意 $Y>X$ 时在故障树或网络图直观意义上有 $\phi(Y)=1$，则此 X 为"最小"割向量，相应的 $c_0(X)$ 为"最小"割集 MCS.

当"最小"割集的单元都出现(逆变量出现表示该单元正常，正变量出现表示故障)时，系统故障.

设已经找出全部 MCS: $K_1, K_2, \cdots, K_l$.

记

$$k_j=\coprod_{i\in k_j} x_i,\quad j=\overline{1,l};$$

则

$$\phi(X)=\min_{1\leqslant j\leqslant l} k_j(X)=\prod_{j=1}^{l} k_j(X). \tag{8}$$

即结构 $\phi(X)$ 可通过 MCS (并联结构)的串联来表示.

在每个 MPS 或 MCS 中必不存在补全集(但可能存在逆变量)；在全部 MPS 或 MCS 所表示的 $\phi(X)$ 中必存在逆变量或补全集.

根据对偶结构的定义易见，若 X 是 $\phi(X)$ 的路向量，则 $1-X=\bar{X}$ 是 $\phi^D(X)$ 的割向量，$\phi(X)$ 的最小路集 MPS 是 $\phi^D(X)$ 的最小割集 MCS. 反之亦然.

四、非单调关联系统可靠性

单元状态变量 x_i 是随机变量

$$P_r\{x_i=1\}=p_i=Ex_i.$$

在给定 p_i, $i=\overline{1,n}$ 条件下求系统可靠性

$$E\phi(X)=P_r\{\phi(X)=1\}.$$

由于

$$\phi(X)=\coprod_{j=1}^{m}\prod_{i\in P_j} x_i,\ \text{或}\ \phi(X)=\prod_{j=1}^{l}\coprod_{i\in K_j} x_i,$$

故有

$$E\phi(X)=E\left(\coprod_{j=1}^{m}\prod_{i\in P_j} x_i\right)\ \text{或}\ E\phi(X)=E\left(\prod_{j=1}^{l}\coprod_{i\in K_j} x_i\right). \tag{9}$$

注意到 P_j 之间或 K_j 之间一般不独立(由于含有相同的或互补的单元)，因此求数学期望 **E** 不能和求积号 Π 相交换，故直接用 (9) 式较困难.

因此，一般应在找出全部 MPS 或 MCS 之后进行不交化，或直接找出不交 MPS 或不交 MCS[6]，再计算系统成功或失效概率.

虽然 $\phi(X)$ 中可能存在补全集，但在每个 MPS (MCS) 中不存在补全集，所以每个 MPS (MCS) 内部各单元之间可认为是统计独立的.

文献 [2,7] 讨论了单调关联和非单调关联系统可靠性的界，我们对后者作以下讨论.

1. MPS，MCS 界限

文献 [2] 指出，单调关联系统的 P_j 之间或 K_j 之间一般是牵连的 (Associated)，对此有定理

$$\prod_{j=1}^{l} P_r\{k_j(X)=1\} \leqslant P_r\{\phi(X)=1\} \leqslant \prod_{j=1}^{m} P_r\{\rho_j(X)=1\}. \tag{10}$$

对于非单调关联系统，这个定理一般不成立．因其 $P_j(K_j)$ 之间虽然也有相同单元，有互相牵连的情形，但又可能有互补的单元，后者产生我们称之为“负牵连”的情形．而正、负牵连的作用方向相反，因而不可能证明上述定理 (10) 式(对非单调关联系统，可举出 (10) 式的反例)．

2. Min-Max 界限

文献 [2] 根据单调关联结构 $\phi(X)$ 是 MPS 串联结构的并联，又是 MCS 并联结构的串联的性质，证明了以下定理

$$\max_{1\leqslant t\leqslant m} P_r\{\min_{i\in P_t} x_i=1\} \leqslant P_r\{\phi(X)=1\} \leqslant \min_{1\leqslant s\leqslant l} P_r\{\max_{i\in K_s} x_i=1\}. \tag{11}$$

对于牵连的单调关联系统有

$$\max_{1\leqslant t\leqslant m} \prod_{i\in P_t} p_i \leqslant P_r\{\phi(X)=1\} \leqslant \min_{1\leqslant s\leqslant l} \coprod_{i\in K_s} p_i. \tag{12}$$

对于非单调关联结构，上节已讨论其 MPS 或 MCS 表示，同样具有这样的性质：$\phi(X)$ 是 MPS 串联结构的并联，又是 MCS 并联结构的串联．故此 Min—Max 界限公式也成立．

3. 容斥原理界限

用 E_j 表示 $P_j(X)$ 中所有单元出现的事件

$$P_r\{E_j=1\}=\prod_{i\in P_j} p_i.$$

系统有 m 个 MPS，则系统完好相应于事件 $\bigcup_{r=1}^{m} E_r$，即

$$P_r\{\phi(X)=1\}=P_r\left\{\bigcup_{r=1}^{m} E_r\right\}.$$

令

$$S_k=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant m} P_r\{E_{i1}\cap E_{i2}\cap\cdots\cap E_{ik}\}.$$

根据容斥原理 (Inclusion-Exclusion Principle)

$$\left.\begin{aligned} &P_r\{\phi(X)=1\}=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}S_k,\\ \text{而且}\quad &P_r\{\phi(X)=1\}\leqslant S_1,\\ &\qquad\qquad\qquad\ \geqslant S_2,\ \ . \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

这就是系统可靠性的容斥原理界限．注意这个界限必然收敛但未必单调收敛．

虽然由于补全集存在，S_k 表达式右端有的项可能为零，但整个 S_k 不为零．所以容斥

原理界限对于非单调关联系统也是成立的.

以上关于三种界限的结论与文献 [7] 一致.

五、非单调关联系统的单元重要度

在非单调关联系统中存在着单调部件和非单调部件. 当前者由故障变为正常状态时,系统不可能由正常变为故障状态;当后者由故障变为正常状态时,系统可能由正常变为故障状态. 因此,解决非单调关联系统的单元重要度问题的关键在于区别这种情况,作出恰当处理. 1983 年 Jackson 在文献 [8] 中把单调关联系统单元重要度公式推广到非单调关联系统,因可能算出负值,他提出取绝对值的处理办法. 我们认为取绝对值没有解决实质问题. 笔者在 1983 年可靠性数学理论讨论会的报告中提出分别计算正、逆结构重要度的概念. 史定华[9]、张勤和梅启智[10]作了进一步的讨论.

1. 单元的结构重要度

设非单调关联系统中任一单元 i,若对某 $(\cdot_i,X)$ 有 $\phi_i(X)=\phi(1_i,X)-\phi(0_i,X)=1$, 则 i 在 $(\cdot_i, X)$ 这种情形下是一个正关键单元, $(1_i, X)$ 是 i 的一个正关键路向量. 此时 i 以外的 $n-1$ 维状态向量 X 为单元 i 的正关键状态, 和 X 相应有单元 i 的正关键最小路集状态.

类似地,若对 $(\cdot_i, X)$ 有 $\bar{\Phi}_i(X)=\phi(0_i, X)-\phi(1_i, X)=1$, 则 i 在 $(\cdot_i, X)$ 这种情形下是一个逆关键单元, $(0_i, X)$ 是 i 的一个逆关键路向量. 此时 i 以外的 $n-1$ 维状态向量 X 为单元 i 的逆关键状态,和 X 相应有单元 i 的逆关键最小路集状态.

i 的正关键路向量总数为 $n_i^+=\sum\limits_X \phi_i(X)$, 当 $x_i=1$ 时 $(1_i, X)$ 最多有 2^{t-1} 种可能的组合,这里 t 是独立单元的数目, 具有互补状态的单元只作为一个独立单元计算. 由此可以定义部件 i 的正结构重要度为

$$I_i^{+st}=\frac{n_i^+}{2^{t-1}}. \tag{14}$$

类似地定义 i 的逆结构重要度为

$$I_i^{-st}=\frac{n_i^-}{2^{t-1}}. \tag{15}$$

其中 $n_i^-=\sum\limits_X \bar{\Phi}_i(X)$ 是单元 i 的逆关键路向量总数.

和单调关联系统的单元结构重要度 I_i^{st} 相比较,对于单调部件有 $I_i^{st}=I_i^{+st}$, 对于非单调部件有 $I_i^{st}=I_i^{+st}-I_i^{-st}$.

此外,我们认为还应当引入单元 i 的结构总重要度 $I_i^{\Sigma st}=I_i^{+st}+I_i^{-st}$ 作为统一比较单调和非单调部件的结构重要度的尺度. 例如 $I_i^{+st}=I_i^{-st}$ 的单元, 其 $I_i^{st}=0$, 但它在系统结构中还是重要的,只是具有非单调性的特点而已. 所以应按 $I_i^{\Sigma st}$ 进行比较.

2. 单元的概率重要度[10]

单元 i 的正概率重要度可定义为

$$I_j^{+P_r} = P_r\{\phi_j(X) = 1\}$$

= 系统处于单元 j 的正关键状态的概率；

= 系统处于单元 j 的至少一个正关键最小路集状态发生，而其它最小路集状态均不发生的概率；

$$= P_r\left\{\bigcup_{K=1}^{m_1} \rho_K(j) \bigcap_{i=1}^{m_2} \overline{\rho_i}(j)\right\},$$

$$= P_r\left\{\bigcup_{K=1}^{m_1} \rho_K(j)\left[1 - \bigcup_{i=1}^{m_2} \rho_i(j)\right]\right\},$$

$$= P_r\left\{\sum_{K=1}^{m_1} \rho_K^*(j)\right\} - P_r\left\{\sum_{K=1}^{m_1} \rho_K^*(j)\left[\sum_{i=1}^{m_2} \rho_i^*(j)\right]\right\},$$

$$= \sum_{K=1}^{m_1} P_r\{\rho_K^*(j)\} - \sum_{K=1}^{m_1}\sum_{i=1}^{m_2} P_r[\rho_K^*(j)\rho_i^*(j)],$$

$$= \sum_{K=1}^{m_1}\left\{P_r[\rho_K^*(j)]\cdot\left[1 - \sum_{i=1}^{m_2} P_r(\rho_{Ki}^*(j))\right]\right\}. \tag{16}$$

式中

$$P_r[\rho_{Ki}^*(j)] \triangleq P_r[\rho_i^*(j)/\rho_K^*(j)].$$

$\rho_K(j)$ 为单元 j 的正关键最小路集状态，共 m_1 个；$\rho_i(j)$ 为单元 j 的其它最小路集状态，共 m_2 个，后者包括 j 的逆关键最小路集状态和与 j 无关的最小路集状态．凡加 * 号者表示已不交化．

容易看出，当 $\rho_i^*(j)\rho_K^*(j) = \phi$ 时，$P_r[\rho_{Ki}^*(j)] = 0$；否则，$P_r[\rho_{Ki}^*(j)]$ 等于 $\rho_i^*(j)$ 中含有而 $\rho_K^*(j)$ 中不含有的发生概率之积．

同上可以定义单元 j 的逆概率重要度为

$$I_j^{-P_r} = P_r\{\overline{\phi}_j(X) = 1\} = \sum_{a=1}^{l_1}\left\{P_r[\rho_a^*(j)]\cdot\left[1 - \sum_{b=1}^{l_2} P_r(\rho_{ab}^*(j))\right]\right\}. \tag{17}$$

式中 $\rho_a^*(j)$ 为单元 j 的不交化逆关键最小路集状态，共 l_1 个；$\rho_b^*(j)$ 为不交化的其它最小路集状态（包括 j 的正关键最小路集状态及与 j 无关的最小路集状态），而

$$P_r\{\rho_{ab}^*(j) \triangleq P_r\{\rho_b^*(j)/\rho_a^*(j)\}.$$

和单调关联系统的单元概率重要度 $I_j^{P_r}$ 相比较，对于单调部件有 $I_j^{P_r} = I_j^{+P_r}$，对于非单调部件有 $I_j^{P_r} = I_j^{+P_r} - I_j^{-P_r}$．而单元 j 的总概率重要度 $I_j^{\mp P_r} = I_j^{+P_r} + I_j^{-P_r}$．

由前述，j 的正关键路向量（它对应着除 j 以外的 $n-1$ 维正关键状态 X）共 n_j^+ 个，它们两两互斥，记为 X_i，$i = 1, 2, \cdots, n_j^+$．由式 (16)

$$I_j^{+P_r} = \sum_{i=1}^{n_j^+} P_r\{\phi_j(X) = 1\} = \sum_{i=1}^{n_j^+} P_r\{X_i\}P_r\{\phi_j(X) = 1/X = X_i\},$$

由 j 的正关键向量定义 $P_r\{\phi_j(X) = 1/X = X_i\} = 1$，且当 $\forall k$, $P_r\{x_k\} = 0.5$ 时，有

$$P_r\{X_i\} = 1/(2^{t-1}),\quad i = 1, 2, \cdots, n_j^+;$$

这样就证明了

$$I_j^{+P_r} = I_j^{+st},\quad 当\ P_r\{x_k\} = 0.5,\ \forall k;$$

同理可证在同样的条件下

$$I_i^{-P_r}=I_i^{-st},\ I_i^{P_r}=I_i^{st},\ I_i^{\Sigma P_r}=I_i^{\Sigma st}.$$

3. 单元的相对概率重要度

概率重要度 $I_i^{P_r}=\partial h(p)/\partial p_i$ 只是反映了单元可靠性 p_i 的改进对于系统可靠性 $h(p)$ 的贡献，但不能反映出改进单元可靠性本身的难易程度，因此再引入相对概率重要度的概念：

$$I_i^{+C_r}=\frac{p_i}{h(p)}I_i^{+P_r},\qquad I_i^{-C_r}=\frac{p_i}{h(p)}I_i^{-P_r},$$

$$I_i^{C_r}=\frac{p_i}{h(p)}I_i^{P_r},\qquad I_i^{\Sigma C_r}=\frac{p_i}{h(p)}I_i^{\Sigma P_r}.$$

对于单调部件 $I_i^{-C_r}=0$，$I_i^{C_r}=I_i^{+C_r}=I_i^{\Sigma C_r}$.

六、非单调关联结构函数最小化

单调关联系统的全部成功（故障）模式都是明显的（可从网络图或故障树结构直观判明），可以通过全部 MPS（MCS）唯一地描述．非单调关联系统的成功（故障）模式有明显的和隐含的，要通过质蕴涵集 PIS 来描述．因此，本文前面各节推广两状态单调关联系统理论的某些结果，在形式上沿用 MPS（MCS）表示非单调关联结构函数，通过不交化计算系统成功（故障）概率和单元重要度，在处理上得到一定方便；但还要进一步解决系统成功（故障）模式识别问题．为此应当：

1）以 MPS（MCS）为基础，找出全部 PIS（完备基）；

2）进一步找出最小无冗余基（既约基），它由部分或全部 PIS 组成，可以不唯一（因此目前尚缺乏有效的算法）．

这两项任务即非单调关联结构函数最小化，它和开关函数最小化的实质相同，适用开关函数最小化的理论和方法．二者有一点差别是，系统成功（故障）模式的识别决不可遗漏，但允许重复，所以第一步可以只求完备基．

求开关函数完备基的方法基于 Karnaugh 图、Quine 原理和 Nelson 原理． R. R. Willie 在 FTAP 程序中提出的对偶算法[11] 和段志刚最近提出的反复析因构造对偶族算法[12]，通过“双取对偶”求得非单调关联故障树的全部 PIS．这两个算法比较有效，这里不赘述．

七、举　例

有一液位调节系统如图 1 所示[13]．

以液位高于给定值作为顶事件来建造此系统的故障树．设泵供液量正常或偏多，阀门可相对地认为不会失效，液位计的故障是液位不低时发出“液位偏低”的虚假信号．容易看出这是一个非单调关联系统，它的故障树有两个最小割集 (x_1, x_3)，$(x_2, \bar{x}_3)$，其中 $x_1=1$ 表示泵故障（供液过多），$x_2=1$ 代表液位计故障，$x_3=1$ 表示控制器失灵，而 $\bar{x}_3=1$ 表示控制器正常．

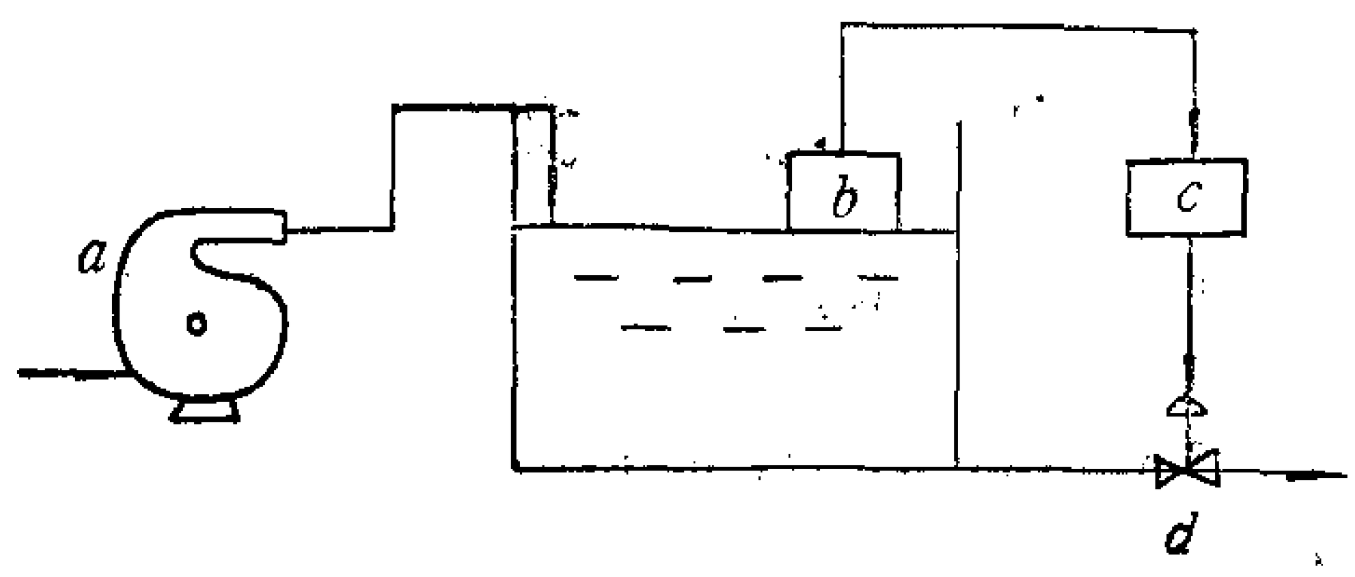

图 1

图中 (a) 泵；(b) 液位计；(c) 控制器；(d) 阀门.

和结构函数相对应地定义故障树的故障函数

$$\phi(X) = x_1x_3 \cup x_2\bar{x}_3.$$

$\phi(X) = 1$ 代表系统故障，$\phi(X) = 0$ 代表系统正常. 按定义 3 和性质 2，$\phi(X)$ 非单调关联.

由于最小割集已经是不交的，系统不可靠性

$$Q = P_r\{\phi(X) = 1\} = P_r(x_1x_3) + P_r(x_2\bar{x}_3) = q_1q_3 + q_2(1 - q_3).$$

设已知部件故障概率 $q_1 = 9.9 \times 10^{-3}$，$q_2 = 3.8 \times 10^{-2}$，$q_3 = 1.5 \times 10^{-1}$，则

$$Q = 3.4 \times 10^{-2}.$$

下面计算单元重要度. 对于单调部件 1，2 有

$$I_1^{P_r} = I_1^{+P_r} = \frac{\partial Q}{\partial q_1} = q_3 = 1.5 \times 10^{-1} = I_1^{\Sigma P_r},\ I_1^{C_r} = 4.4 \times 10^{-2},$$

$$I_1^{st} = 0.5;\ I_2^{P_r} = 8.5 \times 10^{-1},\ I_2^{C_r} = 9.5 \times 10^{-1},\ I_2^{st} = 0.5.$$

对于非单调关联部件 3 有

$$I_3^{P_r} = \frac{\partial Q}{\partial q_3} = q_1 - q_2 = -2.9 \times 10^{-2},$$

$$I_3^{+P_r} = P_r\{c_1^*(3)[1 - c_{12}^*(3)]\} = P_r\{[x_1](1 - [x_2|x_1])\}$$

$$= q_1(1 - q_2) = 9.5 \times 10^{-3},$$

$$I_3^{-P_r} = 3.85 \times 10^{-2},\ I_3^{\Sigma P_r} = 4.8 \times 10^{-2},\ I_3^{C_r} \approx -1.3 \times 10^{-2},$$

$$I_3^{+C_r} = 4.3 \times 10^{-2},\ I_3^{-C_r} = 1.7 \times 10^{-1},\ I_3^{\Sigma C_r} = 2.13 \times 10^{-1};$$

$$I_3^{st} = 0,\ I_3^{+st} = 0.25,\ I_3^{-st} = 0.25,\ I_3^{\Sigma st} = 0.5.$$

一般地，$I_i^{C_r}$ 可以指示检查维修次序. 本例中 $I_3^{st} = 0$，但不是说部件 3 在结构上对系统性状毫无影响，$I_3^{\Sigma st}$ 可以反映这一点. 又 $I_3^{P_r}$，$I_3^{C_r}$ 为负值，说明控制器正常造成系统故障的情形比控制器故障造成系统故障的情形还多. 就这一点来说，系统设计欠合理.

对非单调关联故障函数进行最小化，根据 Quine 原理作 consensus 运算得

$$\phi(X) = x_1x_3 \cup x_2\bar{x}_3 = x_1x_3 \cup x_2\bar{x}_3 \cup x_1x_2.$$

最右端为全部质蕴涵集，记为 PIS_i，$i = \overline{1,3}$.

若发生故障的次序是 x_3—x_2—x_1，那么在 x_1 出现之前，顶事件不出现（x_3x_2 为"故障安全"状态，它不构成 PIS）；只在 x_1 也出现时，顶事件才发生(此时 PIS_1，PIS_2 都存在，为"故障危险"状态). 这就是故障次序有关性. 因此，检查维修次序也应讲究. 在已经出现 x_3x_2 的"故障安全"状态下，如果先去修理控制器 c，反而变成"故障危险"(PIS_2). 所以应当先检查维修液位计 b.

参 考 文 献

[1] Lapp, S. A., Powers, G. J., Computer-aided Synthesis of Fault Trees, *IEEE Trans. on Reliability*, **26**(1977), 2—13.
[2] Barlow, R. E., Proschan, F., Statistical Theory of Reliability and Life Testing, 1975.
[3] 曹晋华、程侃，可靠性数学引论，科学出版社，1986.
[4] Barlow, R. E., Wu, A. S., Coherent Systems with Multistate Components, *Math. of Operations Research*, **3** (1978), 275—281.
[5] El-Neweihi, E., Proschan, F., Multstate Coherent Systems, *J. Applied Probability*, **15**(1978), 675—688.
[6] 廖炯生，失效树分析的新途径，中国科学，A 辑，**5**(1982), 461—471.
[7] Chu, T. L., Apostolakis, G., Methods for Probabilistic Analysis of Non-coherent Systems, *IEEE Trans. on Reliability*, **29**(1980), 354—360.
[8] Jackson, P. S., On the S-importance of Elements & Prime Implicants of Non-coherent Systems, Ibid, **32** (1983), 21—25.
[9] 史定华，单元重要度及其计算，科学通报，1984 年，6 期，381—382.
[10] 张勤，梅启智，Element Importance & System Failure Frequence of a 2-state System, *IEEE Trans. on Reliability*, **34**(1985), 308—313.
[11] Willie, R. R., Computer-aided Fault Tree Analysis, ORC-78-14, Operations Research Center, University of California, 1978.
[12] 段志刚，关于构造对偶族的一个新算法，科学通报，V. 31(1986), 1617—1619.
[13] Inagaki, T., Henley, E. J., Probabilistic Evaluation of Prime Implicants and Top-event for Non-coherent Systems, *IEEE Trans. on Reliability*, **29**(1980), 361—367.

A FORMAL THEORY OF BINARY NON-COHERENT STRUCTURES

LIAO JIONGSHENG

(Beijing Institute of Control Engineering)

ABSTRACT

The theory of binary coherent structures has become a foundation for the mathematical theory of reliability, and is developing towards the theory of multi-state coherent structures.

A non-coherent system model was presented by Lapp & Powers in 1977, which evoked a heated discussion. Generally, there exists in automatic control systems the feedback loop which leads to non-coherency. To handle this kind of systems, some results of the binary coherent structure theory are extended to non-coherent structures, and a formal theory of binary non-coherent structures is proposed in this paper.