第 14 卷 第 4 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 14, No. 4
1988 年 7 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　July, 1988

PI 调节器用于多输入多输出线性系统跟踪给定值的最优设计

邢继祥　王　炎　陈桂林
（哈尔滨工业大学）

摘　　要

本文对多输入多输出线性系统跟踪给定值问题给出一个正确的提法．并用 PI 调节器实现最优设计，保留了“按偏差跟踪”方法的优点，设计方法简便．

对单输入单输出线性系统，文献[1,2]用 PID 调节器实现跟踪给定值的最优设计，并指出以往跟踪问题最优性能指标的提法[3]是盲目的．本文将文献[1,2]的方法推广到多输入多输出系统．对于输出跟踪给定值的情形，本推广（文献[5]称为“按偏差跟踪”方法）在文献[1]的基础上改正了文献[5,6]指出的局限性，克服了文献[5]的不足之处．设计方法也较文献[7,8]构造积分形控制系统简便、直观．

一、跟踪给定值的正确提法与最优设计

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\,\boldsymbol{u},\ \ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \in R^n. \tag{1}$$

$\boldsymbol{u} \in R^r$，非零常向量 $\boldsymbol{\eta} \in R^n$ 是 $\boldsymbol{x}$ 要跟踪的．

提法求 $\boldsymbol{u}^*(t)$ 使

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty [(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{x})^T Q(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{u}^T R\,\boldsymbol{u}]dt = \min$$

是盲目的[1]．因为当 $t \to \infty$ 时，$\boldsymbol{u}(t) \to 0$，$\boldsymbol{x}(t) \to \boldsymbol{\eta}$，$\dot{\boldsymbol{x}}(t) \to 0$，显然不满足系统方程(1)式．

正确的提法对于多输入多输出的系统(1)也如同文献[1]一样，应该是求 $\boldsymbol{u}^*(t)$ 使

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty [(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{x})^T Q(\eta - \boldsymbol{x}) + \dot{\boldsymbol{u}}^T R\,\dot{\boldsymbol{u}}]dt = \min. \tag{2}$$

其中矩阵 $Q \geqslant 0$，$R > 0$．

引进偏差量及控制的导数变换，即令

$$\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{x}(t),\ \ \dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{v}(t). \tag{3}$$

由式(1),(2)可得

本文于 1986 年 4 月 10 日收到．

$$\ddot{\boldsymbol{z}} = A\dot{\boldsymbol{z}} - B\boldsymbol{v}(t),$$

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty [\boldsymbol{z}^T Q \boldsymbol{z} + \boldsymbol{v}^T R \boldsymbol{v}] dt.$$

从而可得 $(2n)$ 阶系统方程

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\boldsymbol{z}\\ \dot{\boldsymbol{z}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & I\\ 0 & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{z}\\ \dot{\boldsymbol{z}}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ -B\end{pmatrix}\boldsymbol{v}(t) = \widetilde{A}\begin{pmatrix}\boldsymbol{z}\\ \dot{\boldsymbol{z}}\end{pmatrix} + \widetilde{B}\boldsymbol{v}(t) \tag{4}$$

以及性能指标是求 $\boldsymbol{v}^*(t)$ 使

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{z}\\ \dot{\boldsymbol{z}}\end{pmatrix}^T \widetilde{Q}\begin{pmatrix}\boldsymbol{z}\\ \dot{\boldsymbol{z}}\end{pmatrix} + \boldsymbol{v}^T R\boldsymbol{v}\right] dt = \min. \tag{5}$$

其中

$$\widetilde{Q} = \begin{pmatrix}Q & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{2n\times 2n} \geqslant 0,\ R > 0.$$

式(4),(5) LQP 问题的最优解

$$\boldsymbol{v}^*(t) = -R^{-1}\widetilde{B}^T Y\begin{pmatrix}\boldsymbol{z}\\ \dot{\boldsymbol{z}}\end{pmatrix} = -R^{-1}(0, -B^T)Y\begin{pmatrix}\boldsymbol{z}\\ \dot{\boldsymbol{z}}\end{pmatrix} = \boldsymbol{k}_1\boldsymbol{z} + \boldsymbol{k}_2\dot{\boldsymbol{z}}. \tag{6}$$

其中 $(Y)_{2n\times 2n}$ 是 Riccati 矩阵方程的半正定对称解.

由式(3),(6)即得原跟踪问题的最优控制为

$$\boldsymbol{u}^*(t) = \boldsymbol{k}_1\int \boldsymbol{z}dt + \boldsymbol{k}_2\boldsymbol{z} = \boldsymbol{k}_1\int[\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{x}]dt + \boldsymbol{k}_2[\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{x}]. \tag{7}$$

此即取偏差量的 PI 调节器形式.

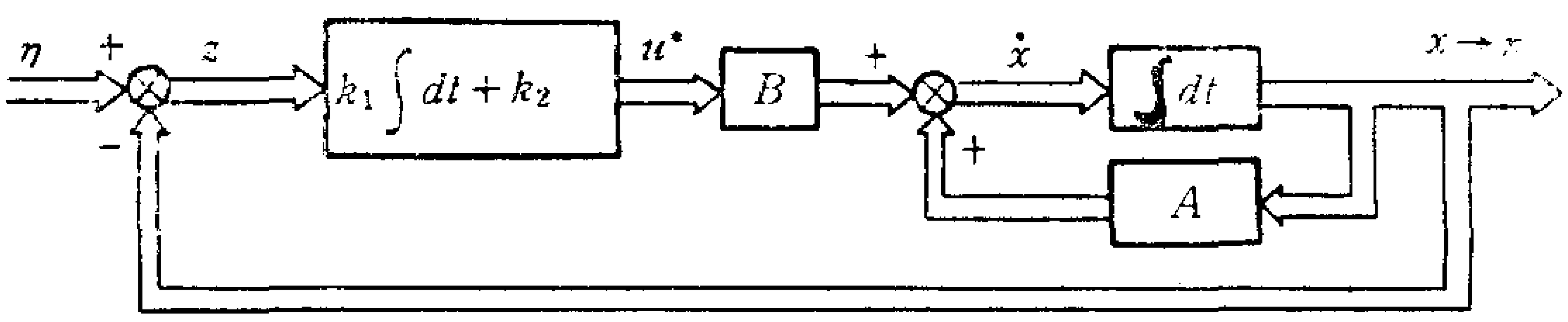

图 1

这种最优调节器除具有二次指标最优控制器的所有优点[3]外，显然是无静差的；而且,对系统参数的变化不灵敏(见文献[1]及本文二段).

单输入单输出的系统可作为本推广的特例(见文献[1,2]).

二、输出跟踪给定值的情形

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u},\\ \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x}.\end{cases} \tag{8}$$

$\boldsymbol{y}\in R^m$, $\boldsymbol{\eta}\in R^m$ 是输出 y 要跟踪的常值向量.文献[5]指出文献[1]以及以上推广方法的局限性之一是没考虑输出跟踪给定值的情形. 其实不然.

性能指标提法类似于(2)式

$$J=\frac{1}{2}\int_0^\infty[(\boldsymbol{\eta}-C\boldsymbol{x})^TQ(\boldsymbol{\eta}-C\boldsymbol{x})+\dot{\boldsymbol{u}}^TR\dot{\boldsymbol{u}}]dt.$$

类似于(3)式，仍令

$$\boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{\eta}-C\boldsymbol{x},\quad \dot{\boldsymbol{u}}(t)=\boldsymbol{v}(t),$$

则性能指标为

$$J=\frac{1}{2}\int_0^\infty[\boldsymbol{z}^TQ\boldsymbol{z}+\boldsymbol{v}^TR\boldsymbol{v}]dt.$$

系统方程为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{z}}=-C\dot{\boldsymbol{x}},\\ \ddot{\boldsymbol{x}}=A\dot{\boldsymbol{x}}+B\boldsymbol{v}.\end{cases}\tag{9}$$

第一段中相当于 $C=I$，即 $\dot{\boldsymbol{z}}=-\dot{\boldsymbol{x}}$，此时(9)式可化为(4)式．而此时根据(9)式须将(4)式改成

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\boldsymbol{z}\\ \dot{\boldsymbol{x}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-C\\0&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{z}\\ \dot{\boldsymbol{x}}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\B\end{pmatrix}\boldsymbol{v}=\tilde{A}\begin{pmatrix}\boldsymbol{z}\\ \dot{\boldsymbol{x}}\end{pmatrix}+\tilde{B}\boldsymbol{v}(t).\tag{10}$$

(10)式相当于文献[5]中的(17)—(19)式．但是，新状态变量只须增加 m 个偏差量 $\boldsymbol{z}(t)$，较文献[5]易理解(那里 $q(t)$ 是偏差量的积分)．

性能指标的(5)式应改成求 $\boldsymbol{v}^*(t)$ 使

$$J=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{z}\\ \dot{\boldsymbol{x}}\end{pmatrix}^T\tilde{Q}\begin{pmatrix}\boldsymbol{z}\\ \dot{\boldsymbol{x}}\end{pmatrix}+\boldsymbol{v}^TR\boldsymbol{v}\right]dt=\min.\tag{11}$$

其中

$$\tilde{Q}=\begin{pmatrix}Q&0\\0&0\end{pmatrix}_{(m+n)\times(m+n)}\geqslant 0.$$

式(10)，(11) LQP 问题最优解(所需条件见四段)是

$$\boldsymbol{v}^*=\boldsymbol{k}_1z+\boldsymbol{k}_2\dot{\boldsymbol{x}}=\dot{\boldsymbol{u}}.$$

即

$$\boldsymbol{u}^*(t)=\boldsymbol{k}_1\int\boldsymbol{z}dt+\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{x}.\tag{12}$$

图 2 与文献[5,7]相同，但方法简单．文献[5]证明了该最优设计是无静差的．其实，

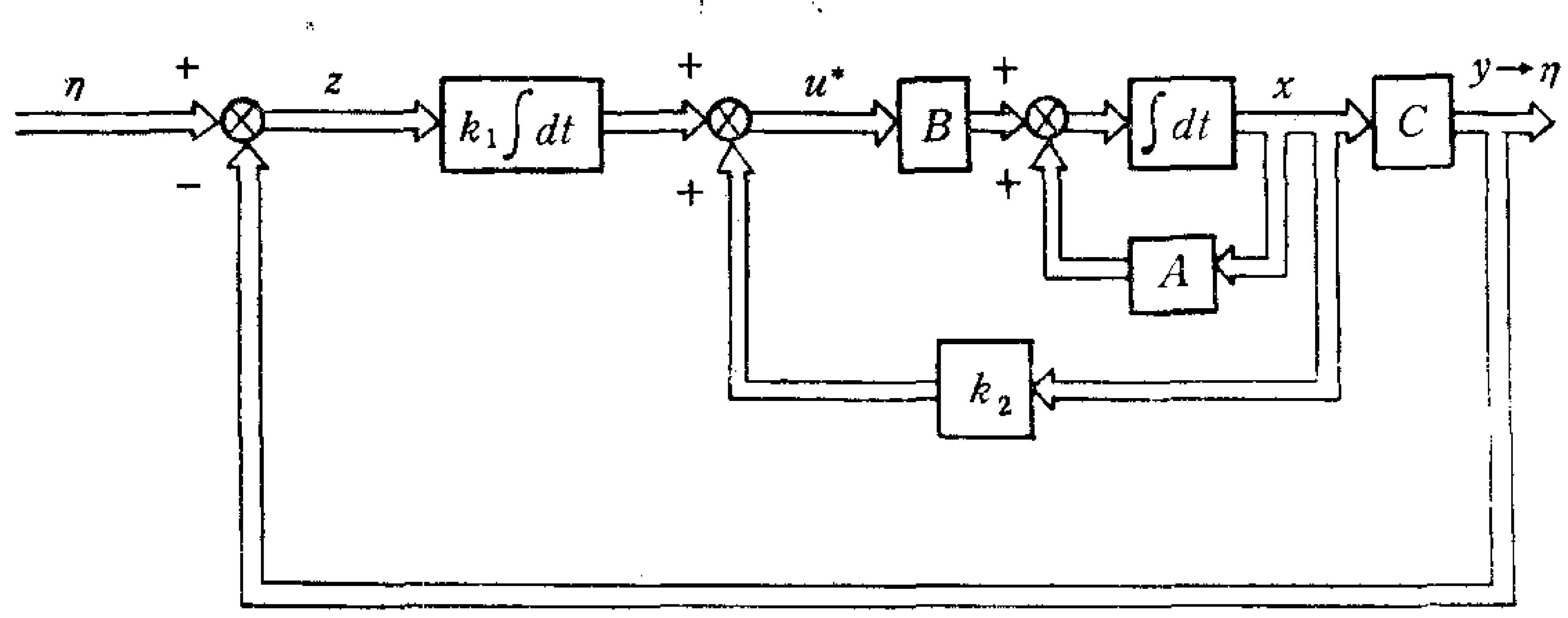

图 2

这是引入偏差的积分器控制的必然结果。另外，为保证(11)式的最优解存在，至少(11)式的广义积分收敛，需要求 $\boldsymbol{z} \to 0$。

该 PI 控制器对系统参数的变化仍是不灵敏的。事实上，若系统为 $\dot{\boldsymbol{x}} = A_0\boldsymbol{x} + B_0\boldsymbol{u}$ 时，(12)式所定闭环系统传递矩阵为

$$(s^2I - sA_0 - sB_0\boldsymbol{k}_2 + B_0\boldsymbol{k}_1)^{-1}B_0\boldsymbol{k}_1.$$

当 $s \to 0$ 时，上述矩阵 $\longrightarrow$ I，对任何系统不同于 A, B 的参数 A_0, B_0 成立。

三、例　　题[7]

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{u},\ y = (1\ \ 0)\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}(0) = 0.$$

由(10),(11)式及文献[7]

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$R = 1$. 通过解 Riccati 方程可得 $y_{13} = -1$, $y_{23} = y_{33} = 2$，而(12)式具体表示的最优控制为

$$\boldsymbol{u}^* = -(0\ \ 0\ \ 1)Y\begin{pmatrix} \int z dt \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix} = -(-1\ \ 2\ \ 2)\begin{pmatrix} \int z dt \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix}$$

$$= \int [\eta - y]dt - (2\ \ \ 2)\boldsymbol{x}.$$

结果与文献[7,8]一致，响应曲线较好[7]。

四、结　束　语

本推广方法一方面保持了文献[1]的特点(性能指标中要含有控制的导数项)，另一方面由于变量少且直观，有利于 $\tilde{Q}$ 矩阵的选取。而且能克服“积分状态”方法[5]的不足：文献[5]的(11)式指标中要求偏差量的积分 $\boldsymbol{q} \to 0$，这一点意义不太明确；而且，(11)式的指标中要求 $\boldsymbol{x} \to 0$ 可能与 $C\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{\eta}$ 的总目标相抵触。

对于单输入单输出的情形，文献[5]只用到特殊的二阶系统，对高阶系统需要降阶．此时用文献[4]推广的“按偏差跟踪”方法处理较好。

本推广最大的特点是跟踪问题在性能指标中含有控制的导数项，从而用最优控制理论得到的控制器均含有偏差量的积分器项。这正是经典控制理论中（只是单输入单输出系统)偏差的积分调节器可以消除静差的思想的推广。

说明：为使式(4),(5)及(10),(11)这两个 LQP 最优解存在，一个充分条件是均需用可控性判别阵判别 $(\tilde{A}, \tilde{B})$ 的可控性。另一种判别法是(对于(10)式)设 A, B, C 分别是 $n \times n$, $n \times r$, $m \times n$ 矩阵，只要 (A, B) 可控且 $m = r$，而 $\begin{pmatrix} 0 & -C \\ B & A \end{pmatrix}$ 这个 $(n+m) \times (n+m)$ 矩阵满秩，则系统(10)或 $(\tilde{A}, \tilde{B})$ 亦可控[7]。

事实上，

$$(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left(\begin{pmatrix} 0 & -C \\ 0 & A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}\right).$$

这个 $(n+m)$ 维系统的可控性判别阵满足

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & -CB & -CAB & -CA^2B \cdots -CA^{n+m-2}B \\ B & AB & A^2B & A^3B \cdots A^{n+m-2}B \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & -C \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & B & AB & A^2B \cdots A^{n+m-2}B \end{pmatrix} = n + m.$$

对于系统(4)将 $-C$ 换成 I，$m = n$，亦有完全类似的 $(\tilde{A}, \tilde{B})$ 可控性的充分判别条件.

参 考 文 献

[1] Athans. M, On the Design of P-I-D Controllers Using Optimal linear Requlator Theory, *Automatica*, **7**(1971), 643—647.
[2] 李训经，计算机控制中的跟踪问题，复旦大学学报，1978 年，第 2 期.
[3] Brian, D. O. Anderson, John B. Moore, Linear Optimal Control (有中译本).
[4] 邢继祥、王炎，PID 调节器用于跟踪给定值的最优设计，哈尔滨工业大学学报，1985年，第 3 期.
[5] Stefano, M. L., Optimal Design of PID requlators, *Int. J. Control*, **33**(1981), 601—616.
[6] 刘长樵等，PID 调节器的最优化设计，哈尔滨电工学院学报，1985 年，第 4 期.
[7] 古田胜久、佐野昭，线性系统基础，1978 年，哈尔滨船舶工程学院1979 年翻译本.
[8] 武田、北森，線形多入出力最適追徒制御の设计法，计测自动制御学会学術讲演会，**16**(1977)，55—56.

AN OPTIMAL DESIGN OF PI REGULATOR FOR TRACKING GIVEN VALUES PROBLEM OF LINEAR MULTIPLE INPUT-OUTPUT SYSTEMS

XING JIXIANG WANG YAN CHEN GUILIN
(Harbin Institute of Technology)

ABSTRACT

A proper formulation for tracking given values problem of linear multiple input-output systems is presented in this paper. Futhermore, the optimal design is realized using PI regulator. The method keeps the advantages of the 'tracking error' approach, but, the design is simpler.