Hurwitz 多项式的新结果

张 珩
(中国科学院自动化所)

摘 要

本文给出了判别 Hurwitz 多项式的简便而又宽裕的方法,并推导了 Routh 判据的等价形式.

研究线性定常连续系统的稳定性,除 Lyapunov 直接法外,一般都归结为讨论如下定义的多项式的 Hurwitz 性质,即

$$\begin{aligned} &\varphi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0, \\ &a_i > 0,\ i = 0, 1, \cdots, n-1. \end{aligned} \tag{1}$$

虽然这一问题早已由著名的 Routh-Hurwitz 判据解决,但事实表明,给出一些简洁而有意义的判据仍是必要的[1-4]. 本文亦将讨论 $\varphi(\lambda)$ 的另一些结果,这对进一步研究其它的简化判据有一定的意义.

为讨论方便,首先给出 Hurwitz 多项式的定义.

定义 1[5]. 若 $\varphi(\lambda)$ 的 n 个根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 满足

$$\mathrm{Re}\lambda_i < 0,\ i = 1, 2, \cdots, n. \tag{2}$$

则称 $\varphi(\lambda)$ 为 Hurwitz 多项式,或记为 $\varphi(\lambda) \in H[\lambda]$. 这里,Re"·" 表示"·"的实部.

沿用文献 [1] 的习惯,定义 $\varphi(\lambda)$ 的判别系数为

$$\mu_i = \frac{a_i a_{i+3}}{a_{i+1}a_{i+2}},\ a_n = 1,\ i = 0, 1, \cdots, n-3. \tag{3}$$

引理 1[5]. 若 $\varphi(\lambda) \in H[\lambda]$, 则 $\mu_i < 1$, $i = 0, \cdots, n-3$.

引理 2[3]. $\varphi(\lambda) \in H[\lambda]$, 若下述三个条件被同时满足:

1) $\mu_0 + \mu_1 < 1$;

2) $\mu_{n-4} + \mu_{n-3} < 1$;

3) $\mu_i + \mu_{i+1} + \mu_{i+2} - \mu_i\mu_{i+2} - 2\mu_i\mu_{i+1}\mu_{i+2} + \mu_i^2\mu_{i+1}\mu_{i+2} < 1$, $i = 0, 1, \cdots, n-5$.

上述两个引理,是本文研究问题的基础.

定理 1. 设 $\mu_0 + \mu_1 < 1$, $\mu_{n-4} + \mu_{n-3} < 1$, 则 $\varphi(\lambda) \in H[\lambda]$. 若

$$\mu_i \leqslant \frac{1-\omega_i}{1+\omega_i},\ i = 1, 2, \cdots, n-4. \tag{4-1}$$

式中

本文于 1985 年 10 月 14 日收到.

$$\omega_i = \min(\mu_{i-1}, \mu_{i+1}), \quad i = 1, 2, \cdots, n-4. \tag{4-2}$$

证明. 整理引理 2 的条件 3), 则为

$$\mu_i \frac{1-\mu_{i-1}\mu_{i+1}}{1-\mu_{i-1}} + \mu_{i+1}\frac{1-\mu_{i+1}}{1-\mu_{i-1}\mu_{i+1}} < 1. \tag{5}$$

容易验证, 这即是由 $a_{i-1}, a_i, \cdots, a_{i+4}$ 所组成的多项式为 Hurwitz 的必要条件. 设 $i = m$, 首先设 $\mu_{m-1} \geqslant \mu_{m+1}$, 则由引理 1, 即有 $1-\mu_{m+1}^2 \geqslant 1-\mu_{m-1}\mu_{m+1}$. 由此有 $1/(1+\mu_{m+1}) \leqslant (1-\mu_{m+1})/(1-\mu_{m-1}\mu_{m+1})$. 同时有, $\mu_m + \mu_{m+1} - \mu_{m-1}\mu_{m+1} < 1$. 此外, 注意到 $\varphi(\lambda) \in H[\lambda] \Longleftrightarrow \lambda^n\varphi(1/\lambda) \in H[\lambda]$, 则在 $\mu_{m-1} \leqslant \mu_{m+1}$ 时, 亦有结论 (4-1) 式成立. 考虑到 $i = m$ 的任意性, 则定理得证.

推论 1. 若

$$2\mu_i + \mu_{i+1} \leqslant 1, \text{ 或 } \mu_i + 2\mu_{i+1} \leqslant 1, \quad i = 0, 1, \cdots, n-4, \tag{6}$$

则 $\varphi(\lambda) \in H[\lambda]$.

例 1. 考察一 7 阶多项式为

$$\varphi_7(\lambda) = \lambda^7 + 6.4\lambda^6 + 5\lambda^5 + 16\lambda^4 + 5\lambda^3 + 9.6\lambda^2 + 0.45\lambda + 0.6912.$$

利用其参数易知, $\mu_0 = 0.8$, $\mu_1 = 0.15$, $\mu_2 = 0.6$, $\mu_3 = 0.4$, $\mu_4 = 0.5$. 显然, 运用以往的方法较难判别. 因为并不满足 $\mu_i \leqslant 0.4655$, 或 $\mu_i + \mu_{i+1} \leqslant 0.89$ (见文献[1—4]). 但运用定理 1, 可十分迅速地得出 $\varphi_7(\lambda) \in H[\lambda]$ 的结论.

从前述讨论知, $\varphi(\lambda)$ 的 Hurwitz 性质完全取决于其 $n-2$ 个判别系数. 故此, 给出相应的由 $\mu_i (i = 0, \cdots, n-3)$ 所决定的显式条件将有利于这方面的研究.

对于由 (1) 式定义的 $\varphi(\lambda)$, 我们对 Routh 方法中 Routh 表加以改造, 即假设其 Routh 表中第 k 行 ($k = 2, 3, \cdots, n$) 的第一列为 $a_{n-k}\Delta_{k,k}$, 第二列为 $a_{n-k-2}\Delta_{k,k+2}$, $\cdots\cdots$. 很显然, 这样定义 $\Delta_{k,i}$ 是合理的. 由于 $a_i > 0$, $i = 0, 1, \cdots, n-1$, 则是否有 $\varphi(\lambda) \in H[\lambda]$ 将完全取决于 $\Delta_{k,k}$ 之符号. 根据这一修改, 不难推得

$$\begin{aligned}
&\Delta_{2,2+2i} = 1 - \mu_{n-3}\mu_{n-5}\cdots\mu_{n-2i-3},\\
&\Delta_{3,3+2i} = 1 - \mu_{n-4}\mu_{n-6}\cdots\mu_{n-2i-4}\Delta_{2,2+2(i+1)}/\Delta_{2,2},\\
&\vdots\\
&\Delta_{k,k+2i} = \Delta_{k-2,k+2i} - \mu_{n-k-1}\cdots\mu_{n-k-2i-1}\cdot\Delta_{k-2,k-2}\Delta_{k-1,k+2i+1}/\Delta_{k-1,k-1}.
\end{aligned} \tag{7}$$

$$i = 0, 1, \cdots, \left[\frac{n+1}{2}\right] - \left[\frac{k}{2} - p_n\right],$$

$$k = 2, 3, \cdots, n,$$

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{当 } n \text{ 为奇数} \\ 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

这里, $[\cdot]$ 表示为不小于"$\cdot$"的最小整数.

按照由 (7) 式建立的递归公式, 将完全可以建立起 $\mu_i (i = 0, 1, \cdots, n-3)$ 与 Hurwitz 多项式之间的关系. 亦即说, 有如下与 Routh 判据相等价的结果:

定理 2. $\varphi(\lambda) \in H[\lambda]$, 当且仅当

$$\Delta_{k,k} > 0, \text{ 或 } \frac{\Delta_{k,k}\cdot\Delta_{k-1,k+1}}{\Delta_{k,k+2}\cdot\Delta_{k-1,k-1}} > \mu_{n-k-2}, \tag{8}$$

$$k = 2, 3, \cdots n, \ \Delta_{1,3}, \ \Delta_{1,1} = 1.$$

参 考 文 献

[1] 蒋卡林,稳定性方面"一些令人感兴趣而惊人的定理",信息与控制, **1**(1981),32—33.
[2] 蒋卡林,谢聂稳定依据,信息与控制, **1**(1983),34—38.
[3] 谢绪恺,线性系统稳定性的新判据,东北工学院学报基础理论专刊, **1**(1963),26—30.
[4] 聂义勇,多项式稳定性的一类新判据,力学, **2**(1976),110—116.
[5] 黄琳,系统与控制理论中的线性代数,科学出版社, 1984,621—648.

NEW RESULTS ON HURWITZ POLYNOMIALS

ZHANG HENG
(Institute of Automation, Academia Sinica)

ABSTRACT

This paper suggests a simple and mild scheme for Hurwitz property of an algebra polynomial. In addition, the criteria equivalent to that of Routh are developed.