第14卷 第4期 自 动 化 学 报 Vol. 14, No. 4
1988 年 7 月 ACTA AUTOMATICA SINICA July, 1988

广义系统的反馈控制与极点配置方法[1)]

王跃云 金钟骥 张钟俊
（上海交通大学）

摘 要

本文研究了广义系统的结构特性与反馈控制的关系，并导出了一种简便的广义系统极点配置方法.

一、引 言

考虑如下的线性定常广义系统模型

$$E\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}. \tag{1}$$

式中E和 $A\in R^{r\times r}$, $B\in R^{r\times m}$, E是奇异的. 假定 $\det(sE-A)\neq 0$，方程(1)的状态$\boldsymbol{x}(t)$ 具有唯一解. 记n为多项式 $\det(sE-A)$ 的阶次，以及 $\alpha=\operatorname{rank} E$. 作为广义系统的一个特征，系统(1)除含有$n$个指数模以外，还有 $\alpha-n$ 个脉冲模[1]. 由于在许多实际问题中，脉冲模有害无益. 因此，在控制广义系统时，有必要排除脉冲模.

在文献[2]提出的广义系统极点配置方法中，必须先按指数模部分和脉冲模部分，将系统(1)分成两个子系统

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_1 &= A_1\boldsymbol{x}_1 + B_1\boldsymbol{u}, \\ J\dot{\boldsymbol{x}}_2 &= \boldsymbol{x}_2 + B_2\boldsymbol{u}. \end{aligned} \tag{2}$$

式中 $\boldsymbol{x}_1\in R^n$; $\boldsymbol{x}_2\in R^{r-n}$; J是幂零矩阵. 然而，求分解式(2)，涉及到多次求矩阵的逆，求矩阵的特征值和特征向量[2]. 为了避免这类复杂的矩阵运算，本文从另一条途径，导出了一种简便的广义系统极点配置方法.

二、状态反馈与极点配置

广义系统的指数模和脉冲模分别是系统的有限和无限自然频率，它们决定了系统的动态特性. 如果通过状态反馈，能将这些有限和无限自然频率移到复平面上给定的点. 换言之，这些自然频率具有可控性，则可以改善系统的动态特性. 如果广义系统的指数模和脉冲模都是可控的，则称为强可控的. 一个强可控的广义系统必须满足如下的判据[1]:

判据. 系统(1)所有的指数模可控的充要条件为

$$\operatorname{rank}[sE-A\ \ B]=r，对任意有限的\ s。 \tag{3}$$

本文于1986年3月25日收到.
1) 国家教委科学基金资助课题.

再利用实数域上的列初等变换,将 $[sE-A\ B]$ 变为 $[sE_1-A_1\ A_2\ B]$, E_1 列满秩,则所有的脉冲模可控的充要条件为 $[E_1\ A_2\ B]$ 行满秩.

以下假定(1)式是强可控的. 因为 $\operatorname{rank} E=\alpha<r$, 对矩阵 E 进行初等变换, 将其变为

$$\mathrm{MEN}=\begin{bmatrix} I_\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{r\times r}, \text{ 其中 } M, N \text{非奇异}. \tag{4}$$

将 $\boldsymbol{x}=N\boldsymbol{z}$ 代入(1)式,并于方程(1)的两边左乘以M得到

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{z}}_1 &= A_{11}\boldsymbol{z}_1+A_{12}\boldsymbol{z}_2+B_1\boldsymbol{u}, \\ 0 &= A_{21}\boldsymbol{z}_1+A_{22}\boldsymbol{z}_2+B_2\boldsymbol{u}. \end{aligned} \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{z}_1\in R^\alpha$; $\boldsymbol{z}_2\in R^{r-\alpha}$. (5)式称为系统(1)的标准描述形式.

1. 无脉冲模系统的极点配置

在式(5)中,若 A_{22} 非奇异,系统(1)的广义特征多项式为

$$\begin{aligned} \det(sE-A) &= \phi\cdot\det\begin{bmatrix} sI-A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & -A_{22} \end{bmatrix} \\ &= \phi\det(-A_{22})\det(sI-A_{11}+A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}). \end{aligned} \tag{6}$$

式中ϕ为一常数. 显然 $\det(sE-A)$ 的阶次 $n=\alpha$, 因此系统(1)没有脉冲模. 继续于式(5)的两边左乘 $\begin{bmatrix} I & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}$ 得

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{z}}_1 &= A_0\boldsymbol{z}_1+B_0\boldsymbol{u}, \\ 0 &= A_{21}\boldsymbol{z}_1+A_{22}\boldsymbol{z}_2+B_2\boldsymbol{u}. \end{aligned} \tag{7}$$

式中 $A_0=A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$; $B_0=B_1-A_{12}A_{22}^{-1}B_2$. 由(1)式变换到(7)式,只经过了实数域上的初等变换,从而保持了系统的可控性[1].

另外,由于系统是强可控的,根据判据式(3)应该有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} sI-A_0 & 0 & B_0 \\ -A_{21} & -A_{22} & B_2 \end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} sI-A_0 & 0 & B_0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}=r. \tag{8}$$

式 (8) 表明正规子系统 (A_0, B_0) 是可控的. 于是存在反馈阵 $K_1\in R^{m\times\alpha}$, 并任意配置 $\sigma(A_0+B_0K_1)$. 将

$$\boldsymbol{u}=K_1\boldsymbol{z}_1, \tag{9}$$

代入(7)式有

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{z}}_1 &= (A_0+B_0K_1)\boldsymbol{z}_1, \\ 0 &= (A_{21}+B_2K_1)\boldsymbol{z}_1+A_{22}\boldsymbol{z}_2. \end{aligned} \tag{10}$$

同理,令 $K=[K_1\ 0]N^{-1}$,将 $\boldsymbol{u}=K\boldsymbol{x}$ 代入原系统(1), 得到闭环系统 $E\dot{\boldsymbol{x}}=(A+BK)\boldsymbol{x}$, 它的广义特征多项式为

$$\begin{aligned} \det(sE-A-BK) &= \phi\det\begin{bmatrix} sI-(A_0+B_0K_1) & 0 \\ -(A_{21}+B_2K_1) & -A_{22} \end{bmatrix} \\ &= \phi\cdot\det(-A_{22})\det(sI-A_0-B_0K_1). \end{aligned} \tag{11}$$

式中ϕ为常数. 因此闭环广义系统的极点等于 $\sigma(A_0+B_0K_1)$.

2. 含脉冲模系统的极点配置

在讨论含脉冲模广义系统的极点配置之前，首先介绍下面的一个引理.

引理 1. 设D和H分别为 $l\times l$, $l\times m$矩阵，D是奇异的. 若

$$\operatorname{rank}[D\ \ H]=l, \tag{12}$$

则存在一$m\times l$阵 F，使得 $\det(D+HF)\neq 0$.

证. 因为 $[D\ \ H]$ 行满秩，总可以从H中选出 p 个列向量，假定为 h_1, $h_2,\cdots h_p$, $p\leqslant m$，使得 h_1 与D的各列独立，h_2 与 $[D,h_1]$ 的各列独立，…依此类推，直到

$$\operatorname{rank}[D,h_1h_2\cdots h_p]=l$$

为止. 设G为初等变换阵，满足 $HG=[h_1h_2\cdots h_p]$. 类似地，找出p个$1\times l$行向量，构成$p\times l$阵T，使得 $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}D\\T\end{bmatrix}=l$. 取

$$F=GT, \tag{13}$$

则 $\det(D+HF)\neq 0$. 因为若 $\det(D+HF)=0$，存在一非零向量 q，使得

$$(D+HF)q=(D+HGT)q=0\ \text{或}\ Dq+[h_1h_2\cdots h_p]Tq=0. \tag{14}$$

因为 $h_1,h_2,\cdots h_p$ 相互独立，且与D的各列线性无关，若上式成立，只有

$$Dq=0,\ \ T_q=0.$$

这与 $\begin{bmatrix}D\\T\end{bmatrix}$ 列满秩相矛盾，故 $\det(D+HF)\neq 0$. 证毕.

引理 1 的证明过程给出了一种寻求F阵的具体方法. 现在重新考虑式(5)，但 A_{22} 是奇异的. 这时广义系统具有 $\alpha-n>0$ 个脉冲模，其中n为系统的指数模个数. 此外，由于系统是强可控的，运用脉冲模可控判据应有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}I & A_{12} & B_1\\ 0 & A_{22} & B_2\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}I & 0 & 0\\ 0 & A_{22} & B_2\end{bmatrix}=r. \tag{15}$$

式(15)表明 $[A_{22}\ \ B_2]$ 行满秩. 于是根据引理 1，存在矩阵 $K_2\in R^{m\times(r-\alpha)}$，使得

$$\det(A_{22}+B_2K_2)\neq 0.$$

同理，将状态反馈 $\boldsymbol{u}=K_2\boldsymbol{z}_2+\boldsymbol{v}$ 代入(5)式得

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{z}}_1&=A_{11}\boldsymbol{z}_1+\hat{A}_{12}\boldsymbol{z}_2+B_1\boldsymbol{v},\\ 0&=A_{21}\boldsymbol{z}_1+\hat{A}_{22}\boldsymbol{z}_2+B_2\boldsymbol{v}.\end{aligned} \tag{16}$$

式中 $\hat{A}_{12}=A_{12}+B_1K_2$, $\hat{A}_{22}=A_{22}+B_2K_2$, $\hat{A}_{22}$ 是非奇异的. 系统(16)的广义特征多项式为

$$\det\begin{bmatrix}sI-A_{11} & -\hat{A}_{12}\\ -A_{21} & -\hat{A}_{22}\end{bmatrix}=\det(-\hat{A}_{22})\det(sI-A_{11}+\hat{A}_{12}\hat{A}_{22}^{-1}A_{21}). \tag{17}$$

特征多项式的阶次为 α，因此该系统不具有脉冲模. 另外，由于状态反馈并不改变系统的可控性，系统(16)的指数模都是可控的. 到此为止，我们已将含脉冲模系统的极点配置问题，转变成无脉冲模系统的极点配置问题，该问题已在前面得到解决. 最后，我们把广义系统的极点配置方法总结归纳为：

1) 利用初等变换，求广义系统的标准型

$$(\mathrm{MEN},\ \mathrm{MAN},\ \mathrm{MB})=\left(\begin{bmatrix}I_\alpha & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}\right).$$

2）若 $\det A_{22}=0$，按引理 1 介绍的方法求得 K_2，使得 $\det(A_{22}+B_2K_2)\neq 0$；若 $\det A_{22}\neq 0$，取 $K_2=0$. 计算

$$\hat{A}_{12}=A_{12}+B_1K_2,\ \hat{A}_{22}=A_{22}+B_2K_2,\ A_0=A_{11}-\hat{A}_{12}\hat{A}_{22}^{-1}A_{21},\ B_0=B_1-\hat{A}_{12}\hat{A}_{22}^{-1}B_2.$$

3）按一般的极点配置方法计算 K_1，配置 $\sigma(A_0+B_0K_1)$ 至复平面上给定的点. 总的反馈增益阵 $K=[K_1\ K_2]N^{-1}$. 若记 $\sigma(E,A+BK)$ 为广义系统闭环极点所组成的集合，可以验证 $\sigma(E,A+BK)=\sigma(A_0+B_0K_1)$.

例. 给定一个强可控的广义系统

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\dot{x}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&1&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}u.$$

rank $E=2$，$\det(sE-A)$ 的阶次为 1. 该系统含有(2-1)个脉冲模. 又 $A_{22}=0$，按文中给出的极点配置步骤，取 $K_2=1$，然后算得

$$\hat{A}_{12}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\ \hat{A}_{22}=1,\ A_0=\begin{bmatrix}1&-1\\0&-1\end{bmatrix},\ B_0=\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}.$$

给定 $\{-1,-3\}$ 为期望的闭环极点，按状态空间的极点配置方法求得 $K_1=[-4\ \ 2]$，$\sigma(A_0+B_0K_1)=\{-1,-3\}$. 因此

$$K=[K_1\ K_2]=[-4\ \ 2\ \ 1].$$

经验证 $\det(sE-A-BK)=-(s+1)(s+3)$.

参 考 文 献

[1] Verghese, G. C., Lévy, B. C. and Kailath, T., A Generalized State-space for Singular Systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **26**(1981), 811—831.

[2] Cobb, D., Feedback and Pole Placement in Descriptor Variable Systems, *Int. J. Contr.*, **33**(1981), 1135—1146.

[3] Yip, E. L. and Sincovec, R. F., Solvability, Controllability and Observability of Continuous Descriptor Systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **26**(1981), 702—707.

FEEDBACK CONTROL AND POLE PLACEMENT IN GENERALIZED SYSTEMS

Wang Yueyun Jin Zhongji Zhang Zhongjun

(Shanghai Jiao Tong University)

Abstract

This paper studies the connection between the structural properties and feedback control of a generalized system. It does not decompose the system into exponential and impulsive mode parts as usual. By simple elementary operations, a standard form for the generalized system is obtained, which largely simplifies system analysis and design. Based upon the standard form, a pole placement method for the generalized system is derived.