

# 数据同步数字锁相环的分析

曾凤池

(中国科学院自动化研究所)

## 摘 要

一个数字信号可以用方波信号形式来表示,并利用富里哀级数分析,阐明数字信号与周期正弦信号之间的密切联系。在此基础上实现某些模拟电路的数字化电路设计。本文在实验和分析基础上设计数字同相正交锁相环(即数字考斯托斯环)就是一例。

当前技术发展形势下,数据传输起着越来越重要的作用。然而大量信息的传递,要求向更高码速率和更低误码率迈进,这就使得现在大量应用的异步传送方式转向同步传送。

众所周知,一般不归零二进制信码,在其码位频率上没有频谱分量,但带有同步信息。因此可以不必从发送端送来同步时基,而是从数据码中直接提取同步信息。这就是所谓码同步或比特同步技术,不少作者已在这方面做了大量工作<sup>[1-4]</sup>。本工作也属于这个范畴,所不同的是,本文从数字信号与连续(模拟)信号之间关系出发,利用模拟锁相环路原理,推导数字锁相方法,以此为基础设计出极其简单的数字锁相环路,完成从数字信息码中提取码位同步信号,以供同步传输电路使用。

一系列二进制数字信号码,可以被看成一个周期为该信码单位码元长度两倍的方波信号,且这个方波信号被一个  $M = \pm 1$  的调制系数所调制构成,这种调制关系可由下图看出。

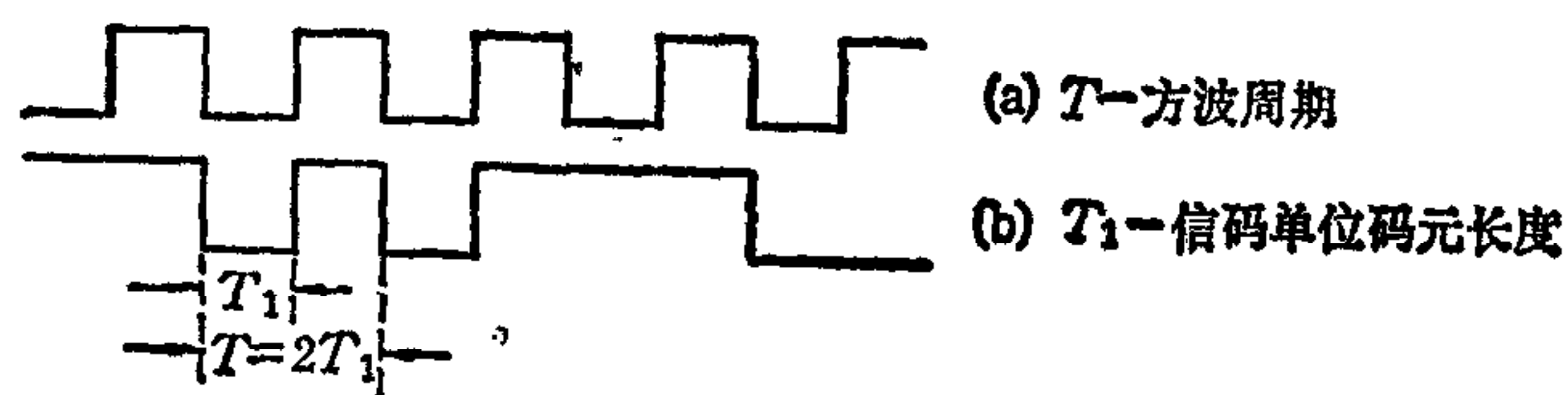


图1 二进制信码与方波信号之间的关系

当方波信号被规定为高电平为1,低电平为-1时,对后面计算会带来极大方便,因为此时一组二进制信号可以直接用下式表示:

$$F_1(t) = \frac{4}{\pi} \cdot M \cdot \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m} \sin m(\omega t + \theta_1), \quad (1)$$

$M$ ——调制系数,  $M = \pm 1$ ,

$m$ ——方波信号的谐波系数,  $m = 1, 3, 5 \dots$

上式表明, 一列二进制信号  $F_1(t)$  可以用一个方波信号与调制信号  $M$  的乘积来表示. 它与数字通信技术中的相移键控信号(即 PSK 信号)相比, 它们的形式极其相似, 这是因为 PSK 信号可以用下式表示:

$$f(t) = M_1 \sin(\omega t + \theta), \quad (2)$$

$M_1$ ——调制系数,  $M_1 = \pm 1$ .

显然, (1)与(2)式的差别在于, 前者被调制的是方波信号, 而后者为正弦信号. 据此可以设想用与 PSK 模拟锁相环路相似原理, 设计二进制信号的数字锁相环路, 提取码位同步信号. 此处, VCO 包括压控振荡器本身及  $90^\circ$  移相电路, 其输出信号为  $F_2(t)$  和移相  $90^\circ$  的信号  $F_2\left(t + \frac{T}{4}\right)$  两列相互正交的方波信号.

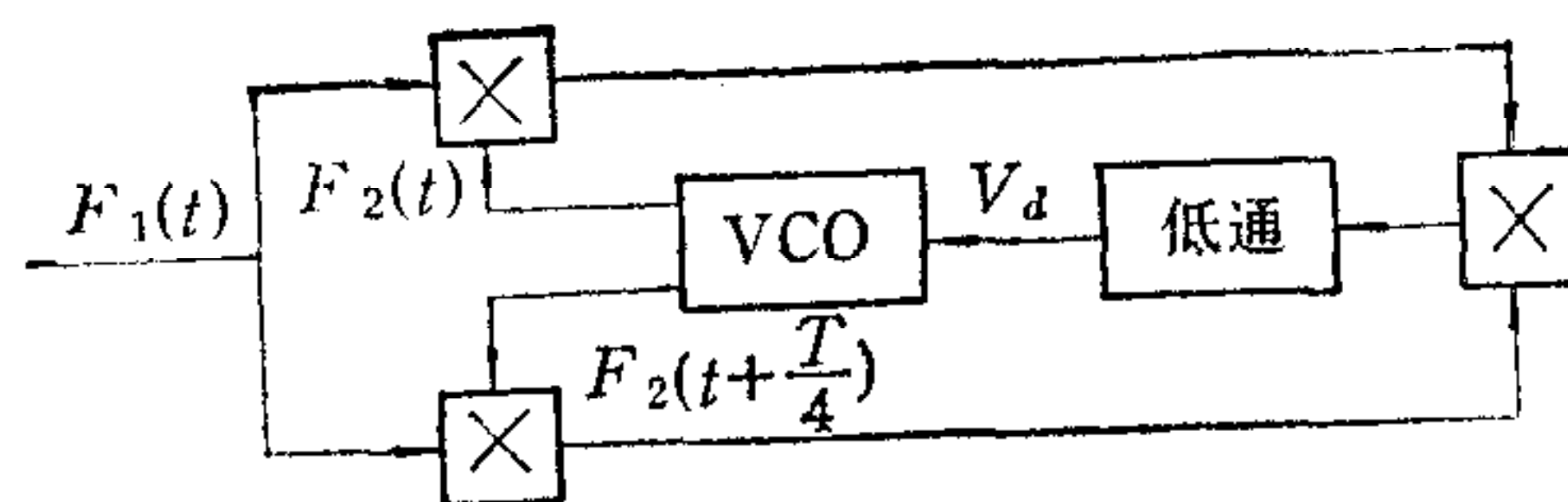


图2 设想的数字同相正交环

⊗——相乘环节, VCO——电压控制振荡器.

根据图2方案可以得出:

$$V_d = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(t) \cdot F_2(t) \cdot F_1(t) \cdot F_2\left(t + \frac{T}{4}\right) dt. \quad (3)$$

上式可改写为

$$V_d = \frac{1}{T} \int_0^T F_1^2(t) \cdot F_2(t) \cdot F_2\left(t + \frac{T}{4}\right) dt. \quad (4)$$

由于  $F_1(t)$  规定为被调制的方波信号高低电平分别为 1 和 -1, 于是

$$F_1^2(t) = 1.$$

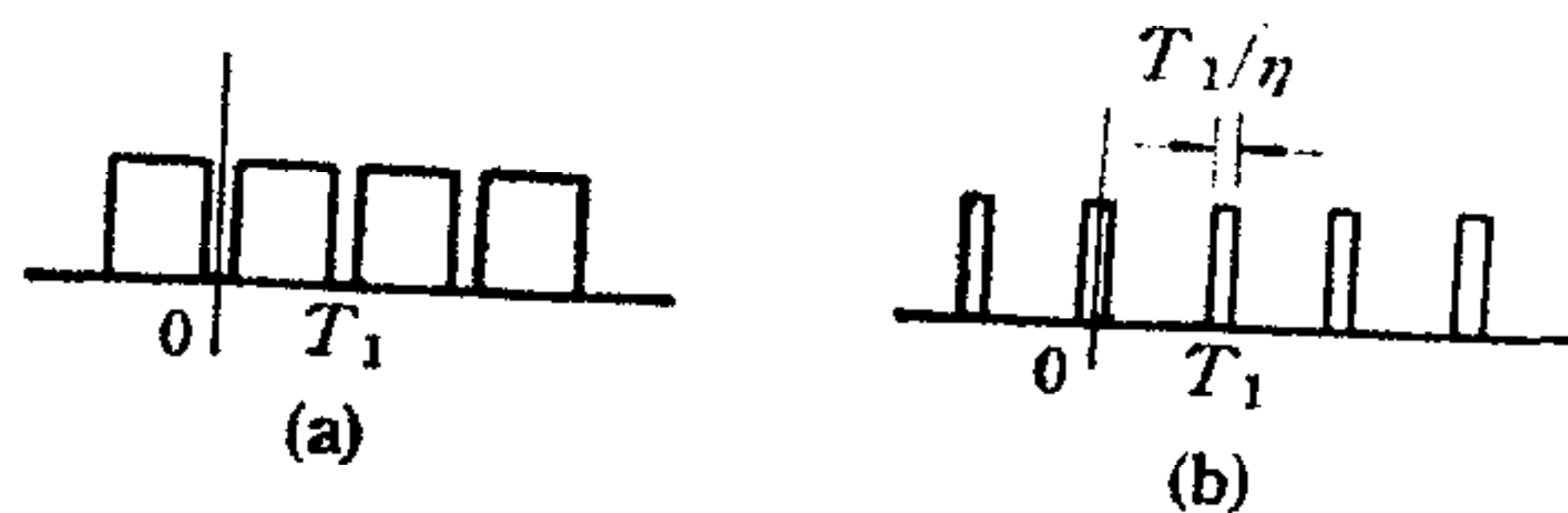
因此(4)式可写成

$$V_d = \frac{1}{T} \int_0^T F_2(t) \cdot F_2\left(t + \frac{T}{4}\right) dt. \quad (5)$$

(5)式中积分号内为两个相互正交的函数相乘, 因此  $V_d = 0$ . 这样, 不论何时,  $F_1(t)$  与  $F_2(t)$  之间的相互相位关系均无法确定. 由于这种简单处理方法是不可检测出相位误差电压信号, 也就不可能以它来实现相位锁定的目的. 既然  $V_d$  与  $F_1(t)$  和  $F_2(t)$  相互间相位无关, 也就无从利用它来调整  $F_1(t)$  和  $F_2(t)$  的相互相位关系. 问题的关键在于:  $F_1(t)$  经平方处理之后变成一个固定电平, 从而失去  $F_1(t)$  的相位参考点, 这一点曾通过实验加以证实.

参考对 PSK 信号的传统锁相方法之一——平方律锁相环中 PSK 平方处理后的波形, 假定  $F_1^2(t)$  的波形为图 3(a), 它是由“1”电平减去图 3(b) 得到. 此处,  $F_1(t)$  周期为  $T_1$ ,  $T_1$  等于二进制信码单位码元长度(见图 1).

图 3(b) 所示波形的富氏级数展开式为

图3  $F_1(t)$  的平方处理

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k \left( \frac{2\pi}{T_1} \right) t, \quad (6)$$

式中,

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos k \left( \frac{2\pi}{T_1} \right) t dt \\ &= \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} f(t) \cos k \left( \frac{4\pi}{T} \right) t dt. \end{aligned}$$

由于

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{T_1}{\eta} = \frac{T}{2\eta}, \\ 0, & \frac{T_1}{\eta} < t < \frac{T_1}{2} = \frac{T}{4}, \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{2\eta}} f(t) \cos k \left( \frac{4\pi}{T} \right) t dt \\ &= \frac{2}{\pi k} \sin \frac{4k\pi}{\eta}. \end{aligned}$$

上述计算中,考虑到  $T = 2T_1$ , 以统一于图(1)的方波周期,便于后面计算。

将(7)结果代入(6),并注意到  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , 则

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{4k\pi}{\eta} \cos k \left( \frac{4\pi}{T} \right) t, \quad (8)$$

亦就是

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{4k\pi}{\eta} \cos 2k\omega t. \quad (9)$$

按  $F_1^2(t)$  假定为“1”电平减去图 3(b) 波形的规定,于是得

$$\begin{aligned} F_1^2(t) &= 1 - f(t) \\ &= \left( 1 - \frac{a_0}{2} \right) - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{4k\pi}{\eta} \cos 2k\omega t. \end{aligned} \quad (10)$$

再研究压控振荡器 VCO 输出的两个相互正交方波信号,则有

$$F_2(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m} \sin m(\omega t + \theta_2). \quad (11)$$

按图 2 方案规定, VCO 输出的另一个方波信号必须严格滞后于  $F_2(t)$  四分之一周期, 故此处以  $F_2\left(t + \frac{T}{4}\right)$  表示, 且由于以同一函数组成的两个相互正交波形(此处为两个相互正交的方波信号)所对应的各次谐波均相互正交, 因此  $F_2\left(t + \frac{T}{4}\right)$  的各次谐波均滞后  $F_2(t)$  各次谐波四分之一周期, 即  $\frac{\pi}{2}$  或 90 度。于是,

$$\begin{aligned} F_2\left(t + \frac{T}{4}\right) &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \theta_2\right) \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n} \cos n\left(\omega t + \theta_2\right). \end{aligned} \quad (12)$$

研究(3)或(4)式中积分号内  $F_2(t)$  与  $F_2\left(t + \frac{T}{4}\right)$  的乘积。首先, 研究  $F_2(t)$  的某一项

$F_{2m}(t)$  和  $F_2\left(t + \frac{T}{4}\right)$  的某一项  $F_{2n}\left(t + \frac{T}{4}\right)$  相乘, 则

$$\begin{aligned} F_{2m}(t) \cdot F_{2n}\left(t + \frac{T}{4}\right) &= \frac{4^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{mn} \sin m(\omega t + \theta_2) \cdot \cos n(\omega t + \theta_2) \\ &= \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{mn} \{ \sin [(m+n)(\omega t + \theta_2)] - \sin [(m-n)(\omega t + \theta_2)] \}. \end{aligned} \quad (13)$$

注意到  $F_{2m}(t) \cdot F_{2n}\left(t + \frac{T}{4}\right)$  之中存在着  $\sin [(m-n)(\omega t + \theta_2)]$  一项, 同时也注意到两方波信号同样也存在对应的  $F_{2n}(t)$  和  $F_{2m}\left(t + \frac{T}{4}\right)$  项, 它们的乘积中自然存在着  $\sin [(n-m)(\omega t + \theta_2)]$  一项。由于

$$\frac{1}{mn} \sin [(m-n)(\omega t + \theta_2)] = -\frac{1}{mn} \sin [(n-m)(\omega t + \theta_2)],$$

显然, 在  $F_2(t)$  和  $F_2\left(t + \frac{T}{4}\right)$  各项乘积之和中, 自然消去了它们任一项乘积的后一项, 于是得

$$F_2(t) \cdot F_2\left(t + \frac{T}{4}\right) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{mn} \sin [(m+n)(\omega t + \theta_2)]. \quad (14)$$

在将  $F_1^2(t)$  和  $F_2(t) \cdot F_2\left(t + \frac{T}{4}\right)$  代入(4)式之前, 应考虑到按图 3(a) 计算的  $F_1^2(t)$ , 系从“0”电平到“1”电平推算, 而  $F_2(t)$  和  $F_2\left(t + \frac{T}{4}\right)$  则是上下对称, 且幅值为  $\pm 1$  的方波信号。与此对应, (10)式应加以改写, 在实际工作中是调整其幅值和直流分量完成。这样可得

$$F_1^2(t) = A - \frac{B}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{4k\pi}{\eta} \cos 2k(\omega t + \theta_1), \quad (15)$$

式中,  $A$ ——直流分量,  $B$ ——幅值系数,  $\theta_1$ ——瞬时相角。

将(14)、(15)代入(4)式, 得:

$$V_d = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ A - \frac{B}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{4k\pi}{\eta} \cos 2k(\omega t + \theta_1) \right] \cdot \left\{ \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{mn} \sin [(m+n)(\omega t + \theta_2)] \right\} dt. \quad (16)$$

(16)式中, 由于  $m+n \neq 0$ , 故

$$\int_0^T A \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{mn} \sin [(m+n)(\omega t + \theta_2)] dt = 0,$$

从而

$$\begin{aligned} V_d &= -\frac{1}{T} \int_0^T \frac{8B}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{4k\pi}{\eta} \cos 2k(\omega t + \theta_1) \\ &\quad \cdot \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \sin [(m+n)(\omega t + \theta_2)] dt \\ &= -\frac{4B}{T\pi^3} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{mnk} \sin \frac{4k\pi}{\eta} \int_0^T \{ \sin [(2k+m+n)\omega t \\ &\quad + 2k\theta_1 + (m+n)\theta_2] - \sin [(2k-m-n)\omega t + 2k\theta_1 \\ &\quad - (m+n)\theta_2] \} dt. \end{aligned}$$

上式中, 积分号内前一项正弦函数中  $2k+m+n \neq 0$ , 故该项积分后为零, 从而

$$\begin{aligned} V_d &= \frac{4B}{T\pi^3} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{mnk} \sin \frac{4k\pi}{\eta} \sin [(2k-m-n)\omega t \\ &\quad + 2k\theta_1 - (m+n)\theta_2] dt \\ &= \begin{cases} 0, & 2k \neq m+n \text{ 时;} \\ \frac{4B}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{mnk} \sin \frac{4k\pi}{\eta} \sin 2k(\theta_1 - \theta_2), & 2k = m+n \text{ 时.} \end{cases} \quad (17) \end{aligned}$$

这里先不管  $k$  与  $m$  和  $n$  之间相互关系, 于是,  $\sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{mn}$  是绝对收敛的. 再考虑到 (17) 式中必须满足  $2k = m+n$  条件时,  $V_d \neq 0$ , 显然在此条件下, (17) 式中系数  $\sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{mn}$  在  $2k \neq m+n$  时因  $V_d = 0$  而不起任何作用. 这些项应予排除, 自然这些项的系数应从 (17) 式系数数列中减除. 显然, 从这个绝对收敛的正分数之和的数列中减去其中某些项之后仍然是个绝对收敛的级数. 于是可以用

$$C = \frac{4B}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{mn}. \quad (18)$$

(18) 式中,  $m$  与  $n$  已考虑到  $2k = m+n$  的条件, 但为计算方便, 故未用另外的表达式. 于是 (17) 式可写为

$$\begin{aligned} V_d &= C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{4k\pi}{\eta} \sin 2k(\theta_1 - \theta_2) \\ &= C \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin 2k(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned} \quad (19)$$

式中,  $C$  已由(18)式规定, 而  $C_k$  由于代表  $k$  为某一定值时(即其中某项)其值固定, 故对某固定项而言也是常数, 即

$$C_k = \frac{1}{k} \sin \frac{4k\pi}{\eta} \quad (20)$$

由(19)式可以看出:  $V_d$  的变化仅与  $\theta_1$  和  $\theta_2$  的二倍差正弦值有关, 与时间无关。因此可以利用  $\theta_1$  和  $\theta_2$  之间的差值去控制 VCO 工作状态, 直至  $\theta_1 = \theta_2$  或  $\theta_1$  和  $\theta_2$  相差 180 度时,  $V_d = 0$ , VCO 不再受到控制, 相位处于锁定状态。

上述推导表明:

1) 采用福里哀级数对二进制数字信号处理分析方法, 可以用于某些从模拟电路原理出发进行的数字电路设计之中。它与一般采用 Z 变换或差分方程之类对离散信号处理方法而言, 不失又是一个途径。本文是它在对数字锁相电路的分析与设计方面应用的一例。该方法建立于连续信号与离散数字之间有机联系上, 在电路设计与理论分析方面均有一定价值。

2) 简单地采用图 2 原理框图是不能设计出数字传输系统中用于位同步技术的数字锁相环路的。这是因为  $F_2^2(t)$  的处理方法导致失去  $F_1(t)$  的相位参考点, 从而无法检测  $F_1(t)$  与  $F_2(t)$  之间的相位误差电压信号。按图 3(a) 设想波形推导  $F_2^2(t)$ , 只有在理想状态(例如, 信码始终为 0101... 时)存在。在实际电路设计中, 采用数字信号本身与该信号的延迟信号相乘的办法解决, 其延迟量即推导中的  $T_1/\eta$  值。这种方法, 在连续为“0”或连续为“1”时会失去一些相位参考点, 但这并不影响环路正常工作。因为在此种情况发生时, 相当于  $F^2(t) = 1$  时状态, 此时  $V_d = 0$ , VCO 工作状态维持不变, 系统工作于“记札”状态下。

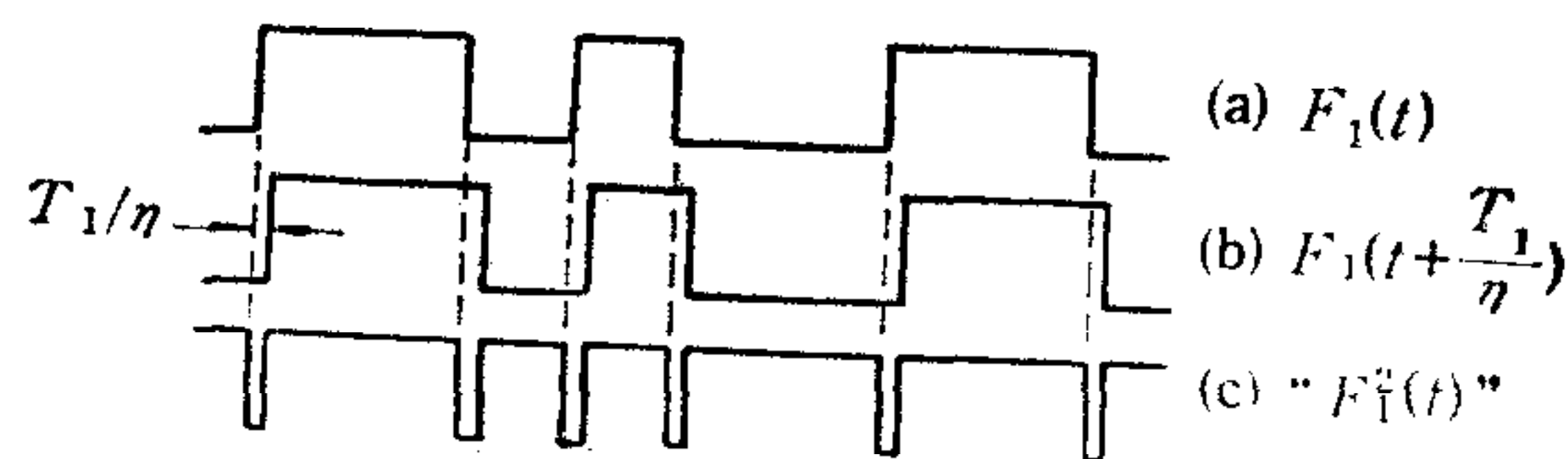


图 4 实际平方处理工作波形示意图

3) 根据数学表达式(3)或(4)及上条讨论中建议的平方处理法(图 4)表明可以用以下框图设计同相正交数字锁相环。图 5 中, (a)、(b) 两种方案均在实验中得以证实, 并将 (b) 方案用于实际工作中经过长期考验, (c) 方案在数字平方环实验中也得到证实。

以上三种设计方案均符合  $V_d = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(t) \cdot F_2(t) \cdot F_1(t) \cdot F_2\left(t + \frac{T}{4}\right) dt$  的要求。图 5 中,  $T_1/2$  即  $T/4$ ,  $\times$  表示相乘环节, VCO 为电压控制振荡器,  $\tau$  环节系  $F_1(t)$  平方处理所需, ( $\tau = T_1/\eta$ )。

由于整个推导过程是将单位码无长度作为方波信号(即 VCO 输出信号)的周期长度, 以此为根据推导出(19)式, 因而相位锁定必然在对应方波信号的 0 度或 180 度处实现。这就是同相正交环存在所谓的 180 度模糊问题, 因而 VCO 与输入数字信号之间,

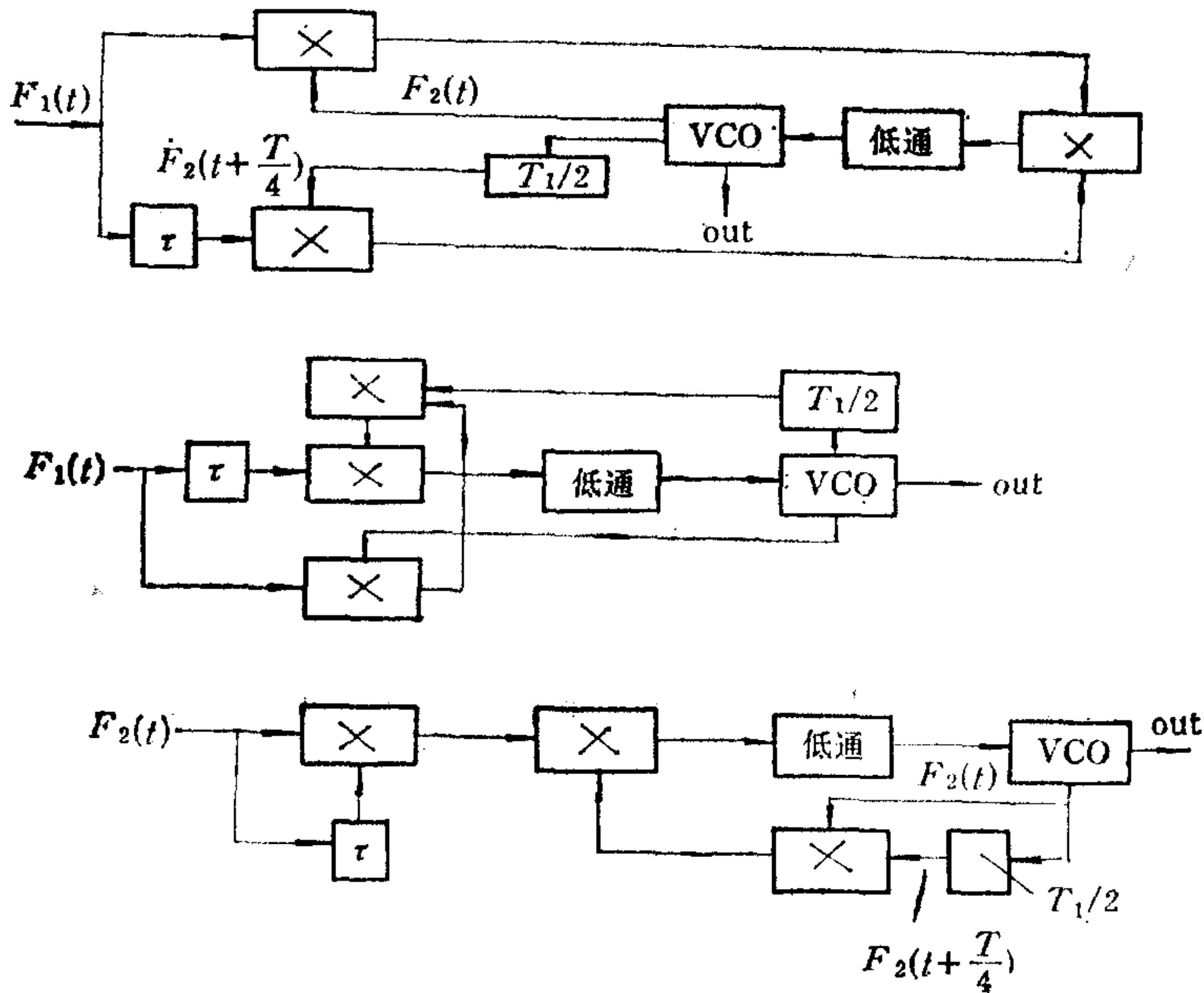


图5 同相正交数字锁相环的三种设计方案

在处于锁定状态时， $F_2(t)$  的前沿可能对应输入数字信号  $F_1(t)$  的前沿，有时又可能对应其码位的后沿。但由于  $T_1 = T/2$ ，所以数字信号的同步信号必然对应于  $F_2(t)$  的上升和下降沿处，这里不存在 180 度模糊问题。当然，数据码的同步信号的取得，没有必要再从  $F_2(t)$  的上升和下降沿另加电路提取。这是因为实际电路设计中采用四分频方法从 VCO 中取得  $F_2(t)$  和滞后它  $T/4$  的  $F_2(t + \frac{T}{4})$  两个信号，因而只需从这组分频电路的前级（即二分频）信号中取得码位同步信号。

上述全数字同步正交数字锁相环，系从实验基础上提出，而后进行了理论推导，又反过来以实验证实，最后以极简单电路完成实际电路设计。它具备可靠、低成本、易于集成化等优点，不失为一种较好的数字同步脉冲的提取办法。

本工作进行中得到毛绪瑾、汪蔚霄先生的指导和帮助，在此特向他们致谢。

### 参 考 文 献

- [1] Gupta S. C., Phase-Locked loop, *Proc. IEEE*, **63**(1975), 291.
- [2] Offereins R. P., A digital phase locked loop and its stability, *IEEE Trans.*, **IECI-21**, 1975, 401.
- [3] Halgren Ross C. et al., Improved acquisition in phaselocked loops with sawtooth phase detectors, *IEEE Trans.*, **COM-30**, 1982, 2364.
- [4] 樊昌信等，《通信原理》，国防工业出版社，1980, 351.

# THE ANALYSIS OF DIGITAL PHASE-LOCKED LOOP FOR DATA SYNCHRONIZATION

ZENG FENGCHI

*(Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences)*

## ABSTRACT

A digital signal may be expressed by the square wave. The mathematical analysis that makes use of Fourier Series is used to show the relationship between the digital signal and the sine wave signal. On the ground of this, the design for some digitizing analogue circuits has been implemented. For example, in the paper, the digitizing in-phase quadrature locked loop (i.e., digital Costas loop) has been designed on the basis of experiment and analysis.