第 14 卷 第 5 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 14, No. 5
1988 年 9 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Sept., 1988

具有逻辑切换的反馈控制系统的设计

冯纯伯　余星火
（南 京 工 学 院）

摘　要

本文讨论如何应用李亚普诺夫函数法设计可以改善动态性能的逻辑切换反馈控制. 所提出的方法既适用于线性定常系统，也适用于双线性系统.

一、引　言

变结构控制是一种逻辑切换控制，近年来引起了广泛的重视[1-4]. 对于这种控制目前研究得比较多的是如何实现滑动状态，在滑动状态工作情况下系统具有良好的特性[2]. 但为实现滑动状态也引起一些问题，例如会产生能引起麻烦的颤动 (Chattering)，为实现滑动状态要求全状态可测，等等. 为回避滑动状态，本文讨论如何应用 Lyapunov 函数法设计逻辑切换控制系统，所提出的方法可适用于线性及双线性系统.

二、线性系统的逻辑切换反馈控制

为简单计，在本文中只考虑单输入单输出系统. 设线性定常系统的方程如下:

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u,\\ y &= \boldsymbol{k}^T\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}\in \boldsymbol{R}^n,\ \boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^{n\times 1}.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

$\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}\}$ 能控，u 为输入，y 为输出，不影响一般性. 设(1)已化为能控标准型，此时设:

$$\boldsymbol{k}^T = (k_1, \cdots, k_i, 0, \cdots, 0),\tag{2}$$

对此系统取以下反馈控制:

$$u = -\varphi y,\tag{3}$$

$$\varphi = \mathrm{sign}(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{C}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}.\tag{4}$$

$\boldsymbol{C}$ 不一定满秩. 在以上反馈情况下有:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A} - \varphi\boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T)\boldsymbol{x}.\tag{5}$$

对此系统取 Lyapunov 函数:

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^T > 0.\tag{6}$$

按(5)所定的轨迹求 V 的导数，得:

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T[\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} - \varphi(\boldsymbol{k}\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T)]\boldsymbol{x}\tag{7}$$

本文于 1986 年 8 月 2 日收到.

$$= \dot{V}_0 + \dot{V}_c \tag{8}$$

其中，

$$\dot{V}_0 = \dot{V}_{01} + \dot{V}_{02}, \tag{9}$$

$$\dot{V}_{01} = \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}_1^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{x} \leqslant 0, \tag{10}$$

$$\dot{V}_{02} = \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}_2^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_2)\boldsymbol{x}, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2, \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_c &= -\varphi \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{k}\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T)\boldsymbol{x} \\ &= -|\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}| \leqslant 0,\end{aligned} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{k}\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T. \tag{14}$$

取 $\boldsymbol{A}_1$ 使(10)式成立，这样的 $\boldsymbol{A}_1$ 显然是存在的，而且可根据系统动态特性的需要来选择．若 $\boldsymbol{A}$ 稳定，显然可选 $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}$，这时 $\boldsymbol{P}$ 阵可按系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 来选择．在一般情况下只要能选择 $\boldsymbol{A}_2$ 和 $\boldsymbol{k}$ 使得

$$\begin{aligned}\dot{V}_c &= -|\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{k}\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T)\boldsymbol{x}| \\ &= -|\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}_2^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_2)\boldsymbol{x}| \leqslant 0, \quad \boldsymbol{Q}_2 = \boldsymbol{Q}_2^T \geqslant 0\end{aligned} \tag{15}$$

则有

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{V}_0 + \dot{V}_c \\ &= \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}_1^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}_2^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_2)\boldsymbol{x} \\ &\quad -|\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}_2^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_2)\boldsymbol{x}| \\ &\leqslant \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}_1^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{x}\end{aligned} \tag{16}$$

只要满足

$$\{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{x} = 0\}^{\perp} \cup \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}_1^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{x} = 0\}^{\perp} = \boldsymbol{R}^n, \tag{17}$$

则必有

$$\dot{V} < 0. \tag{18}$$

于是系统全局渐近稳定，即以下定理成立：

定理 1. 对于系统(1)，采用反馈控制(3)与(4)，若能选择合适的 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{P}$，使得(7)—(18)各式成立，则此系统全局渐近稳定．

证明：见文献[6]．

在以上的分析中，并未假设 $\boldsymbol{A}$ 是稳定的．为了扩大应用范围和更充分地改善系统的动态性能，不一定要求切换前后线性系统都稳定．对于不稳定系统，逻辑切换控制能够使之稳定，这是因为符号函数中含有全状态的信息．可以证明，如果利用线性输出反馈不足以使系统稳定，则利用这些输出状态组成二次流形，在此流形上进行这些输出状态的切换控制，也一定不能使系统稳定，即以下定理成立：

定理 2. 对于系统(1)，若线性输出反馈不能使之渐近稳定，则仅利用这些输出状态组成二次流形，在此流形上进行线性输出反馈的切换控制也不能使系统全局渐近稳定．

证明：设 $\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}\}$ 已化为能控标准形，取

$$\boldsymbol{k}^T = [k_1, \cdots, k_i, 0, \cdots, 0]. \tag{19}$$

设

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{b} = [d_1, \cdots, d_i, \cdots, d_n]^T, \tag{20}$$

取

$$C = [k_1, \cdots, k_i, 0, \cdots, 0]^T [d_1, \cdots, d_i, 0, \cdots, 0], \tag{21}$$

可是由(8)式得

$$\begin{aligned}\dot V &= \dot V_0 - 2\left|\left(\sum_{j=1}^{i} k_j x_j\right)\left(\sum_{j=1}^{i} d_j x_j\right)\right| \pm \left(\sum_{j=1}^{i} k_j x_j\right)\left(\sum_{l=i+1}^{n} d_l x_l\right) \\ &= \dot V_0 + \dot V_{c_1} + \dot V_{c_2},\end{aligned} \tag{22}$$

$$\dot V_{c_1} = -2\left|\left(\sum_{j=1}^{i} k_j x_j\right)\left(\sum_{j=1}^{i} d_j x_j\right)\right| \leqslant 0, \tag{23}$$

$$\dot V_{c_2} = \pm\left(\sum_{j=1}^{i} k_j x_j\right)\left(\sum_{l=i+1}^{n} d_l x_l\right). \tag{24}$$

若 $\left(\sum_{j=1}^{i} k_j x_j\right)\left(\sum_{j=1}^{i} d_j x_j\right)$ 为常号函数，则 φ 不变号，此时输出反馈不切换，前已说明这时系统不能稳定，对这种情况毋需讨论．设 $\left(\sum_{j=1}^{i} k_j x_j\right)\left(\sum_{j=1}^{i} d_j x_j\right)$ 为变号函数，则 φ 或 $+1$ 或 -1，$\dot V_{c_2}$ 或正或负．为保证系统渐近稳定，必须使 $\dot V < 0$，或者 $\dot V \leqslant 0$，且除原点外不包含系统轨迹．对于第一种情况，即 $\dot V < 0$，要求 $\dot V_0 + \dot V_{c_2} \leqslant 0$ 和 $\dot V_0 + \dot V_{c_1} + \dot V_{c_2} < 0$．今 $\boldsymbol{A}$ 为不稳定阵，不论 P 为何非负定阵，均不能使 $\dot V_0 \leqslant 0$．$\dot V_0$ 只可能或常正或变号．若 $\dot V_0$ 常正，现 $\dot V_{c_2}$ 为变号函数，故 $\dot V_0 + \dot V_{c_2}$ 不可能常负． 若 $\dot V_0$ 为变号函数，不失一般性可设它为一常负函数和另一变号函数之和，即使这部分变号函数和取某一符号的 $\dot V_{c_2}$ 可以相消，使 $\dot V_0 + \dot V_{c_2} \leqslant 0$，但当 $\dot V_{c_2}$ 采取另一符号时仍不能使 $\dot V_0 + \dot V_{c_2} \leqslant 0$，因为

$$\{\boldsymbol{x} | \dot V_0 = 0\}^{\perp} \cap \{\boldsymbol{x} | \dot V_{c_2} = 0\}^{\perp}$$

不仅仅只包含 $\boldsymbol{x} = 0$ 点．因此 $\dot V_0 + \dot V_{c_2}$ 仍为变号函数．以上分析表明，在 $\boldsymbol{A}$ 为不稳定的情况下，不管非负定阵 $\boldsymbol{P}$ 如何取法，均不可能使 $\dot V_0 + \dot V_{c_2} \leqslant 0$ 和 $\dot V < 0$．对于 $\dot V \leqslant 0$ 的情况分析是类似的．于是定理得证．

三、双线性系统的逻辑切换控制

以上对线性系统的逻辑切换控制也可应用于双线性系统．一般的双线性系统具有以下形式：

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + u\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}v, \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n, \quad \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}, \\ &y = \boldsymbol{k}^T\boldsymbol{x},\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

为简单计，只考虑输入量 u 和 v 是单变量的情况，y 为输出．对此系统可采用下列最简单的逻辑切换反馈控制：

$$u = -u_0\varphi_u, \quad u_0 = \text{const}, \tag{26}$$

$$v = -\varphi_v \boldsymbol{k}^T\boldsymbol{x}, \tag{27}$$

式中 φ_u 和 φ_v 分别表示输入 u 和 v 用的符号函数．这里 u 用的是继电切换公式，v 用的是线性输出状态反馈的逻辑切换，两者是不同的．采用上述反馈后系统变为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A} - u_0\varphi_u\boldsymbol{B} - \varphi_v\boldsymbol{g}\boldsymbol{k}^T)\boldsymbol{x}. \tag{28}$$

取 Lyapunov 函数为

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^T > 0, \tag{29}$$

其沿系统(28)轨迹的导数为

$$\dot{V} = \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} - \{\boldsymbol{x}^T[(u_0\varphi_u\boldsymbol{B}^T + \varphi_v\boldsymbol{k}\boldsymbol{g}^T)\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}(u_0\varphi_u\boldsymbol{B} + \varphi_v\boldsymbol{g}\boldsymbol{k}^T)]\boldsymbol{x}\}. \tag{30}$$

符号函数可有多种取法．若取

$$\varphi_u = \mathrm{Sign}\{\boldsymbol{x}^T(u_0\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P} + u_0\boldsymbol{P}\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}\}, \tag{31}$$

$$\varphi_v = \mathrm{Sign}\{\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{k}\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{g}\boldsymbol{k}^T)\boldsymbol{x}\}, \tag{32}$$

则

$$\dot{V} = \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} - |u_0\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}| - |\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{P}\boldsymbol{g}\boldsymbol{k}^T + \boldsymbol{k}\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}|; \tag{33}$$

若取

$$\varphi_u = \varphi_v = \mathrm{Sign}\{\boldsymbol{x}^T[(u_0\boldsymbol{B}^T + \boldsymbol{k}\boldsymbol{g}^T)\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}(u_0\boldsymbol{B} + \boldsymbol{g}\boldsymbol{k}^T)]\boldsymbol{x}\}, \tag{34}$$

则

$$\dot{V} = \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} - |\boldsymbol{x}^T[(u_0\boldsymbol{B}^T + \boldsymbol{k}\boldsymbol{g}^T)\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}(u_0\boldsymbol{B} + \boldsymbol{g}\boldsymbol{k}^T)]\boldsymbol{x}|. \tag{35}$$

(31)、(32)虽然和(34)不同，但都可用线性系统的逻辑切换控制的设计方法．

对于以上双线性系统在二次流形上的逻辑切换，定理 1 和 2 的结论显然也是成立的，因为已将它纳入与线性系统相同的框架之中了．

参考文献

[1] Стaрикова М. В., Исследование Автоматических Систем С Логическими Управляющими Лстройствами, *Машиностроение*, 1978.

[2] Уткин В. И., Скользящие Режимы и их Применение в Системах с Переменной Структурой, *Наука*, 1974.

[3] Itkis U., Control Systems of Variable Structure, Israel Univ. Press, 1976.

[4] Utkin V. I., Variable structure systems with sliding modes, *IEEE Tr.* Vol. AC-22, No. 2, 1977, 212—222.

[5] Мещанов А. С., Применение Метода Функций Ляпунова в Построениях Разрывных Управлений, Метод Функций Ляпунова в Динамике Нелинейных Систем, *Наука*, 1983, 102—109.

[6] Yu Xinghuo, Feng Chunbo, A Lyapunov-Function Approach for the Design of Variable-Structure Systems, IFAC 10th World Congress, Preprints Vol. 8, 348—352, Munich, 1987.

THE DESIGN OF FEEDBACK CONTROL SYSTEMS WITH LOGIC SWITCHING

Feng Chunbo　Yu Xinghuo

(Nanjing Institute of Technology)

Abstract

A Lyapunov function approach for the design of feedback control system with logic switching is presented. The design is applicable to both linear systems and bilinear systems.