

微分几何方法及其在化学反应器控制中的应用

黄曙馨

(武汉工业大学)

程代展

(中国科学院系统科学研究所)

摘 要

本文讨论化工中连续搅拌反应器模型的控制问题。利用微分几何的方法，得到了使这类模型完全线性化的反馈控制。计算机模拟结果显示了这种方法的稳定性。

一、引 言

化工反应中的许多模型都可以抽象为以下的仿射非线性系统的形式：

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i, & (1.1a) \\ y_j = h_j(x), \quad j = 1, 2, \dots, r. & (1.1b) \end{cases}$$

为便于考虑这类系统的控制问题，近年来，人们开始用微分几何方法考虑它的反馈线性化问题。在这方面讨论较多的是状态方程的反馈线性化，主要结果见文献 [1—4]。

本文考虑连续搅拌反应器模型的完全线性化问题。完全线性化指不但把状态方程线性化，而且输出方程也要线性化，严格定义如下：

定义 1.1 给定非线性系统(1.1)，如果存在一个局部反馈控制

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

(其中 $\alpha(x)$ 是 m 维 C^∞ 函数向量， $\beta(x)$ 为 $m \times m$ 可逆 C^∞ 函数矩阵。) 和一个局部微分同胚 $T: x \rightarrow z$ ，使得反馈系统

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z) + g(z)\alpha(z) + g(z)\beta(z)v \\ y = h(z) \end{cases} \quad (1.2)$$

(其中 $g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))$ ， $h(x) = (h_1(x), \dots, h_r(x))$ 。) 在局部坐标 z 下，成为一个完全能控线性系统

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bv \\ y = Cz, \end{cases} \quad (1.3)$$

则称系统 (1.1) 是可以局部完全线性化的。

限于篇幅, 这里只介绍单输入—单输出系统局部完全线性化的充要条件。完整的讨论可参见文献 [5, 6]。

设 $m = r = 1$, 令

$$i(x_0) = \min\{k \mid L_g L_f^k(h(x_0)) \neq 0\},$$

我们称 $i(x_0)$ 为系统在 x_0 点的特征数。

如果对任何 k , 由系统所生成的对偶分布

$$Q_k = S_p\{dL_g L_f^i(h(x)) \mid i \leq k\}, \quad k \geq 0,$$

在 x_0 的一个邻域上有定常维数, 则称 x_0 为系统的非奇异点。

下面是 $m = r = 1$ 时, 系统 (1.1) 可以完全线性化的充要条件。

定理 1.2 系统 (1.1) 在 x_0 点的一个邻域上可以完全线性化的充要条件是:

- 1) x_0 为系统的非奇异点, 并且, 系统在 x_0 点的特征数 $i(x_0) = i < \infty$,
- 2) n 个向量场 $g, ad_f g, \dots, ad_f^{i-1} g$ 在 x_0 点线性无关,
- 3) n 个向量场 $\tilde{g}, ad_f \tilde{g}, \dots, ad_f^{i-1} \tilde{g}$ 可交换 (即任意两个的李括号为 0), 这里

$$\tilde{f} = f + g\alpha, \quad \tilde{g} = g\beta, \quad (1.4)$$

$$\alpha = -(L_f^{i+1}h)(L_g L_f^i h)^{-1}, \quad \beta = (L_g L_f^i h)^{-1}.$$

至于线性化的算法, 可依下法进行^[6]: 令 $\phi_i^{x_i}(x_0)$ 为向量场 X_i 的以 x_0 点为初值的积分曲线。作一个从 R^n 的 0 点邻域到 x_0 点邻域的一个局部同胚映射如下:

$$F(z_1, z_2, \dots, z_n) = \phi_{z_1}^{x_1} \circ \phi_{z_2}^{x_2} \circ \dots \circ \phi_{z_n}^{x_n}(x_0).$$

那么, 依 (1.4) 的 α, β 所作成的反馈系统 (1.2), 在 F^{-1} 所定义的 z 坐标下, 经简单平移, 即可得到线性系统。

二、反应器模型的线性相关

本文讨论的一类连续搅拌池反应器模型, 曾在若干文献中讨论过, 如见文献 [7] 等。笔者在运用微分几何控制理论讨论上述反应器控制时, 发现了模型的线性相关性。讨论其线性独立部分, 得到了使之完全线性化的反馈控制。这种方法与文献 [7] 中所介绍的算子方法相比, 不但简便易行, 而且控制误差小。

下面, 首先给出反应器的原始模型^[7]。

1) 反应物平衡方程式:

$$\frac{dA_0}{dt} = \frac{1}{\tau} (A_i - A_0) - K_1 A_0 + K_{-1} R_0. \quad (2.1)$$

2) 生成物(产品)平衡方程式:

$$\frac{dR_0}{dt} = \frac{1}{\tau} (R_i - R_0) + K_1 A_0 - K_{-1} R_0. \quad (2.2)$$

3) 能量平衡方程式:

$$\frac{dT_0}{dt} = \frac{-\Delta H_R}{\rho C_p} (K_1 A_0 - K_{-1} R_0) + \frac{1}{\tau} (T_i - T_0). \quad (2.3)$$

其中, $K_1 = c_1 \exp(-Q_1/RT_0)$, $K_{-1} = c_{-1} \exp(-Q_{-1}/RT_0)$, A_i 为反应物输入, A_0 为反应物输出, R_i 为产品输入, R_0 为产品输出, T_i 为入口温度, T_0 为出口温度, 反应作用如图 1 所示.

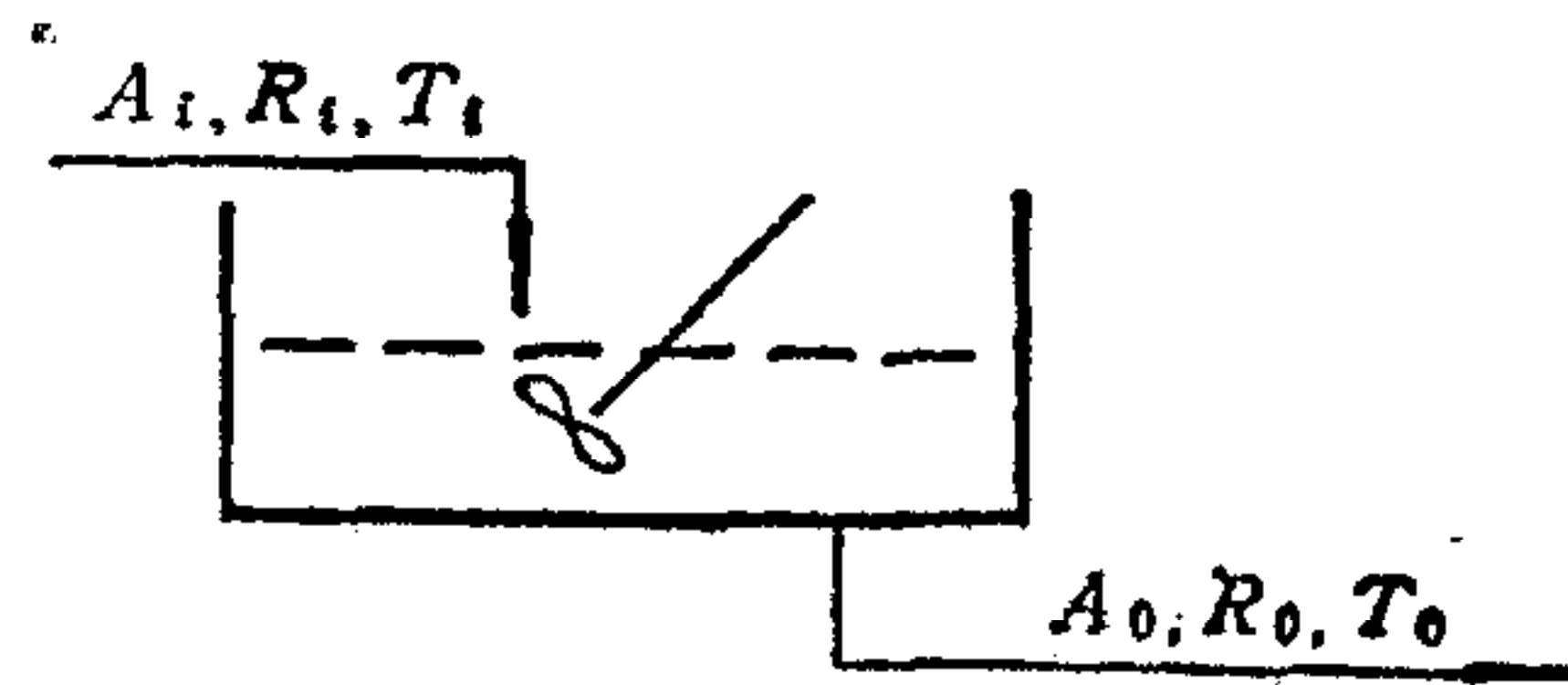


图 1 $A \rightleftharpoons R$ 反应器

为了便于讨论,把方程式化为标准形式. 设状态变量: $x_1 = T_0$, $x_2 = R_0$, $x_3 = A_0$; 控制变量: $u = T_i$; 参数: $a = \frac{\Delta H_R}{\rho c_p}$, $b = \frac{1}{\tau}$, $W = \frac{1}{\tau} A_i$, $L = \frac{1}{\tau} R_i$, $\theta = \frac{Q}{R}$, $\delta = \frac{Q_{-1}}{R}$. 替换后,系统可表示为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -bx_1 + ac_{-1}e^{-\frac{\delta}{x_1}x_2} - ac_1e^{-\frac{\theta}{x_1}x_3} + bu_1, \\ \dot{x}_2 = -(b + c_{-1}e^{-\frac{\delta}{x_1}})x_2 + c_1e^{-\frac{\theta}{x_1}x_3} + L, \\ \dot{x}_3 = c_{-1}e^{-\frac{\delta}{x_1}x_2} - (c_1e^{-\frac{\theta}{x_1}} + b)x_3 + W, \end{cases} \quad (2.4)$$

或者写成标准形式:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u, \\ y = x_2 \triangleq h(x). \end{cases} \quad (2.5)$$

其中,

$$f(x) = \begin{bmatrix} -bx_1 + ac_{-1}e^{-\frac{\delta}{x_1}x_2} - ac_1e^{-\frac{\theta}{x_1}x_3} \\ -(b + c_{-1}e^{-\frac{\delta}{x_1}})x_2 + c_1e^{-\frac{\theta}{x_1}x_3} + L \\ c_{-1}e^{-\frac{\delta}{x_1}x_2} - (c_1e^{-\frac{\theta}{x_1}} + b)x_3 + W \end{bmatrix},$$

$$g(x) = (b, 0, 0)^t.$$

设 M 为一个三维光滑拓扑流形

$$M = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0\}. \quad (2.6)$$

根据反应器实际运行条件可知,系统定义于 M 上. 现在, $f(x), g(x) \in V(M)$, ($V(M)$ 为 M 上的 C^∞ 向量场集合.) $h(x): M \rightarrow \mathbf{R}^1$ 为一 C^∞ 映射.

为了进行线性化工作,先要检验 $g, ad_f g, ad_f^2 g$ 的线性相关性,为此计算:

$$\begin{aligned} ad_f g &= \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g \\ &= \begin{bmatrix} b^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \left(-bc_{-1} \frac{\delta}{x_1^2} e^{-\frac{\delta}{x_1}x_2} + bc_1 \frac{\theta}{x_1^2} e^{-\frac{\theta}{x_1}x_3} \right) \begin{bmatrix} a \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$ad_f^2 g = \begin{bmatrix} b^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r(x) \begin{bmatrix} a \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

这里,系数 $r(x)$ 为

$$\begin{aligned} r(x) = & b e^{-\frac{\delta}{x_1}} \left(-bc_{-1} \frac{\delta x_2}{x_1^2} + bc_{-1} \frac{\delta^2}{x_1^3} x_2 - Lc_{-1} \frac{\delta}{x_1^2} \right. \\ & \left. + 2ac_{-1} \frac{\delta}{x_1^3} x_2 - ac_{-1} \frac{\delta^2}{x_1^4} x_2 - ac_{-1} \frac{\delta}{x_1^2} x_2 + ac_{-1} \frac{\delta}{x_1^2} + ac_{-1} \right) \\ & + b e^{-\frac{\theta}{x_1}} \left(bc_1 \frac{\theta}{x_1^2} x_3 - bc_1 \frac{\theta^2}{x_1^3} x_3 + Wc_1 \frac{\theta}{x_1^2} - 2ac_1 \frac{\theta}{x_1^3} x_3 \right. \\ & \left. + ac_1 \frac{\theta}{x_1^4} x_3 + ac_1 \frac{\theta}{x_1^2} x_3 + c_1 \frac{\theta}{x_1^2} + c_1 \right). \end{aligned}$$

容易看出, $g, ad_f g, ad_f^2 g$ 是线性相关的, 这启发我们去考虑系统的线性相关性. 进一步讨论发现, 该反应器在实际运行时处于 $A_i + R_i = 1$ 及 $A_0 + R_0 = 1$ 的限制下. 因此, 原有模型是线性相关的. 经修正后可以得到以下的独立状态模型:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -bx_1 + ac_{-1} e^{-\frac{\delta}{x_1}} x_2 - ac_1 e^{-\frac{\theta}{x_1}} (1 - x_2) + bu, \\ \dot{x}_2 = -(b + c_{-1} e^{-\frac{\delta}{x_1}}) x_2 + c_1 e^{-\frac{\theta}{x_1}} (1 - x_2) + L, \\ y = x_2. \end{cases} \quad (2.7)$$

三、系统的反馈完全线性化控制

把独立状态模型(2.7)写成标准形式:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u, \\ y = h(x). \end{cases} \quad (3.1)$$

下面计算系统的特征数及反馈律等. 为方便计, 令 $f(x) = (f_1(x), f_2(x))'$, 于是有:

$$\begin{aligned} L_g h &= \langle dh, g \rangle = \left\langle \left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1}, \frac{\partial x_2}{\partial x_2} \right), \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0, \\ L_f h &= \langle dh, f \rangle = f_2(x), \\ L_g L_f h &= \langle dL_f h, g \rangle = b \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ &= -bc_{-1} \left(\frac{\delta}{x_1^2} \right) e^{-\frac{\delta}{x_1}} x_2 - bc_1 \left(\frac{\theta}{x_1^2} \right) e^{-\frac{\theta}{x_1}} (1 - x_2). \end{aligned} \quad (3.2)$$

在实际运行的反应器状态下, 上式不为 0. 因此, 系统的特征数 $\iota = 1$. 同样可以算出:

$$\begin{aligned} L_f^2 h &= (-bx_1 + ac_{-1} e^{-\frac{\delta}{x_1}} x_2 - ac_1 e^{-\frac{\theta}{x_1}} (1 - x_2)) \\ &\times \left(2bc_{-1} \left(\frac{\delta}{x_1^3} \right) e^{-\frac{\delta}{x_1}} x_2 - bc_{-1} \left(\frac{\delta}{x_1^4} \right) e^{-\frac{\delta}{x_1}} x_2 + 2bc_{-1} \left(\frac{\theta}{x_1^3} \right) e^{-\frac{\theta}{x_1}} (1 - x_2) \right. \\ &\left. - bc_1 \left(\frac{\theta}{x_1^2} \right) e^{-\frac{\theta}{x_1}} (1 - x_2) \right) + \left(-(b + c_{-1} e^{-\frac{\delta}{x_1}}) x_2 + c_1 e^{-\frac{\theta}{x_1}} (1 - x_2) \right) \end{aligned}$$

$$+ L) \cdot (- (b + c_{-1} e^{-\frac{\delta}{x_1}}) - c_1 e^{-\frac{\theta}{x_1}}). \quad (3.3)$$

利用(3.2)及(3.3)式,可构造反馈

$$\begin{cases} \alpha = -(L_f^2 h)(L_g L_f h)^{-1}, \\ \beta = (L_g L_f h)^{-1}. \end{cases} \quad (3.4)$$

然后,可以检验,定理 1.2 的条件满足. 这里略去了冗长而机械的检验计算.

因为一般的线性化算法十分麻烦,对于本文涉及的一类特殊系统,笔者给出如下的简便算法.

定理 3.1 如果 x_0 点是系统(3.1)的非奇异点,且系统在 x_0 点的特征数 $\iota(x_0) = n - 1$, (这里 n 是系统的状态维数.)那么,系统(3.1)在 x_0 点邻域可以完全线性化.

证明: 因为 x_0 是非奇异点,那么,存在 x_0 的一个邻域 U ,使得在 U 上满足

$$\iota(x) = n - 1, \quad x \in U. \quad (3.5)$$

现首先证明 $dh, dL_f h, \dots, dL_f^{n-1} h$ 为 U 上的 $n - 1$ 个线性无关的微分一型. 反设在某一点 $\bar{x} \in U$, 它们线性相关,即存在 $r_i \in \mathbf{R}^1, i = 1, 2, \dots, n$, 不全为 0, 使得

$$\sum_{i=1}^n r_i dL_f^{i-1} h(\bar{x}) = 0.$$

$$\text{作微分一型 } \omega = \sum_{i=1}^n r_i dL_f^{i-1} h(x),$$

由(3.5)式可知

$$\langle \omega, g \rangle|_{\bar{x}} = r_n L_g L_f^{n-1} h(\bar{x}) = 0.$$

但 $L_g L_f^{n-1} h(\bar{x}) \neq 0$, 故 $r_n = 0$. 再作

$$\langle L_f \omega, g \rangle|_{\bar{x}} = r_{n-1} L_g L_f^{n-1} h(\bar{x}) = 0,$$

可知 $r_{n-1} = 0$. 依此类推,可知 $r_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$, 结果矛盾. 因此,上述 n 个微分一型线性无关.

由于 $dL_f^k h (k = 1, 2, \dots, n)$ 的线性无关性,可以定义映射

$$Z: z_i = L_f^{i-1} h(x), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

为 x_0 邻域的一个局部坐标. 在这个坐标下向量场 f, g 有如下表现形式:

$$Z_*(f) = J_z \cdot f \circ Z^{-1} = \begin{bmatrix} dh \\ dL_f h \\ \vdots \\ dL_f^{n-1} h \end{bmatrix} \cdot f \circ Z^{-1} = \begin{bmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ L_f^n h \circ Z^{-1} \end{bmatrix},$$

$$Z_*(g) = J_z \cdot g \circ Z^{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ L_g L_f^{n-1} h \circ Z^{-1} \end{bmatrix}.$$

这里, J_z 是 Z 的 Jacobian 矩阵. 输出为

$$(Z^{-1})^* h = h \circ Z^{-1} = z_1.$$

现在,只要取

$$\beta = ((Z^{-1})^* L_g L_f^{n-1} h)^{-1} = (L_g L_f^{n-1} h \circ Z^{-1})^{-1},$$

$$\begin{aligned}\alpha &= -((Z^{-1})^*L_f^*h) \cdot ((Z^{-1})^*L_gL_f^{*-1}h)^{-1} \\ &= -(L_f^*h \circ Z^{-1}) \cdot (L_gL_f^{*-1}h \circ Z^{-1})^{-1},\end{aligned}$$

则得到一个完全能控的线性系统

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y = (1 \ 0 \ \cdots \ 0)z, \end{cases} \quad (3.6)$$

利用定理 3.1, 对系统 (2.7), 构造局部坐标

$$Z: \begin{cases} z_1 = h = x_2, \\ z_2 = L_f h = -(b + c_{-1}e^{-\frac{\theta}{x_1}})x_2 + c_1e^{-\frac{\theta}{x_1}}(1 - x_2) + L \end{cases}$$

及反馈控制

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v,$$

(这里, $\alpha(x)$ 及 $\beta(x)$ 由 (3.2) — (3.4) 式给出。) 即可得到线性系统

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = v, \\ y = z_1 (=A_0). \end{cases}$$

线性化后的闭环反馈系统如图 2 所示。

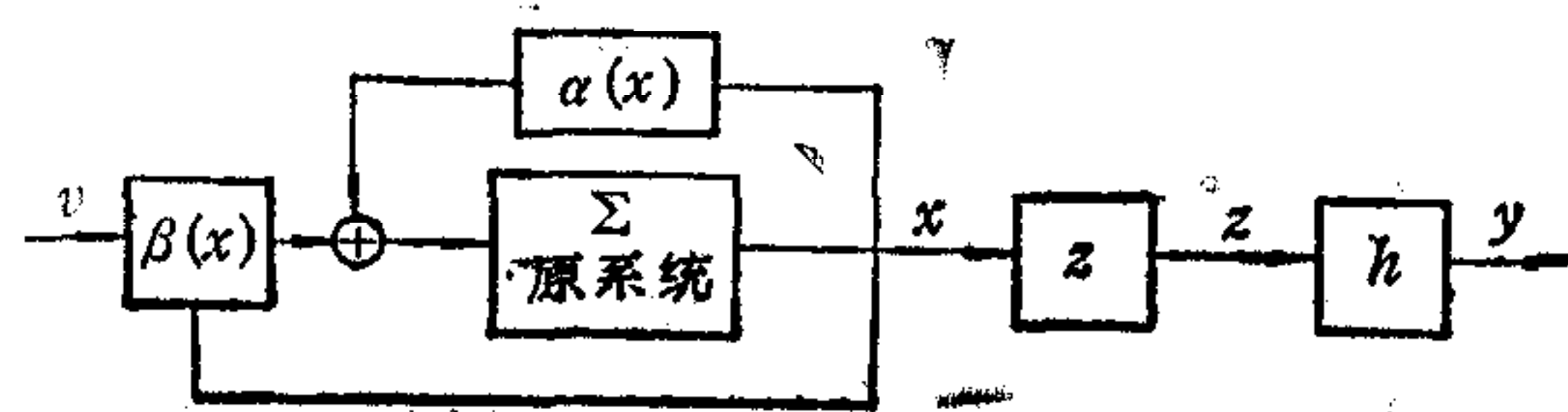


图 2 反应器的线性化控制

四、模拟实验结果

下面介绍用计算机对上述原始非线性系统非线性反馈控制下的模拟实验的结果。反应器系统的模型参数见表 1, 它是反应器的实际工作参数。

表 1 系统参数

$\tau = 60s,$	$R = 1.987\text{cal}(\text{mol})^{-1}\text{K}^{-1},$
$c_1 = 5 \times 10^3\text{s}^{-1},$	$c_{-1} = 1 \times 10^6\text{s}^{-1},$
$Q_1 = 1 \times 10^4\text{cal}(\text{mol})^{-1},$	$Q_{-1} = 1.5 \times 10^3\text{cal}(\text{mol})^{-1},$
$-\Delta H_R = 5 \times 10^3\text{cal}(\text{mol})^{-1},$	$x_{\text{opt}} = 0.5085,$
$T_{\text{opt}} = 434\text{K},$	$\rho = 1\text{kg/l}.$
$c_p = 1000\text{cal}(\text{kg})^{-1}\text{K}^{-1},$	

图 3 表示反馈控制系统中, 温度对阶跃输入的反应。因为简化的反馈系统实质是二阶线性系统, 所以便于控制, 并且反应是平滑的。

在实际应用中,系统的鲁棒性是很重要的。因此要考虑系统的参数与实际值有偏离时,线性关系是否还保持不变。

表 2 是七组试验值:(1)是参数无误差时的情况,(2)~(7)为某一参数有 -10% 误差时的情况,表中项目 E 列出该偏差参数。 v 表示控制输入, R_0 是输出变量,

$$K_p = \Delta R_0 / \Delta v$$

反映了输入-输出的线性相关性。

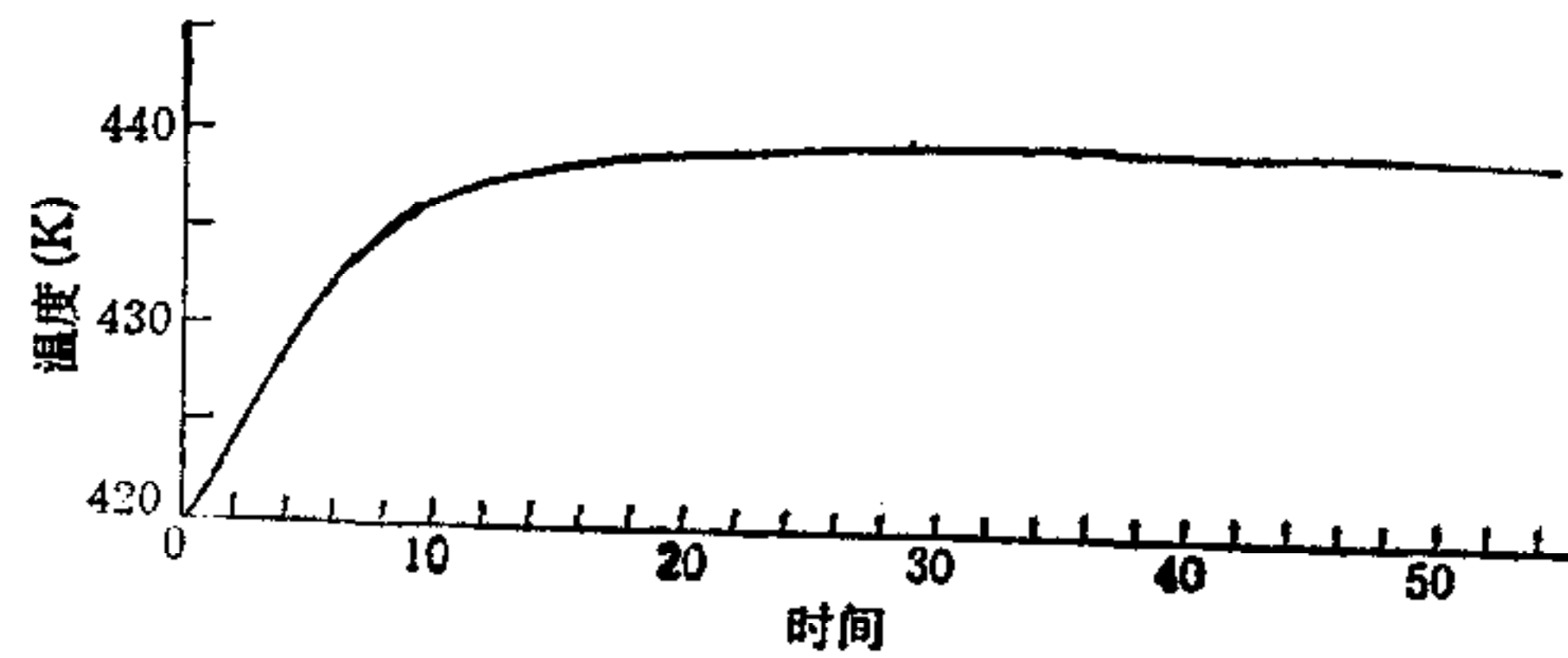


图 3 温度响应

由表 2 可以看出,控制的效果是令人满意的。

表 2 模拟结果

	E	v	425	426	427	428	429
1	—	R_0	425	426	427	428	429
		K_p	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
2	c_{-1}	R_0	424.277	425.002	425.754	426.482	427.211
		K_p	0.775	0.752	0.728	0.729	0.729
3	c_1	R_0	424.604	425.786	426.972	428.157	429.338
		K_p	1.182	1.186	1.185	1.181	1.181
4	a	R_0	424.995	425.886	426.778	427.676	428.573
		K_p	0.891	0.892	0.898	0.897	0.897
5	b	R_0	425.179	426.171	427.162	428.154	429.146
		K_p	0.992	0.991	0.992	0.992	0.992
6	δ	R_0	424.997	425.998	427.000	428.001	429.000
		K_p	1.001	1.002	1.001	0.999	0.999
7	θ	R_0	424.994	426.000	427.006	428.011	429.016
		K_p	1.006	1.006	1.005	1.005	1.005

五、结束语

反应器控制使用微分几何方法的初步成功,为过程控制的计算机方法开辟了一条新的道路。本文的工作现在还在继续。由于计算机的普及和应用,用几何方法讨论实际工程系统的控制成为一个十分吸引人的新方向。当然,目前它还处于初期阶段,许多问题还有待进一步讨论。

参 考 文 献

- [1] Jakubczyk, B. and Respondek, On linearization of control systems, *Bull. Acad. Polonaise, Sci. Ser. Sci. Math.* 28, 1980.
- [2] Su, R., On the linear equivalents of nonlinear systems, *Sys. Contr. Lett.* 2, 1982.
- [3] Hunt, L. R., Su, R. and Meyer, G., Multi-input nonlinear systems, *Diff. Geometr. Contr. Conf.*, Birkhauser, Boston, Cambridge, Mass, 1982.
- [4] Cheng, D., Tarn, T. J. and Isidori, A., Global linearization of nonlinear systems via feedback, *IEEE Trans. Aut. Contr.* AC-30, 8, 1985.
- [5] Cheng, D., On linearization and decoupling problems of nonlinear systems, D. Sc. Dissertation, Washington Univ. St. Louis, 1985.
- [6] Cheng, D., Isidori, A., Respondek, W. and Tarn, T. J., On state and output linearizations of nonlinear systems, Submitted for publication.
- [7] Economou, C. G., Morari, M. and Palsson, B. O., Operator control theory and a new class of nonlinear controllers, AICHE Annual Mtg., San Francisco, 1984.

DIFFERENTIAL GEOMETRIC METHOD AND ITS APPLICATION IN CHEMICAL REACTOR CONTROL

HUANG SHUQING

(Wuhan Industrial University)

CHENG DAIZHAN

(Institute of Systems Science, Academia Sinica)

ABSTRACT

The paper deals with the control problem of the continuous stirring reactor model. Using the method of Differential Geometry, a feedback control which makes the feedback system completely linearized is obtained. Computer simulation by this method presents stable property.