

物料平衡基本模型及其参数估计

童世璜

(中国科学院自动化研究所)

摘要

本文通过一些工业基本实例及其有实际意义的平衡解, 阐述参数估计技术在物料投入产出平衡中的应用. 其特点是在应用递推估计算法时, 增加一个约束条件, 即保证累计产出与累计投入始终平衡. 实例还表明, 约束递推法使被估参数迅速地接近最小二乘法的估值.

一、参数估计任务

石化企业的生产系统由若干生产单元通过管网的连接而构成. 图1中的 I—III 代表生产单元, 单元图左侧为原料投入端, 右侧为产品产出端. 设 $i^{\#}$ 单元有 m_i 种中间产品, 产量以日为时间核算单位, $x_{ij}(k)$ 代表 $i^{\#}$ 单元 $j^{\#}$ 产品第 k 天的日产量, 即单元向计划部门上报的“报量”. 计划部门汇总并进行物料平衡后, 以平衡量

$$cx_{ij} = c_{ij}x_{ij}$$

代替 x_{ij} 上报给主管厂长, c_{ij} 为平衡系数. 贮存部门也要上报日收量. 因此, 同为日产量, 有报量、收量和平衡量之差, 其值也不同.

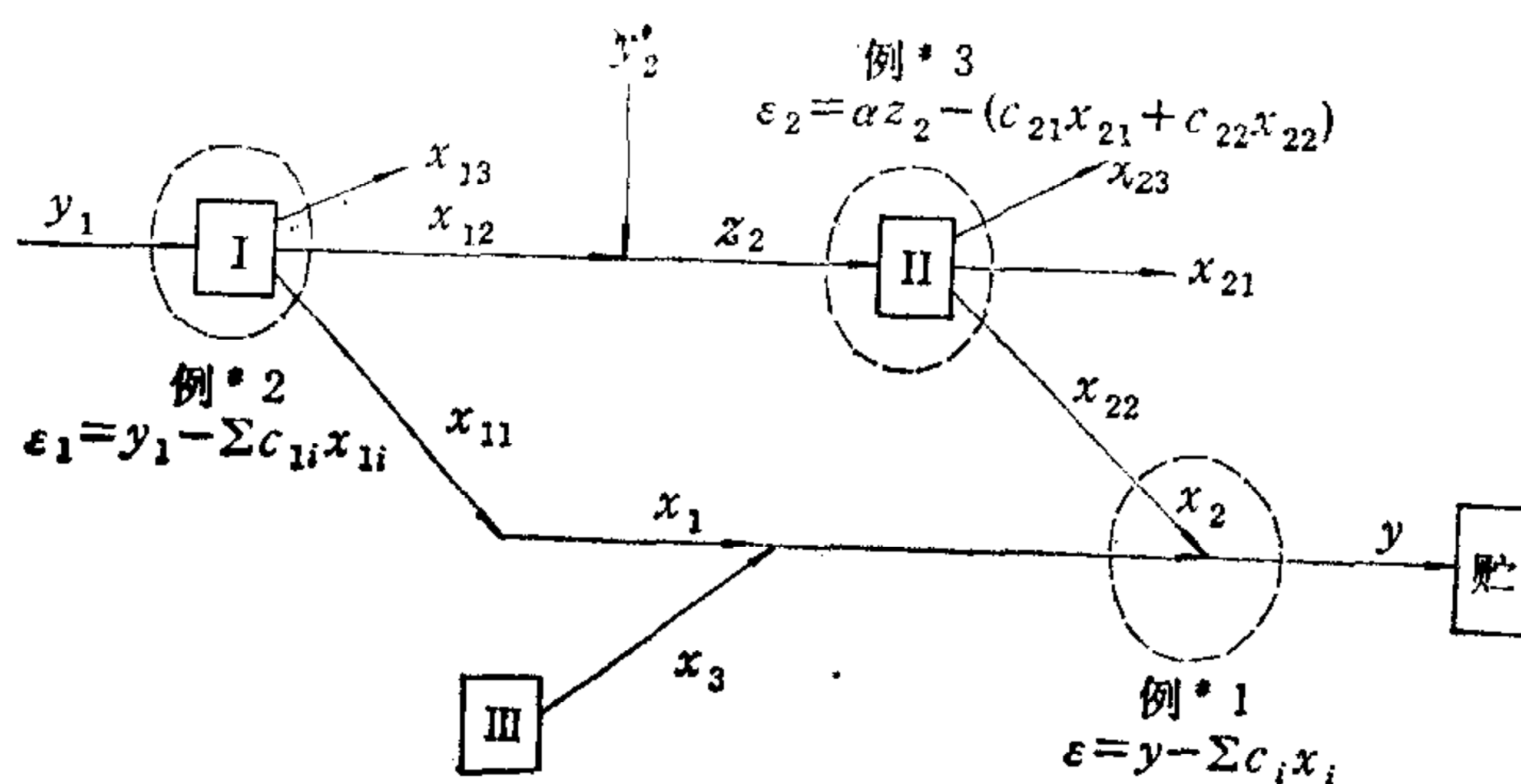


图 1

图1只反映某厂部分生产系统适当简化图, 图中用虚线分割成三个基本物料平衡关系. 实例#1是多产一收的产收平衡实例, 存在平衡误差

$$\varepsilon(k) = y(k) - [x_1(k) + x_2(k) + x_3(k)] \neq 0.$$

计划部门常用的平衡原则是按报量分摊误差, 即令

$$c_i(k) = y(k) / [x_1(k) + x_2(k) + x_3(k)], \quad (i = 1, 2, 3),$$

而后上报平衡量 $cx_i(k)$ 。当然还有其它的平衡原则。

报量和收量是根据计测或仪表记录经过换算、校正而得，存在偏置误差、比例误差和系统误差。本例所指的基本模型用(1)式表达，其中 c_{i0} 是客观上存在的比例系数； c_i 是对它的估值， $e(k)$ 是随机误差。由于该厂仪表的偏置误差比较小，因此 $e(k)$ 的数学期望值可取零。在三个实例中， y_0, y_1, y_2 三个量又相对可信，平衡系数取为 1。

$$y(k) = c_{10}x_1(k) + c_{20}x_2(k) + c_{30}x_3(k) + e(k), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(k) &= y(k) - [c_1x_1(k) + c_2x_2(k) + c_3x_3(k)] \\ &= e(k) + \sum_{i=1}^3 (c_{i0} - c_i)x_i(k). \end{aligned} \quad (2)$$

物料平衡参数估计的任务是，根据当天所知的全部报量组

$$y(l), x_1(l), x_2(l), x_3(l), \quad (l = 1, 2, \dots, k),$$

估计出参数 $c_i(k)$ ，使观察误差尽可能小。

二、参数估计算法

1. 最小二乘法

若令

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}(k) = \begin{bmatrix} c_1(k) \\ c_2(k) \\ c_3(k) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(1) \\ \mathbf{x}^T(2) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T(k) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

则在一定条件下，使指标 $J_\varepsilon(k)$ 为极小的估值将如(4)式所示：

$$J_\varepsilon(k) = \sum_{l=1}^k \varepsilon^2(l) \rightarrow \text{极小}, \quad (3)$$

$$\mathbf{c} = (X^T X)^{-1} X^T \mathbf{y}. \quad (4)$$

显然，(4)式需逐日进行逆阵运算，很不方便。为此，可用如下的递推算法：若昨天的参数向量估值是 $\mathbf{c}(k-1)$ ，昨天与逆阵有关的中间阵是 $P(k-1)$ 那么按下列公式顺序计算，就能避开矩阵求逆而获得 $\mathbf{c}(k)$ 和 $P(k)$ 。

$$\gamma(k) = (V + \mathbf{x}^T(k)P(k-1)\mathbf{x}(k))^{-1}, \quad (5a)$$

$$\varepsilon(k, k-1) = y(k) - \mathbf{x}^T(k)\mathbf{c}(k-1), \quad (5b)$$

$$\mathbf{c}(k) = \mathbf{c}(k-1) + P(k-1)\mathbf{x}(k)\gamma(k)\varepsilon(k, k-1), \quad (5c)$$

$$P(k) = [I - P(k-1)\mathbf{x}(k)\gamma(k)\mathbf{x}^T(k)]P(k-1). \quad (5d)$$

其中 I 为单位阵， $V = 1$ 。除了开始阶段(例如 $k = 10$) 求一次逆阵外，以后都可采用递推算法^[1]。但是本文所述的递推法是指下面的递推法。

2. Kalman 递推算法

如果用统计准则

$$J_c(k) = E \left\{ \sum_{i=1}^3 (c_i(k) - c_{i0})^2 \right\} \rightarrow \text{极小} \quad (6)$$

代替 $J_\varepsilon(k) \rightarrow \text{极小}$, 则(5)式仍然可用, 只是 V 值改变为 $V = E\{e^2\}$.

做为起始条件: $c_i(0) = 1, P(0) = I$. 如果 $e(k)$ 序列满足一定条件, 最终也会得到与最小二乘法相同的结果. $\varepsilon(k)$ 是可计算的量, $[c_i(k) - c_{i0}]$ 则是随机变量, 是不能计算的. 上述两种算法虽相似, 但至少在 k 值比较小的情况下, 相应的两个估值序列是不会相同的.

3. 两种估值算法的比较

做为三个实例的报量组, 都是某厂 1983 年下半年的实际数据, 七月一日开始进行估值. 为了便于对比, 考虑了累计误差, 引用了累计运算符“ s ”, 例如:

$$sy(k) = \sum_{l=1}^k y(l), \quad (7)$$

还引用了以百分数表达的标准离差 $\sigma\%$ 和累计收产比 R , 即

$$\sigma\%(k) = \sqrt{J_\varepsilon(k)/k} * 100 / (sy(k)/k), \quad (8a)$$

$$R(k) = (sy(k)) / \left[\sum_{i=1}^3 c_i(k) \cdot sx_i(k) \right]. \quad (8b)$$

显然, $\sigma\%$ 以小为佳, R 以接近 1 为佳.

针对实例 #1, 表 1 前两行列行了最小二乘法和以 $J_c \rightarrow \min$ 为指标的递推算法所估计的参数值. 不仅值的大小不同, 大小排序关系也相异. 显然, 比较对应的 $\sigma\%$ 值, 最小二乘法优于递推算法.

该厂每年大修一次, 两次大修之间的生产天数大约为 300 天, 所以一年之内能汇集到的报量组数目 N 很小, 远非 $N \rightarrow \infty$ 这样的统计条件, 因此提高收敛速度是非常重要的. 表 2 列出了递推过程的动态记录, $R \rightarrow 1$ 的收敛速度是很慢的. 促使 $R \rightarrow 1$ 意味着累计产收平衡, 这比每天孤立平衡要重要得多. $R = 1$ 还意味着 $se \rightarrow 0$ 将会导致 $J_\varepsilon \rightarrow \text{最小}$, 使估值接近最小二乘法的解, 且易于为人们所接受.

表 1 三种算法用于实例 #1 的对比 ($N = 136$)

参数估值和估计质量	估值方法		
	最小二乘法 $J_\varepsilon \rightarrow \min$	递推算法 $J_c \rightarrow \min$	约速递推法 $J_c \rightarrow \min; c_i = Rc_i$
$c_1(N)$	0.9529	0.9795	0.9602
$c_2(N)$	0.9786	0.9605	0.9861
$c_3(N)$	1.0316	0.9485	0.9983
$\sigma\%(N)$	2.903	2.988	2.906

4. 约束递推算法

如果在每一次递推结束之后, 插入一个小程序

表 2 递推算法记录

k	c_1	c_2	c_3	R
20	0.951	0.982	0.975	1.013
40	0.973	0.966	0.952	1.011
60	0.975	0.964	0.949	1.008
80	0.979	0.961	0.946	1.007
100	0.982	0.956	0.946	1.007
120	0.982	0.959	0.943	1.006
136	0.979	0.960	0.948	1.0058

表 3 约束递推算法记录

k	c_1	c_2	c_3	R
20	0.958	0.997	1.000	0.999
40	0.975	0.979	0.984	0.999
60	0.968	0.979	0.988	0.999
80	0.966	0.982	0.989	0.999
100	0.966	0.980	0.991	1.000
120	0.964	0.985	0.991	1.000
136	0.960	0.986	0.998	—

$$c_i(k) = R(k) * c_i(k), \quad (9)$$

就可以达到累计产收平衡的目的。表 3 列出了约束递推算法的动态记录，的确 $R \rightarrow 1$ 的收敛速度大大提高，估值及其估计质量也接近最小二乘法的结果。

三、误差分析

对于实例 #1，在得到估值 $c_i(N)$ 以后，由(2)式可以得到 $\varepsilon(k)$ 序列，表 1 中的 $\sigma\%$ 值就是这样计算出来的。由 $\varepsilon(k)$ 序列还可以计算出图 2 那样的直方图。由图看出，相对误差

$$\varepsilon\%(k) = 100\varepsilon(k)/y(k)$$

有 79.5% 落在 $\pm 1.03\sigma\%$ 区间之内，相当集中；但分布的宽度却达 $\pm 4\sigma\%$ ，伸展较远。伸展宽表明有大偏差存在，反映物料信息系统有缺陷。例如生产单元常有自己的中间贮存，而日收量不包括部分中间产品往中间贮存的送量，但却包含在日产量中；如果中间贮存往贮运部门送料，则日收量有反映而日产量却无反映。诸如此类的原因导致脉冲性的 $\varepsilon(k)$ 跳

表 4

实例	N	f_N	$\sigma\%$	$\varepsilon \leq \sigma$ 的数目
# 1	136	77	2.906	≈ 79
# 2	121	51	2.12	> 90

变,形成大误差.

从表 1 看,最小二乘法 and 约束递推法相比,估值相差有 1—2%;但从图 2 看,直方图差别不大,左右两部大致对称.

由 $\varepsilon(k)$ 序列还可以统计相邻两个 $\varepsilon(k-1)$, $\varepsilon(k)$ 符号相异的个数 f_N , 对于实例 #1, 由表 4 第一行得知 $f_N = 77$, $N = 136$, 可以说 $\varepsilon(k)$ 变号频繁. $\varepsilon(k)$ 变号频繁, 有 79% 的误差落在 $\pm \sigma$ 区内, 这两个特征表明, 把平衡系数看成常数是可行的.

现在转到实例 #2, 其数学模型和误差方程是

$$\varepsilon_1 = y_1 - [c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13}], \quad (10a)$$

$$y_1 = e_1 + [c_{110}x_1 + c_{120}x_{120} + c_{130}x_{13}]. \quad (10b)$$

估计结果见表 5.

与表 1 相对照, 对于后一个实例, 两种方法的差别要大一些; 但两种递推法相比, 情况仍相仿.

最后由表 4 来对比 $f_N/(N-1)$ 值, 相对来讲, 实例 #2 的变号不能说太频繁. 石化企业一般每五天布置一次各种产品的计划日产量, 其中影响最大的正是与实例 #2 有关的生产单元, 包括原料油的明显变化、产品分配和方案的明显变化. 于是 $\varepsilon_1(k)$ 序列也明显反映了平均为五天的调度期变化. 大部分调度期内, 误差 ε_1 有正有负; 但在若干调度期内, 误差呈现单一的正负号, 这表明平衡系数有一定时变特征.

误差 ε_1 呈现不变符号的调度期在实例 #2 中有 8 个, 共占 34 个报量组. 对这 8 个调度期, 分别用约束递推算法重新估值, $P(0)$ 的初值仍取为 1, $c_i(0)$ 的初值采用表 5 中的 $c_i(N)$, 总的调整结果, $\sigma\%$ 可以下降到 1.899.

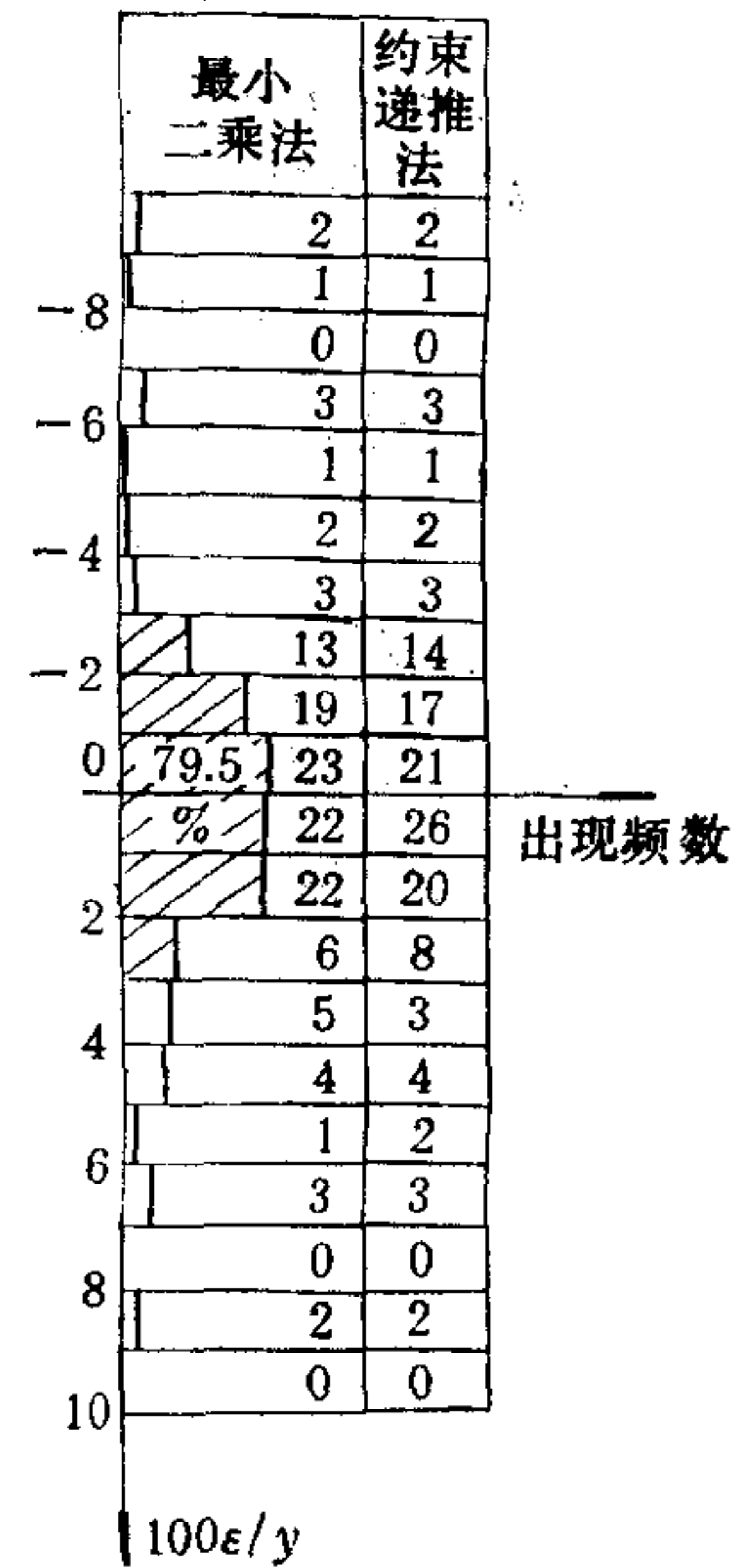


图 2

表 5 实例 #2 的估值结果 (N = 121)

估值结果	方 法	
	最小二乘法	约束递推法
$c_{11}(N)$	0.900	0.961
$c_{12}(N)$	1.023	1.009
$c_{13}(N)$	1.051	1.011
$\sigma\%(N)$	2.047	2.083

四、报量信息不全时的参数估计

对于实例 #2, 如果对 $x_{13}(k)$ 报量序列“视而不见”, 也就是说, 仅提供局部报量组信息

$$y_1(k), x_{11}(k), x_{12}(k), (k = 1, 2, \dots, N),$$

是不是还能对参数 c_{11}, c_{12} 进行估计? 这个问题的提出似乎难以理解. 不过, 实际上却真

会有类似的必要,这相当于 $x_{13}(k)$ 是难以计量或虽有报量但有欠准确者。

从累计量看,总收 $sy_1(N)$ 包含有两部分,由可测产品组成的收率为估值

$$\alpha^* = [c_{11}^*(N)sx_{11}(N) + c_{12}^*(N)sx_{12}(N)]/sy_1(N), \quad (11)$$

而其它产品的收率为 $(1 - \alpha^*)$, 其中 $c_{11}^*(N)$, $c_{12}^*(N)$ 为“全息估值”。因此,可以采用如下的观察误差算法

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \alpha y_1 - [c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12}] \\ &= [(c_{110} - c_{11})x_{11} + (c_{120} - c_{12})x_{12}] + [c_{130}x_{13} - (1 - \alpha)y_1] + e_1, \end{aligned} \quad (10c)$$

其中 α , c_{11} , c_{12} 都是待估的,需要建立一种算法使它们的估值接近 α^* , $c_{11}^*(N)$, $c_{12}^*(N)$ 。

1. α 固定法

最简单的办法是令 $\alpha = \alpha^*$ 并保持恒定,而后用约束递推法对 c_{11} , c_{12} 进行估值。这样做的好处是,当 $k = N$ 时, $[c_{130}x_{13}(N) - (1 - \alpha^*)sy_1(N)] = 0$, 使下式近似成立,即

$$\alpha^* \doteq [c_{11}(N)sx_{11}(N) + c_{12}(N)sx_{12}(N)]/sy_1(N). \quad (11a)$$

$c_{11}(N)$, $c_{12}(N)$ 中有一个接近全息估值,另一个必然也接近全息估值。

但是在递推过程中, $[c_{130}x_{13} - (1 - \alpha^*)y_1]$ 不可能是零,形成有偏估计。采用 $\alpha = \alpha^*$ 只是使正负有偏估计的机会相等,为降低有偏估计创造部分条件。在有偏估计情况下,递推过程对估计值的调整步长应有所下降。由于调整步长与 ε_1 成正比,因此在(56)式之后,增加如下程序:

$$\varepsilon_1(k, k-1) = h\varepsilon_1(k, k-1), \quad (0 < h < 1). \quad (12)$$

ε_1 是由两部分造成的: $\alpha\varepsilon_1$ 部分是由于估值误差所造成, $(1 - \alpha)\varepsilon_1$ 是因有偏估计造成的。因此,可以取 $h = \alpha$ 。

按上述工程观点的判断进行估值,在 $\alpha = \alpha^*$ 的条件下,估值结果列入表 6 中的第 1 列, $c_{1i}(N)$ 非常接近于 $c_{1i}^*(N)$ 。在第 2, 3 两列列出了对另两个报量视而不见的估值结果。

现在进一步取消 α^* 这一先验数据,用当前关于收率的习惯算法计算 α_0 , 即

$$\alpha_0 = [sx_{11}(N) + sx_{12}(N)]/sy_1(N). \quad (13)$$

若令 $\alpha = \alpha_0$ 并保持不变,估值结果列于后三列,在工程上也是可行的。

同样,对实例 #1 某一个报量视而不见,也表现出在缺少信息的情况下仍有进行有用估值的可能,但同样没有准确估计 $\alpha = \alpha^*$ 的办法。

2. α 浮动法

实例 #3 的 x_{23} 报量欠准,采用如下的数学模型和误差算法:

$$z_2 = [c_{210}x_{21} + c_{220}x_{22} + c_{230}x_{23}] + e_2, \quad (14a)$$

$$\varepsilon_2 = \alpha_2 z_2 - [c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22}]. \quad (14b)$$

$c_{21}(0)$, $c_{22}(0)$ 仍选为 1, $\alpha_2(0)$ 根据历史经验决定。估计程序是:

- 1) $c_{21}(0) = c_{22}(0) = 1$, 估计 $\alpha(0)$ 值(此例定为 0.833), $P(0) = I$;
- 2) 第 k 次递推时,保持 $\alpha(k-1)$ 不变,用递推法得出 $c_{21}(k)$, $c_{22}(k)$;
- 3) 保持累计收率为给定值,即令 $\alpha(k) = [c_{21}(k)sx_{21}(k) + c_{22}(k)sx_{22}(k)]/sz_2(k)$ (15)
- 4) 重复 2 和 3,直至 $k = N$ 。

约束递推过程如表 7 所示,很快进入平衡。但是 $\alpha_2(N)$ 有追踪 $\alpha_2(0)$ 的现象,同 α 固定

表 6 全息、缺息情况下的估值对比

α	1.000	α^*			α_0		
		0.730	0.546	0.727	0.737	0.554	0.716
$c_{11}(N)$	0.960	0.960	0.958	—	0.966	0.970	—
$c_{12}(N)$	1.009	1.010	—	1.008	1.021	—	0.999
$c_{13}(N)$	1.001	—	1.015	1.009	—	1.031	1.000
列序	0	1	2	3	4	5	6
信息情况	全息	缺 x_{13}	缺 x_{12}	缺 x_{11}	缺 x_{13}	缺 x_{12}	缺 x_{11}

$N = 121$, α 固定法, $h = \alpha$, 实例 #2

表 7 实例 #3 的递推过程

k	α_2	c_{21}	c_{22}
10	0.827	0.993	0.997
20	0.829	0.991	0.996
30	0.828	0.991	0.997
80	0.829	0.991	0.996
90	0.828	0.992	0.996

α 浮动法, $N = 92$, $h = \alpha$, $\alpha_2(0) = 0.833$

法一样, 没有正确估计 $\alpha_2(0)$ 的办法。

参看图 1, 应有 $c_{22} = c_2$ 的关系。目前, $c_2 = 0.987$, $c_{22} = 0.996$, 还是相符的。如果采用 α 固定法, 并令 $\alpha = 0.82$, 则 $c_{22} = 0.990$, 表明 $\alpha_2(0)$ 要通过有关基本平衡之间的约束来确定。

对实例 #3 来说, α 固定法与 α 浮动法二者之间没有明显的差别。

五、小 结

为了适应工业的特点, 在物料平衡的估计技术方面, 笔者的主要工作是在递推过程中增加了约束条件 $se(k) = 0$, 从而保证了基本物料平衡没有明显的累计平衡误差。实现这一约束条件的手段是, 对每次递推参数修正量做不大的再调整, 而且是简单的比例调整。

对于具有全息的基本平衡, 约束递推算法在收敛速度上优于或不亚于传统的递推算法, 平衡质量更接近于最小二乘法。

为了适应调度期变化所带来的参数具有时变的特点以及基本平衡缺少部分信息的情况, 分别提出了解决的途径。

涉及到的参数 c_1 和 α_2 是对企业的经济效益有重要影响的参数, 正确地估计它们是

对正确制定月计划或调度计划有利的,也就是说,有可能使计划效益与实际效益接近一致。

基本平衡之间的实际联系或约束尚未做综合考虑,虽然在当前的三个实例中,这种约束还未发生显著矛盾。

参 考 文 献

- [1] 夏天昌,系统辨识—最小二乘法,国防工业出版社,1984年。

TECHNIQUES OF PARAMETER ESTIMATION WITH APPLICATIONS TO MATERIAL BALANCING BASED ON PRIMITIVE MODELS

TONG SHIHUANG

(Institute of Automation, Academia Sinica)

ABSTRACT

A collection of industrial primitive examples which illustrate the applications of the constrained recursive estimation techniques for material balancing is presented in this paper. Such examples also show that by these techniques the estimated parameters approximate quickly toward the value obtained from the l.m.s. method.