第 14 卷 第 4 期　　自　动　化　学　报　　Vol. 14, No. 4
1988 年 7 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　July, 1988

n 中取连续 k 系统

阎 春 宁
（哈尔滨船舶工程学院）

史 定 华
（上海铁道学院）

摘　　要

本文介绍八十年代初诞生的一种新的系统可靠性模型—— n 中取连续 k 系统．文中对新模型的定义、系统可靠度的精确公式、递推公式、近似公式、上下界估计式等进行了阐述；并对其最优化问题和若干理论问题作了归纳．

一、引　　言

可靠性工程中的一个重要模型就是系统单元模型． 从产品完成其功能的角度出发，只需采用串联系统．然而，根据串联系统可靠度的公式设计出的产品要么可靠度低要么成本高，因此人们不得不转向冗余设计．冗余设计能有效地提高产品可靠度，常用的方案有：并联冗余、贮备冗余、 n 中取 k 冗余等．不过从硬件实现的角度来看，冗余设计并不处处通行．例如无法采用两付天线来发射同一频率的无线电波．不仅并联方案在许多场合行不通，贮备和 n 中取 k 冗余，也常常达不到预期的效果．

基于上述原因，人们一直在探索新的系统模型，期望找到一种更有效的冗余设计方法．1981 年 Chiang & Niu[1] 提出了 n 中取连续 k 系统，其本质是一种降额、温贮备冗余．几年来这个新的系统模型已经在不少工程领域初见成效．

n 中取连续 k 坏系统 (The Consecutive-k-out-of-n: F) 简称 n 中取连续 k 系统，是从工程实际中抽象出来的新模型．例如：街灯系统、输油泵站系统、长途通讯系统、微波塔系统、卫星中继通讯系统、集成电路设计等等，都可用 n 中取连续 k 系统来概括．下面以输油泵站系统为例说明这种系统的工作原理．

设输油泵站系统由 n 个串联的泵站组成，每隔 10 公里设置一泵站，每泵站加压后可输送 20 公里油程．在相邻泵站都正常的情况下，泵是半负荷工作；当所有中间泵站相间地出现故障时，剩下的泵站转为满负荷工作，这时整个输油系统仍可正常工作．当任何相邻两泵站发生故障时，系统失效，输油停止．由此可见这是一个“n 中取连续 2 系统”．一般地有 n 中取连续 k 系统．

本文于 1986 年 12 月 4 日收到．

显然，这类系统失效与否，不是单纯地取决于失效单元的总个数，而是取决于相邻失效单元的个数.

二、定 义

1. 直列的 n 中取连续 k 坏系统

设系统由 n 个单元组成，并排成一列，其中若有连续 k 个单元失效，系统就失效，则称这种系统为直列的 n 中取连续 k 坏系统. 特别地，当 $k=1$ 时，它退化为串联系统；当 $k=n$ 时，它退化为并联系统.

2. 环形的 n 中取连续 k 坏系统

设系统由 n 个单元组成，排列成环形，其中若有连续 k 个单元失效，系统就失效，则称这种系统为环形的 n 中取连续 k 坏系统. 它和直列的区别是首尾失效单元要连续计算.

除直列的和环形的 n 中取连续 k 系统外，1985 年 Bollinger[2] 还提出了严格的 n 中取连续 k 坏系统. 1986 年 Hwang 和史定华在讨论解决卫星中继站最优化设计问题时，提出了冗余的 n 中取连续 k 坏系统.

三、计算公式

设单元 i 的可靠概率为 p_i，$p(n)$ 意指 $(p_1, \cdots, p_n)$，当 $p_1=p_2=\cdots=p_n=p$ 时，记成 p, n. 系统可靠概率记成 R，失效概率记成 F，直列和环形分别用下标 L 和 C 识别. 假定每个单元的失效是相互独立的，则问题是：

已知 $p(n)$（或 p, n），求 $R_L(p(n), k)$（或 $R_L(p, n, k)$）和 $R_c(p(n), k)$（或 $R_c(p, n, k)$）. 自然有

$$\begin{cases} F_L(p(n), k) = 1 - R_L(p(n), k), \\ F_c(p(n), k) = 1 - R_c(p(n), k). \end{cases} \tag{1}$$

1. 精确公式

下面介绍文献 [3—6] 的结果.

1）直列情况

$$R_L(p, n, k) = \sum_{i \geqslant 0} (-1)^i p^{i-1} q^{ki} \left[\binom{n-ki+1}{i} - q \binom{n-ki}{i} \right]. \tag{2}$$

可利用组合分析方法导出上述公式.

令 $N_L(j, n, k)$ 表示 n 个单元中有 j 个单元失效时，直列的 n 中取连续 k 系统仍然正常的组合方式数，于是

$$R_L(p, n, k) = \sum_j N_L(j, n, k) q^j p^{n-j}. \tag{3}$$

首先考虑 $N_L(j, n, 2)$. 只有在每两个失效单元之间恒有一个正常单元时系统正常，这种组合数为

$$N_L(j, n, 2) = \binom{n-j+1}{j}. \tag{4}$$

实际上，使失效单元的任意两序列之间至少有一个正常单元的组合数与失效单元序列的本身大小无关，只与失效单元序列的个数有关. 已知系统中有 j 个单元失效，失效单元序列数是 i，则失效与正常单元之间组合数为 $\binom{n-j+1}{i}$. 对于"n 中取连续 2"系统正常工作而言，每个失效单元序列只能有一个失效单元，所以有 $i=j$. 上述结果推广到"n 中取连续 k"系统有困难，因此文献 [5] 提出了递推公式:

$$N_L(j, n, k) = \sum_{i\geq 0}\binom{n-j+1}{i}N_L[j-(k-1)i, n-ki, k-1], k\geq 3. \tag{5}$$

Bollinger[6] 给出了进一步的递推公式:

$$\begin{aligned} &N_L(j, n, k) = \binom{n}{j}, \quad j<k; \\ &N_L(j, j, k) = 1, \qquad j\geq k; \\ &N_L(j, n, k) = \sum_{i=0}^{k-1} N_L(j-i, n-i-1, k), \quad n>j\geq k. \end{aligned} \tag{6}$$

在此基础上 Hwang[4] 证明了

$$N_L(j, n, k) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i\binom{n-j+1}{i}\binom{n-ki}{n-j}, \quad n>j\geq k\geq 1, \tag{7}$$

并获得了直列情况下的精确公式 (2).

2) 环形情况

$$\begin{aligned} R_c(p, n, k) = &\sum_{i\geq 0}(-pq^k)^i\binom{n-ki}{i} - q^n \\ &+ k\sum_{i\geq 0}(-pq^k)^{i+1}\binom{n-k(i+1)-1}{i}. \end{aligned} \tag{8}$$

这个公式利用了下面的结果:

$$R_c(p, n, k) = p^2\sum_{i=0}^{k-1}(i+1)q^iR_L(p, n-i-2, k). \tag{9}$$

对 $k=2$ 的情况，有下述不求和的解析式:

$$R_L(p, n, 2) = p^n\frac{(2q/p+1+\sqrt{1+4q/p})^{n+2}+(-1)^{n+1}(2q/p)^{n+2}}{2^{(n+1)/2}(2q/p+1+\sqrt{1+4q/p})^{(n+1)/2}(4q/p+1+\sqrt{1+4q/p})}, \tag{10}$$

$$R_c(p, n, 2) = np^n\frac{(1+\sqrt{1+4q/p})^n+(1-\sqrt{1+4q/p})^n}{2^n}. \tag{11}$$

2. 递推公式

1) 直列情况

Hwang[7] 的公式:

$$R_L(p(n),k)=1, \qquad n<k;$$
$$R_L(p(n),k)=\sum_{i=n-k+1}^{n} R_L(p(i-1),k)p_i\Big(\prod_{j=i+1}^{n} q_j\Big), \qquad k\leqslant n. \tag{12}$$
$$F_L(p(n),k)=0, \qquad n<k,$$
$$F_L(p(n),k)=\sum_{i=k}^{n}[1-F_L(p(i-k+1),k)]p_{i-k}\Big(\prod_{j=i-k+1}^{i} q_i\Big),\ p_0\equiv 1, k\leqslant n. \tag{13}$$

Shanthikumar[8] 的公式:

$$R_L(p(n),k)=R_L(p(n-1),k)-R_L(p(n-k-1),k)p_{n-k}\Big(\prod_{j=n-k+1}^{n} q_j\Big), \qquad k\leqslant n. \tag{14}$$

$$F_L(p(n),k)=F_L(p(n-1),k)+[1-F_L(p(n-k-1),k)]p_{n-k}\Big(\prod_{j=n-k+1}^{n} q_j\Big), \qquad k\leqslant n. \tag{15}$$

推论. 当 $p_1=\cdots=p_n=p$ 时,有

$$R_L(p,k,k)=1-q^k;$$
$$R_L(p,n,k)=R_L(p,n-1,k)-pq^kR_L(p,n-k-1,k),\ k<n. \tag{16}$$
$$F_L(p,k,k)=q^k;$$
$$F_L(p,n,k)=F_L(p,n-1,k)+pq^k[1-F_L(p,n-k-1,k)],\ k<n. \tag{17}$$

2) 环形情况[7]

$$R_c(p(n),k)=\sum_{s-1+n-l<k}\Big(p_s\prod_{i=1}^{s-1} q_i\Big)\Big(p_l\prod_{j=l+1}^{n} q_j\Big)R_L(p_{s+1},\cdots,p_{l-1},k), \qquad 1<k<n. \tag{18}$$

$$R_c(p(n),1)=\prod_{i=1}^{n} p_i;$$
$$R_c(p(n),n)=1-\prod_{i=1}^{n} q_i. \tag{19}$$

推论[5]. 当 $p_1=\cdots=p_n=p$ 时,有

$$R_c(p,n,k)=p^2\sum_{i=0}^{k-1}(i+1)q^iR_L(p,n-i-2,k),\ 1<k<n. \tag{20}$$

递推公式的计算复杂性分析是衡量递推公式优劣的重要标志. 目前最好的结果是由 Hwang 导出的公式: (12) 式需要 $O(nk)$ 计算量; (13) 式需要 $O(n)$ 计算量; (18) 式需要 $O(nk^2)$ 计算量.

3. 上下界估计

在许多实际应用中,仅需估计系统可靠度的上下界. 文献 [9, 1, 10,] 的结果如下:

$$l(p,n,k)\leqslant R_L(p,n,k)\leqslant u(p,n,k); \tag{21}$$
$$l_1(p,n,k)=1-(n-k+1)q^k,$$
$$u_1(p,n,k)=1-(n-k+1)p^{n-k}q^k; \tag{22}$$
$$l_2(p,n,k)=1-q^k[1+(n-k)p]+pq^2(n-2k)$$

$$+ k(2n-5k-1)p^2q^{2k}/2 + p^2q^k[(1-q^k)-(1-q^k)^{n-3k}],$$

$$u_2(p,n,k) = 1 - q^k[1+(n-k)p] + pq^2(n-2k)$$
$$+ k(2n-5k-1)p^2q^{2k}/2 + kp^2q^k[(1-q^k)-(1-q^k)^{[n/k]-1}]; \quad (23)$$

$$l(p(n),k) \leqslant R_L(p(n),k) \leqslant u(p(n),k); \quad (24)$$

$$l'(p(n),k) \leqslant R_c(p(n),k) \leqslant u'(p(n),k); \quad (25)$$

$$l_3(p(n),k) = \prod_{i=1}^{n-k+1}\left(1-\prod_{j=1}^{i+k-1} q_j\right);$$

$$l_3'(p(n),k) = \prod_{i=1}^{n}\left(1-\prod_{j=1}^{i+k-1} q_j\right),\ \text{当}\ j>n\ \text{时}\ q_j = q_{j-n}; \quad (26)$$

$$u_3(p(n),k) = u_3'(p(n),k) = \prod_{i=1}^{[n/k]}\left(1-\prod_{j=1}^{j+k-1} q_j\right).$$

其中 $[x]$ 表示小于或等于 x 的最大整数.

4. 大系统的近似计算

利用 Feller 的离散更新理论可得出 $R_L(p,n,k)$ 的一个相当好的近似. 令 x 是方程

$$A(x) = px + pqx^2 + \cdots + pq^{k-1}x^k = 1 \quad (27)$$

的唯一正根,则有

$$R_L(p,n,k) \approx (1-qx)/\{(k+1-kx)px^{n+1}\}. \quad (28)$$

其中 x 可递推计算. 先令 $x_0 = 1$, 再按 $x_{m+1} = 1 + pq^k x_m^{k+1}$ 逐次计算 x_m, 当相邻两个 x 小于指定的 ε 时便停止.

另外,当 p 为常数时, $R_L(p,n,k)$ 随着 $n\to\infty$而趋于零,这在实际应用中是没有意义的. 由此自然会问: 若 p_n 随着 $n\to\infty$而趋于 1 时, $R(p,n,k)$ 的极限如何?

假定 $p_n = 1 - \lambda n^{\left(-\frac{1}{k}\right)}$, 首先 Chao & Lin[11] 用 Markov 链的 taboo 概率对 $1\leqslant k\leqslant 4$, 尔后 Fu[12] 用概率分析方法对一般的 k, 证明了

$$\lim_{n\to\infty} R_L(p,n,k) = e^{-\lambda^k}. \quad (29)$$

四、最优化问题

n 中取连续 k 系统的最优化问题,对不同单元是指当单元的可靠概率 $p_1,\cdots,p_n$ 已知后,如何指派才使系统具有最大可靠度; 对相同单元是指已知 p, 如何确定 n 和 k, 使系统能完成任务或在一定的约束下达到总设计费用最低.

1. 序贯优化指派

假定 n 个单元的可靠概率为 $p_1 < \cdots < p_n$, n 个单元序贯地使用,并且单元只有投入使用后才知道它的好坏. 考虑 n 中取连续 2 系统,得到的使用顺序最优策略是:

a. 首先使用最不可靠单元;

b. 若被使用的第 $(r-1)$ 个单元失效,则第 r 个使用留下的最可靠单元;

c. 若被使用的第 $(r-1)$ 个单元完好,则第 r 个使用留下的最不可靠单元.

2. 同时优化指派

对给定的 $p_1 < \cdots < p_n$，如何指派 n 个单元在系统中的位置使系统最可靠.

定理 1[13]. 直列的 n 中取连续 k 系统，当且仅当 $k \in \{1, 2, n-2, n-1, n\}$ 才存在最优指派(见表 1).

定理 2[13]. 对直列的 $2m$ 中取连续 m 系统，好的指派 π^* (自然数 $1, \cdots, n$ 的一个置换)应满足：若 $1 \leqslant i < j \leqslant m$，则 $\pi^*(i) < \pi^*(j)$ 和 $\pi^*(m+i) > \pi^*(m+j)$.

定理 3[14]. 环形的 n 中取连续 2 系统的最优指派构形是 $(n, 1, n-1, 3, n-3, \cdots, n-4, 4, n-2, 2, n)$.

表 1

k	最优指派的构形
$1, n$	任意排列
2	$(1, n, 3, n-2, \ldots, n-3, 4, n-1, 2)$
$n-2$	(1,4, 任意排列, 3,2)
$n-1$	(1, 任意排列, 2)

3. 系统最优化设计

为了便于推广，不妨用"距离"来抽象地描绘单元性能综合指标，工作距离越长，则单元性能综合指标越好.

设单元的可靠概率为 p，工作距离为 d，系统的总距离为 D，系统共有 n 个单元，于是

$$k \approx nd/D. \tag{30}$$

假定系统要求有 $1-\varepsilon$ 的可靠度，由 (29) 式可得

$$F_L(p, n, k) \approx 1 - e^{-\lambda k} \approx \lambda^k = n(1-p)^k. \tag{31}$$

则

$$n(1-p)^k \leqslant \varepsilon. \tag{32}$$

每个单元的实际费用，除了固定的基本费用外，还有它的性能改进费用. 性能改进费用常与工作距离的平方成正比，也与单元可靠概率提高有关. 这样费用函数可写成

$$A(d, p) = \alpha d^2 f(p) + c. \tag{33}$$

其中 α 是比例常数，c 是基本费用，$f(p)$ 随着 p 从零变到 1 而递增地从零变到∞.

系统的总费用函数

$$L = nA(d, p) = \alpha d^2 n f(p) + nc = \alpha D^2 k^2 f(p)/n + nc. \tag{34}$$

Chao & Lin[11] 考虑了这样两个最优化问题：在满足系统可靠度的要求下，已知 k 选择 p 与已知 p 选择 k，使系统总费用最低. 这两个问题的目标都是希望系统的单元数尽量少，把 L 看成 n 的函数，可求得极小点：

$$n = (\alpha D^2 k^2 f(p)/c)^{\frac{1}{2}}. \tag{35}$$

把对系统可靠度的要求(即 $n = \varepsilon/(1-p)^k$) 代入，就得 p, k 应满足的条件：

$$f^{\frac{1}{2}}(p)(1-p)^k = \varepsilon/(\alpha D^2 k^2/c)^{\frac{1}{2}}. \tag{36}$$

解此方程，可求得 p 或 k，然后再确定 n 和 L.

最近 Chiang & Chiang[15] 考虑了一个新的最优化问题．他们提出的要求是系统一定要完成任务，当单元失效危及系统失效时，就补充新的单元，因此系统的单元数N是个随机变量．不失一般性，设 $d=1$，他们证明了

$$E\{N\}=[kq^k+kDR_L(p,kD,k)+\sum_{x=1}^{kD-k}(x+k)R_L(p,x-1,k)pq^k]/R_L(p,kD,k). \qquad (37)$$

于是，第三个最优化问题是：在系统完成任务的条件下，已知 p 选 k，使 $E\{N\}$ 最小．

但文献 [15] 没有给出这一最优化问题的明确解答，只画了一张图说明这个问题的现实性．最近史定华和 Hwang 通过引进冗余的n中取连续k系统概念，解决了这一问题．

五、若干理论问题

当单元给定的不是可靠概率 p，而是某个失效时间分布 $F(t)$ 时，如何确定 n 中取连续 k 系统的有关可靠性指标，是有待于积极探索的问题．下面简单介绍最近进展．

1. 系统的失效时间分布和 MTTF

直列的 n 中取连续 2 系统，在单元相同时系统的失效时间分布为

$$F_L(F(t),n,2)=1-\sum_{j=0}^{[(n+1)/2]}\binom{n-j+1}{j}[F(t)]^j[1-F(t)]^{n-j}. \qquad (38)$$

对一般的 k 有[10]

$$F_L(F(t),n,k)=\sum_{j=k}^{n}\sum_{A(k,j-k)}\binom{n_1+n_2+\cdots+n_k}{n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_k}\times[F(t)]^{j-(n_1+\cdots+n_k)}[1-F(t)]^{n_1+\cdots+n_k}. \qquad (39)$$

其中 $A(k,j-k)=\{(n_1,\cdots,n_k)\,|$每个 n_i 都是非负整数，且 $\sum_{i=1}^{k}in_i=j-k\}$．

文献 [16] 利用失效路考虑了不同单元指数失效分布的情况．方法虽原则上是一般性的，但由于失效路太多，所以只能对很小的 n 和 k 进行计算．

假设某系统的失效路有 m 条，用 T_j 表示走完第 j 条路的时间，用 T 表示系统失效的时间，则有

$$T=\sum_{j=1}^{m}\pi_jT_j. \qquad (40)$$

其中 π_j 是系统走第 j 条路的概率，显然 $\sum_{j=1}^{m}\pi_j=1$．

每个 T_j 的分布可用卷积求得，记为 $F_j(t)$，于是系统的失效时间分布

$$F(t)=P\{T\leqslant t\}=\sum_{j=1}^{m}\pi_jF_j(t). \qquad (41)$$

$F(t)$ 的表达式是非常复杂的，不过得到系统的 MTTF 却相对容易些，因为

$$\mathrm{MTTF}=E[T]=\sum_{j=1}^{m}\pi_j E[T_j],$$

$E[T_j]$ 是容易得到的.

考虑单元失效后可以修理或更换的可修 n 中取连接 k 系统的研究工作，目前还未看到资料.

2. IFR 封闭性定理

由于 n 中取连续 k 系统的失效时间分布一般很难求得，所以转而考虑它属于何种分布类. 在单元相同的情况下，若单元的失效时间分布属于失效率递增类（IFR 类），则当且仅当环形的 n 中取连续 2 系统的失效时间分布属 IFR 类[5]. 对其它分布类的保持性目前尚不清楚.

参 考 文 献

[1] Chiang, D. T. and Niu, S. C., Reliability of Consecutive-k-out-of-n:F System, *IEEE Trans. on Rel.*, **1**(1981), 87—89.

[2] Bollinger, R. C., Strict Consecutive-k-out-of-n:F System, *IEEE Trans. on Rel.*, **1**(1985), 50—52.

[3] Lambiris, M. and Papastavridis, S., Exact Reliability Formulas for Linear & Circular Consecutive-k-out-of-n:F System, *IEEE Trans. on Rel.*, **2**(1985), 124—126.

[4] Hwang, F. K., Simplified Reliabilities for Consecutive-k-out-of-n System, *SIAM J. ALG. DISC. METH.*, **2** (1986), 258—264.

[5] Derman, C., etc., On the Consecutive-k-out-of-n:F System, *IEEE Trans. on Rel.*, **1**(1982), 57—63.

[6] Bollinger, R. C., Direct Computation for Consecutive-k-out-of-n:F System, *IEEE Trans. on Rel.*, **5**(1982), 444—446.

[7] Hwang, F. K., Fast Solutions for Consecutive-k-out-of-n:F System, *IEEE Trans. on Rel.*, **5**(1982), 447—448.

[8] Shanthikumar, J. G., Recursive Algorithm to Evaluate the Reliability of a Consecutive-k-out-of-n: F System, *IEEE Trans. on Rel.*, **5**(1982), 442—443.

[9] Salvia, A. A., Simple Inequalities for Consecutive-k-out-of-n:F Networks, *IEEE Trans. on Rel.*, **5**(1982), 450.

[10] Chen, R. W. and Hwang, F. K., Failure Distributions of Consecutive-k-out-of-n:F System, *IEEE Trans. on Rel.*, **4**(1985), 338—341.

[11] Chao, M. T. and Lin, G. D., Economical Design of Large Consecutive-k-out-of-n:F System, *IEEE Trans. on Rel.*, **5**(1984), 411—413.

[12] Fu, J. C., Reliability of a Large Consecutive-k-out-of-n:F System, *IEEE Trans. on Rel.*, **2**(1985), 127—130.

[13] Maion, D. M., Optimal Consecutive-k-out-of-n:F Component Sequencing, *IEEE Trans. on Rel.*, **1**(1985), 46—49.

[14] Du, D. Z. and Hwang, F. K., Optimalconsecutive-2-out-of-n System, *Math. of O. R.*, **1**(1986), 187—191.

[15] Chiang, D. T. and Chiang, R. F., Relayed Communication via Consecutive-k-out-of-n:F System, *IEEE Trans. on Rel.* **1**(1986), 65—67.

[16] Bollinger, R. C. and Salvia, A. A., Consecutive-k-out-of-n:F System with Sequential Failures, *IEEE Trans. on Rel.* **1**(1985), 43—45.

ON THE CONSECUTIVE-k-OUT-OF-n SYSTEM

YAN CHUNNING
(Harbin Shipbuilding Eng. Inst.)

SHI DINGHUA
(Shanghai Inst. of Railway Techn.)

ABSTRACT

A new model for system reliability of the early 80's, the consecutive-k-out-of-n system is presented. Definitions of the new model, exact formulas of system reliability, recursive formulas, upper and lower bounds are given. Its optimization problems and some theoretical problems are also summarized.

中国自动化学会 1988 年学术年会青年优秀论文一览表

序号	作　者	单　位	论文题目
1	徐雷	北京大学数学系	模拟退火组合优化在模式识别中的若干应用
2	赵　宏、龚建平	浙江大学化工系	系统辨识在常压塔航空煤油质量控制中的应用
3	戴立意	中国科学院系统科学所	连续时间奇异系统的滤波
4	吴景东	福州大学计算机系	低成本集散控制系统的研究及应用
5	姜杰	航天航空工业部 710 所	运载火箭姿态控制系统的一种故障分析
6	李重远，周创世 周香	中国科学院自动化研究所	2.8MWT 循环流化床燃烧微机控制系统

（凌惟侯供稿）