第14卷 第6期 自动化学报 Vol. 14, No. 6
1988年11月 ACTA AUTOMATICA SINICA Nov., 1988

广义离散随机线性系统的最优递推滤波方法(I)[1)]

王恩平　王朝珠
(中国科学院系统科学研究所)

摘　要

本文用加权最小二乘方法讨论了广义离散随机线性系统的最优状态估计，得到了系统状态的最优滤波估计的递推算法.

一、引　言

七十年代中期，H. H. Rosenbrock 提出了广义系统问题[2]，它不同于正常系统，没有因果性，然而具有很强的实际背景，因此引起了国内外许多学者的关注[3-6]. 特别进入八十年代以后，广义线性系统的研究越来越深入，出现了一些有应用前景的设计方法. 然而，目前不管是理论研究还是设计方法的讨论大多集中于确定性广义连续线性系统方面，尚未涉及广义离散随机线性系统领域. 做为初步探讨，本文用加权最小二乘方法讨论了广义离散随机线性系统的状态估计，并给出了状态的马尔可夫估计的递推形式.

已知广义离散随机线性系统

$$M\boldsymbol{x}_k = \phi\boldsymbol{x}_{k-1} + \boldsymbol{w}_{k-1}, \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{y}_k = \bar{H}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{v}_k. \tag{1.2}$$

其中，$\boldsymbol{x}_k \in \boldsymbol{R}^n$ 为状态矢量，$\boldsymbol{y}_k \in \boldsymbol{R}^m$ 为量测输出矢量，$\boldsymbol{w}_k \in \boldsymbol{R}^n$ 为模型随机干扰矢量，$\boldsymbol{v}_k \in \boldsymbol{R}^m$ 为量测干扰矢量，$\Phi \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ 是状态转移矩阵，$M \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ 是奇异矩阵，$\bar{H} \in \boldsymbol{R}^{m\times n}$ 是量测矩阵.

假设 1. Rank $M = \beta < n$，Rank $\phi = n$，$\det(zM - \phi) \not\equiv 0$，即系统(1.1)是正则系统. 这里 z 为 z-变换算符.

假设 2. $\{\boldsymbol{w}_k\}$，$\{\boldsymbol{v}_k\}$ 都是均值为零的独立随机序列，且

$$E\{\boldsymbol{w}_k\boldsymbol{w}_j^T\} = Q_k\delta_{k,j};\ E\{\boldsymbol{v}_k\boldsymbol{v}_j^T\} = R_k\delta_{k,j};$$
$$E\{\boldsymbol{w}_k\boldsymbol{v}_j^T\} = 0;\ E\{x_0\boldsymbol{v}_j^T\} = 0;\ k, j = 0, 1, 2, \cdots$$

这里

本文于1986年5月30日收到.
1) 本文得到中国科学院科学基金资助.

$$\delta_{k,j}=\begin{cases}1, & k=j;\\ 0, & k\neq j,\end{cases}$$

$E\{\cdot\}$ 为数学期望算子，Q_k，R_k 均为对称正定矩阵，$k=1,2,\cdots$.

依假设 1 可知，存在两个满秩矩阵 $S\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$，$P\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$，使得

$$SMP=\begin{bmatrix}I_{n_1} & 0\\ 0 & N\end{bmatrix},\quad S\Phi P=\begin{bmatrix}\Phi_1 & 0\\ 0 & I_{n_2}\end{bmatrix},\tag{1.3}$$

其中 Rank $\phi_1=n_1$，$N\in\boldsymbol{R}^{n_2\times n_2}$ 为幂零阵，$n_1+n_2=n$. 如果记

$$\boldsymbol{x}_k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1(k)\\ \boldsymbol{x}_2(k)\end{bmatrix},\quad S=\begin{bmatrix}\Gamma_1\\ \Gamma_2\end{bmatrix},\quad [H_1\ H_2]=\overline{H}P,\tag{1.4}$$

则系统(1.1)，(1.2)受限等价于如下系统:

$$\boldsymbol{x}_1(k)=\phi_1\boldsymbol{x}_1(k-1)+\Gamma_1\boldsymbol{w}_{k-1},\tag{1.5}$$

$$N\boldsymbol{x}_2(k)=\boldsymbol{x}_2(k-1)+\Gamma_2\boldsymbol{w}_{k-1},\tag{1.6}$$

$$\boldsymbol{y}_k=H_1\boldsymbol{x}_1(k)+H_2\boldsymbol{x}_2(k)+\boldsymbol{v}_k.\tag{1.7}$$

通常称(1.5)—(1.7)式为系统(1.1)，(1.2)的标准分解；式(1.5)称为因果子系统；式(1.6)称为非因果子系统. 不失一般性，下面研究系统(1.5)—(1.7)的状态估计问题.

二、广义系统的状态最优递推估计

为不引进更多的符号，令

$$\boldsymbol{x}_k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1(k)\\ \boldsymbol{x}_2(k)\end{bmatrix},\quad \phi=\begin{bmatrix}\phi_1^{-1} & 0\\ 0 & N\end{bmatrix},\quad G=\begin{bmatrix}\phi_1^{-1}\Gamma_1\\ \Gamma_2\end{bmatrix}\quad H=[H_1\ H_2].$$

则式(1.5)—(1.7)变为

$$\boldsymbol{x}_{k-1}=\phi\boldsymbol{x}_k-G\boldsymbol{w}_{k-1},\tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{y}_k=H\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{v}_k.\tag{2.2}$$

由(2.1)式得

$$\boldsymbol{x}_i=\phi^{k-i}\boldsymbol{x}_k-\sum_{j=i}^{k-1}\phi^{j-i}G\boldsymbol{w}_j,\quad i=1,2,\cdots,k-1.\tag{2.3}$$

将(2.3)代入(2.2)式得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_1&=H\phi^{k-1}\boldsymbol{x}_k-\sum_{j=1}^{k-1}H\phi^{j-1}G\boldsymbol{w}_j+\boldsymbol{v}_1,\\
\boldsymbol{y}_2&=H\phi^{k-2}\boldsymbol{x}_k-\sum_{j=1}^{k-1}H\phi^{j-2}G\boldsymbol{w}_j+\boldsymbol{v}_2,\\
&\cdots\cdots\\
\boldsymbol{y}_{k-1}&=H\phi\boldsymbol{x}_k-HG\boldsymbol{w}_{k-1}+\boldsymbol{v}_{k-1},\\
\boldsymbol{y}_k&=H\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{v}_k.
\end{aligned}\tag{2.4}$$

记

$$Y_{k-1}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_{k-1} \end{bmatrix},\quad D_{k,k-1}=\begin{bmatrix} H\phi^{k-1} \\ H\phi^{k-2} \\ \vdots \\ H\phi \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon_{k,k-1}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1-\sum_{j=1}^{k-1}H\phi^{j-1}Gw_j \\ \boldsymbol{v}_2-\sum_{j=2}^{k-1}H\phi^{j-1}Gw_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_{k-1}-HG\boldsymbol{w}_{k-1} \end{bmatrix}$$

$$Y_k=\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_{k-1} \\ \cdots \\ \boldsymbol{y}_k \end{bmatrix},\quad D_{k,k}=\begin{bmatrix} D_{k,k-1} \\ \cdots \\ H \end{bmatrix},\quad \varepsilon_{k,k}=\begin{bmatrix} \varepsilon_{k,k-1} \\ \cdots \\ \boldsymbol{v}_k \end{bmatrix}.$$

则可改写(2.4)式为

$$\begin{aligned} Y_k &= D_{k,k}\boldsymbol{x}_k+\varepsilon_{k,k}, \\ Y_{k-1} &= D_{k,k-1}\boldsymbol{x}_k+\varepsilon_{k,k-1}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

记

$$\begin{aligned} \Sigma_{k,k-1} &\triangleq E\{\varepsilon_{k,k-1}\varepsilon_{k,k-1}^T\}, \\ \Sigma_{k,k} &\triangleq E\{\varepsilon_{k,k}\varepsilon_{k,k}^T\}. \end{aligned}$$

引理 1. $\Sigma_{k,k-1}>0$，$\Sigma_{k,k}>0$，且

$$\Sigma_{k,k}^{-1}=\begin{bmatrix} \Sigma_{k,k-1}^{-1} & 0 \\ 0 & R_k^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{k,k-1}^{-1} = {} & \Sigma_{k-1,k-1}^{-1}-\Sigma_{k-1,k-1}^{-1}D_{k-1,k-1}G(Q_{k-1}^{-1} \\ & +G^TD_{k-1,k-1}^T\Sigma_{k-1,k-1}^{-1}D_{k-1,k-1}G)^{-1}G^TD_{k-1,k-1}^T\Sigma_{k-1,k-1}^{-1}. \end{aligned}$$

其中“$>$”表示按矩阵二次型进行比较.

证．令

$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_{k-1} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{k-1}H\phi^{j-1}Gw_j \\ \sum_{j=2}^{k-1}H\phi^{j-2}Gw_j \\ \vdots \\ HGw_{k-1} \end{bmatrix},$$

则

$$\varepsilon_{k,k-1}=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\xi}=\varepsilon_{k-1,k-1}-D_{k-1,k-1}G\boldsymbol{w}_{k-1}. \tag{2.6}$$

依假设 2，知

$$\Sigma_{k,k-1}=E\{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T\}+E\{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^T\}.$$

由 $E\{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T\}=\mathrm{diag}\{R_1,R_2,\cdots,R_{k-1}\}>0$，且 $E\{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^T\}\geqslant 0$，从而得 $\Sigma_{k,k-1}>0$.

另由式(2.6)和假设 2 直接得

$$\Sigma_{k,k-1} = \Sigma_{k-1,k-1} + D_{k-1,k-1} G Q_{k-1} G^T D_{k-1,k-1}^T.$$

对上式应用求逆公式直接得第二式.

由

$$\varepsilon_{k,k} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{k,k-1} \\ \cdots \\ \boldsymbol{v}_k \end{bmatrix}$$

和假设 2 直接得引理 1 的第一式. 证毕.

如果将式(1.1),(1.2)中的 $\boldsymbol{w}_{k-1}$ 看成非随机控制输入,且令 $\boldsymbol{v}_k = 0$, 得

$$\begin{aligned} M\boldsymbol{x}_k &= \phi \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{w}_{k-1}, \\ \boldsymbol{y}_k &= \bar{H}\boldsymbol{x}_k. \end{aligned} \tag{2.7}$$

定义 2.1. 对给定的确定性广义离散系统(2.7), 如果存在一个正整数 L, 使得由控制输入 $\boldsymbol{w}_{k-L}, \boldsymbol{w}_{k-L-1}, \cdots, \boldsymbol{w}_{k-1}$ 和量测 $\boldsymbol{y}_{k-L}, \boldsymbol{y}_{k-L-1}, \cdots, \boldsymbol{y}_k$ 能唯一地确定出状态 $\boldsymbol{x}_{k-L}, \boldsymbol{x}_{k-L-1}, \cdots, \boldsymbol{x}_k$, 则称式(2.7)是完全能观的,简称 $(M, \phi, \bar{H})$ 能观测.

从定义 2.1 出发易证如下引理:

引理 2. 广义离散系统(2.7)完全能观的充分必要条件是

$$\operatorname{Rank} \begin{bmatrix} zM - \phi \\ \bar{H} \end{bmatrix} = n, \quad \forall z \in \mathscr{Z}, \quad |z| \text{有限}, \tag{2.8}$$

$$\operatorname{Rank} \begin{bmatrix} M \\ \bar{H} \end{bmatrix} = n. \tag{2.9}$$

其中 $\mathscr{Z}$ 表示整个复平面, $|z|$ 为复数的模.

引理 3. 设 $(M, \phi, \bar{H})$ 是能观的,如果 $k-1 \geqslant n$, 则

$$\begin{aligned} D_{k,k}^T \Sigma_{k,k}^{-1} D_{k,k} &> 0, \\ D_{k-1,k-1}^T \Sigma_{k,k-1}^{-1} D_{k-1,k-1} &> 0. \end{aligned}$$

证. 由(1.3),(1.4),(2.9)式且注意到 $\operatorname{Rank} \phi_1 = n_1$, 易知

$$\operatorname{Rank} \begin{bmatrix} \phi_1^{-1} & 0 \\ 0 & N \\ H_1 & H_2 \end{bmatrix} = n.$$

因此有

$$\operatorname{Rank} \begin{bmatrix} \phi \\ H \end{bmatrix} = n. \tag{2.10}$$

当 $z \neq 0$ 且 $|z|$ 有限时,由(2.8)式且注意到(1.3),(1.4)式得

$$n = \operatorname{Rank} \begin{bmatrix} zM - \phi \\ \bar{H} \end{bmatrix} = \operatorname{Rank} \begin{bmatrix} zI - \phi_1 & 0 \\ 0 & zN - I \\ H_1 & H_2 \end{bmatrix}$$

$$= \operatorname{Rank} \begin{bmatrix} z\phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & zI & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^{-1} - z^{-1}I & 0 \\ 0 & N - z^{-1}I \\ H_1 & H_2 \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{Rank}\begin{bmatrix} z^{-1}I-\phi_1^{-1} & 0 \\ 0 & z^{-1}I-N \\ H_1 & H_2 \end{bmatrix} = \mathrm{Rank}\begin{bmatrix} z^{-1}I-\phi \\ H \end{bmatrix}. \tag{2.11}$$

于是由(2.10)和(2.11)式直接得，(ϕ, H) 是能观对，显然，当 $k-1 \geqslant n$ 时有

$$\mathrm{Rank}\ D_{k-1,k-1} = \mathrm{Rank}\ D_{k,k} = n.$$

由引理 1 知，$\Sigma_{k,k}^{-1} > 0$，$\Sigma_{k,k-1}^{-1} > 0$，因此有

$$D_{k,k}^T\Sigma_{k,k}^{-1}D_{k,k} > 0, \quad D_{k-1,k-1}^T\Sigma_{k,k-1}^{-1}D_{k-1,k-1} > 0.$$

证毕.

对方程(2.5)可以分别按如下性能指标

$$J_{k,k} = [Y_k - D_{k,k}\boldsymbol{x}_k]^T\Sigma_{k,k}^{-1}[Y_k - D_{k,k}\boldsymbol{x}_k], \tag{2.12}$$

$$J_{k,k-1} = [Y_{k-1} - D_{k,k-1}\boldsymbol{x}_k]^T\Sigma_{k,k-1}^{-1}[Y_{k-1} - D_{k,k-1}\boldsymbol{x}_k] \tag{2.13}$$

求 $\boldsymbol{x}_k$ 的最小二乘估计.

当 $(M, \phi, \bar{H})$ 能观时，由引理 3 和按加权最小二乘估计的理论知道，使式(2.12)达到极小的 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}$ 为

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k} = (D_{k,k}^T\Sigma_{k,k}^{-1}D_{k,k})^{-1}D_{k,k}^T\Sigma_{k,k}^{-1}Y_k. \tag{2.14}$$

从 $D_{k,k-1}$ 和 $D_{k,k}$ 的表达式易知

$$D_{k,k-1} = D_{k-1,k-1}\phi. \tag{2.15}$$

因而有

$$D_{k,k-1}^T\Sigma_{k,k-1}^{-1}D_{k,k-1} = \phi^TD_{k-1,k-1}^T\Sigma_{k,k-1}^{-1}D_{k-1,k-1}\phi.$$

由于 Rank $\phi < n$，从上式知 Rank $D_{k,k-1}^T\Sigma_{k,k-1}^{-1}D_{k,k-1} < n$，因此如果把 $\boldsymbol{x}_k$ 看作被估计变量，使性能指标 (2.13) 达到极小的估计是不存在的．然而由 (2.15) 式和引理 3 易知，若以 $\phi\boldsymbol{x}_k$ 作为被估计变量，使(2.13) 达到极小的最小二乘估计是存在的，若记它为 $\phi\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}$，则

$$\phi\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} = (D_{k-1,k-1}^T\Sigma_{k,k-1}^{-1}D_{k-1,k-1})^{-1}D_{k-1,k-1}^T\Sigma_{k,k-1}^{-1}Y_{k-1}, \tag{2.16}$$

由于 $\phi\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}$ 是一个整体，因此不可去掉 ϕ.

由 $D_{k,k}$ 的表达式且注意到(2.15)式及引理 1 易知

$$D_{k,k}^T\Sigma_{k,k}^{-1}D_{k,k} = \phi^TD_{k-1,k-1}^T\Sigma_{k,k-1}^{-1}D_{k-1,k-1}\phi + H^TR_k^{-1}H,$$

$$D_{k,k}^T\Sigma_{k,k}^{-1} = [\phi^TD_{k-1,k-1}^T\Sigma_{k,k-1}^{-1} \vdots H^TR_k^{-1}].$$

将上式代入(2.14)式并利用(2.16)式得

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k} = [\phi^TD_{k-1,k-1}^T\Sigma_{k,k-1}^{-1}D_{k-1,k-1}\phi + H^TR_k^{-1}H]^{-1} \cdot [\phi^TD_{k-1,k-1}^T\Sigma_{k,k-1}^{-1}D_{k-1,k-1}\phi\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + H^TR_k^{-1}\boldsymbol{y}_k]. \tag{2.17}$$

由于

$$[\phi^TD_{k-1,k-1}^T\Sigma_{k,k-1}^{-1}D_{k-1,k-1}\phi + H^TR_k^{-1}H]^{-1}[\phi^TD_{k-1,k-1}^T\Sigma_{k,k-1}^{-1}D_{k-1,k-1}\phi] = I - [\phi^TD_{k-1,k-1}^T\Sigma_{k,k-1}^{-1}D_{k-1,k-1}\phi + H^TR_k^{-1}H]^{-1}H^TR_k^{-1}H,$$

因此如果记

$$P_{k,k} = (D_{k,k}^T\Sigma_{k,k}^{-1}D_{k,k})^{-1}, \tag{2.18}$$

$$P_{k,k-1} = (D_{k-1,k-1}^T\Sigma_{k,k-1}^{-1}D_{k-1,k-1})^{-1}, \tag{2.19}$$

$$K_k = P_{k,k} H^T R_k^{-1}, \tag{2.20}$$

则(2.17)式变为

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k} = \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + K_k(\boldsymbol{y}_k - H\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}). \tag{2.21}$$

必须注意,(2.21)式只是一种形式上的写法. 除非明确 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}$ 的实际意义.

另外由引理 1 和(2.18),(2.19)式得

$$P_{k,k-1}^{-1} = P_{k-1,k-1}^{-1} - P_{k-1,k-1}^{-1} G(Q_{k-1}^{-1} + G^T P_{k-1,k-1}^{-1}(G)^{-1} G^T P_{k-1,k-1}^{-1}$$
$$= (P_{k-1,k-1} + GQ_{k-1}G^T)^{-1}.$$
$$D_{k-1,k-1}^T \Sigma_{k,k-1}^{-1} = D_{k-1,k-1}^T \Sigma_{k-1,k-1}^{-1} - P_{k-1,k-1}^{-1} G(Q_{k-1}^{-1}$$
$$+ G^T P_{k-1,k-1}^{-1} G)^{-1} G^T D_{k-1,k-1}^T \Sigma_{k-1,k-1}^{-1}.$$

再将上式代入(2.16)中得.

$$\phi\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} = P_{k,k-1} D_{k-1,k-1}^T \Sigma_{k-1,k-1}^{-1} Y_{k-1} - P_{k,k-1} P_{k-1,k-1}^{-1} G$$
$$\cdot (Q_{k-1}^{-1} + G^T P_{k-1,k-1}^{-1} G)^{-1} G^T D_{k-1,k-1}^T \Sigma_{k-1,k-1}^{-1} Y_{k-1}, \tag{2.22}$$
$$P_{k,k-1} = P_{k-1,k-1} + GQ_{k-1}G^T. \tag{2.23}$$

同时,由(2.14)和(2.19)式直接得

$$P_{k-1,k-1}^{-1} \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1} = D_{k-1,k-1}^T \Sigma_{k-1,k-1}^{-1} Y_{k-1}.$$

将上式代入(2.22)式并利用(2.23)式经计算直接得

$$\phi\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} = \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1}.$$

综上所述,可知系统(1.5)—(1.7)的状态估计 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}$ 由如下递推公式计算

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k} = \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + K_k(\boldsymbol{y}_k - H\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}), \tag{2.24}$$
$$\phi\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} = \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1}, \tag{2.25}$$
$$K_k = P_{k,k} H^T R_k^{-1}, \tag{2.26}$$
$$P_{k,k}^{-1} = \phi^T P_{k,k-1}^{-1} \phi + H^T R_k^{-1} H, \tag{2.27}$$
$$P_{k,k-1} = P_{k-1,k-1} + GQ_{k-1}G^T. \tag{2.28}$$

从加权最小二乘估计的性质知道, $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}$ 是在加权系数的选择范围内的线性无偏最小方差估计,其中 $P_{k,k}$ 就是估计误差的协方差矩阵. 虽然递推公式 (2.24)—(2.28) 形式上和正常系统的 Kalman 滤波公式完全类似,然而它们却有本质区别. 如果仍称 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}$ 为最优预测估计,那么因为 Rank $\phi < n$, 所以从(2.25)式是不能直接解出 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}$ 来. 由此可见对广义系统来说,其状态只能进行滤波,不能进行最优预测. 这主要是因为广义系统为非因果系统. 由(2.24),(2.25)式得出

$$\phi\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} = [I - K_{k-1}H]\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-2} + K_{k-1}\boldsymbol{y}_{k-1}. \tag{2.29}$$

记

$$\boldsymbol{z}_k = \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}, \quad A_{k-1} = [I - K_{k-1}H] = P_{k-1,k-1}\phi^T P_{k-1,k-2}^{-1}\phi,$$
$$\boldsymbol{\eta}_{k-1} = K_{k-1}\boldsymbol{y}_{k-1} = P_{k-1,k-1}H^T R_{k-1}^{-1}\boldsymbol{y}_{k-1}, \tag{2.30}$$

于是(2.29)式变为

$$\phi\boldsymbol{z}_k = A_{k-1}\boldsymbol{z}_{k-1} + \boldsymbol{\eta}_{k-1}, \quad k = 2, 3, \cdots. \tag{2.31}$$

由文献[4]可知,(2.31)有解的充分必要条件是

$$
\mathrm{Rank}\begin{bmatrix} -A_1 & \phi & & & \\ & -A_2 & \phi & & \\ & & \cdots & & \\ & & & -A_{k-1} & \phi \end{bmatrix} = n(k-1).
$$

然而，由于 Rank $\phi < n$，故知上式是不成立的，因此式(2.31)无解．这说明在这里最优预测估计确实是不存在的．可见，形式上的公式(2.24)，(2.25)是不足取的．

但是，不难算出

$$
I - K_k H = P_{k,k}\phi^T P_{k,k-1}^{-1}\phi,
$$

从而由(2.24)，(2.25)式直接得

$$
\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k} = P_{k,k}\phi^T P_{k,k-1}^{-1}\phi\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1} + K_k \boldsymbol{y}_k.
$$

最后我们直接得到如下定理：

定理 1. 在假设 1 和 2 的条件下，如果 $(M, \phi, \bar{H})$ 能观，则系统(1.5)—(1.7)的状态估计 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}$ 可由如下递推公式计算：

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k} &= P_{k,k}\phi^T P_{k,k-1}^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1} + K_k \boldsymbol{y}_k, \\
K_k &= P_{k,k}H^T R_k^{-1}, \\
P_{k,k-1} &= P_{k-1,k-1} + GQ_{k-1}G^T, \\
P_{k,k}^{-1} &= \phi^T P_{k,k-1}^{-1}\phi + H^T R_k^{-1} H.
\end{aligned}
$$

其初值可按有限步给定的数据直接计算．

注．虽然定理 1 提供了状态估计的递推算法，但是由于其中有多次矩阵求逆运算，因此该递推算法尚不具有实用性，为了能实现它，其算法需待改进．

参　考　文　献

[1] 王恩平，最佳线性递推滤波方法，数学的实践与认识，1972，第 6 期．

[2] Rosenbrock, H. H., State Space and Multivariable Theory, 1970, New York, Wiley.

[3] Compbell, S. L., Singular Systems of Differential Equation I, II. 1982, Pitman Advanced. Publishing Program Sanfrancisco London Melbourne.

[4] Luenberger, D. G., Dynamic Equations in Descriptor Form, *IEEE Trans.* **AC-22**(1977), 312—321.

[5] Cobb, D., Controllability Observability and Duality in Singutar Systems, *IEEE Trans.* **AC-29**(1984), 1076—1082.

[6] 王朝珠、戴立意，广义动态系统，控制理论与应用，**3**(1986)，1—12.

[7] 王朝珠、戴立意，广义系统的正常状态观测器，系统科学与数学，**4**(1986)，307—313.

OPTIMUM RECURRENCE FILTERING METHOD FOR SINGULAR DISCRETE STOCHASTIC LINEAR SYSTEMS (I)

Wang Enping　Wang Chaozhu

(Institute of Systems Science, Academia Sinica)

Abstract

In this paper, the optimum state estimate of the singular riscrete stochastic linear system is discussed by the weighted least squares method. For open loop, the recurrence state estimate formulas are obtained.