第 14 卷 第 6 期
1988 年 11 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 14, No. 6
Nov., 1988

线性稳态大系统优化与控制的二次等价性原理与点凸化技术（PCT）

林 杰 万百五
（西安交通大学）

摘 要

本文研究了线性稳态大系统优化与控制问题中的二次等价性原理，证明了非退化的线性规划问题可以等价为正定二次规划问题，线性稳态控制问题可以等价为具有线性约束二次凸目标的稳态控制问题. 基于等价性原理，本文提出了点凸化技术（PCT），用于凸化不能应用关联平衡法（IBM）的线性问题. 最后给出应用例子，说明 PCT 在求解线性稳态大系统优化与控制问题中的应用.

一、概 述

在经济与管理问题中，其目标通常是使经济效益最大，所以一般都是线性问题. 对于大工业过程的最优控制问题，如果把企业的经济效益作为目标，也会导致线性目标函数. 所以具有线性目标函数的问题在实际中是经常遇到的. 如果在求解这类问题时，对约束作线性化处理，就意味着要求解具有线性约束和线性目标的大系统优化与控制问题.

在大系统稳态优化与控制中，关联平衡法（IBM）应用十分广泛[1]. 但对于线性问题(线性约束，线性目标)来说，它往往是不可应用的. 很明显的例子就是线性规划问题.

利用增广 Lagrangian 法固然可实现对线性目标的凸化[1]，使有些线性问题经凸化后变为可以应用关联平衡法，但这样做的代价是使目标函数丧失了可分性，从而给问题的分解带来很大困难[2].

利用序列凸化方法（SCM）[3]，可以使原问题等价于一个序列凸规划问题，序列中的每个问题都是严格凸的，而它们的解所成点列的极限为原问题的最优解. 这样做既保持了目标的可分性，又解决了原问题不可应用关联平衡法的问题. 所以 SCM 在处理这类问题时是很有效的.

一般来说 SCM 是无限步收敛的，尽管可以通过改变系数 p 来任意调节收敛比，我们仍希望它是有限步收敛的，特别对于线性问题. 在实际应用 SCM 的过程中，往往发现如果被凸化的问题是线性的(线性约束，线性目标)，SCM 一般是有限步收敛的. 本文作者深入研究了这种现象，并提出了线性稳态优化与控制中的二次等价性原理. 等价性原理

本文于 1986 年 5 月 28 日收到.

指出，非退化的线性规划问题可以等价为正定二次规划问题；而线性稳态控制问题则可以等价为一个具有线性约束二次凸目标的稳态控制问题．由等价性原理，很自然就产生了在任意点将目标函数变成严格凸函数的技术（点凸化技术 PCT），利用它可直接对线性问题进行凸化．由于 PCT 是从 SCM 中演变来的，所以它也可保持凸化后目标的可分性．由于 PCT 无需迭代，故是处理线性大系统优化与控制问题的有力工具．

二、线性规划问题中的等价性原理

一般线性规划问题都可描述为

PB1
$$\min_{\boldsymbol{x}}\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}\}$$
$$s.t. A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{x}\geqslant 0.$$

其中 $\boldsymbol{x}\in R^n$；$\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 分别为 n 维和 m 维向量；A 为 $m\times n$ 矩阵，且为行满秩． 关于问题 PB1，有如下的二次等价性原理：

定理 1． 若 PB1 满足严格互补条件，则对任给的 $\boldsymbol{x}^o\in R^n$，存在 $\rho>0$，使问题

PB($\boldsymbol{x}^o$, ρ)
$$\min_{\boldsymbol{x}}\left\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}+\frac{\rho}{2}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^o\|^2\right\}$$
$$s.\ t.\ A\boldsymbol{x}=b,\quad \boldsymbol{x}\geqslant 0$$

等价于问题 PB1．

证：易知 PB1 的 Lagrangian 为
$$L_1=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\lambda}^T(A\boldsymbol{x}-b)-\gamma^T\boldsymbol{x}. \tag{1}$$
设 $\boldsymbol{x}^*$ 为 PB1 的最优解，$\boldsymbol{\lambda}^*$ 和 $\boldsymbol{\gamma}^*$ 为对应的最优乘子．由最优性条件 $\nabla_{\boldsymbol{x}}L_1=0$，$\nabla_{\lambda}L_1=0$ 和 $\boldsymbol{\gamma}^T\boldsymbol{x}=0$，$\boldsymbol{\gamma}\geqslant 0$，$\boldsymbol{x}\geqslant 0$，有
$$\boldsymbol{c}+A^T\boldsymbol{\lambda}^*-\boldsymbol{\gamma}^*=0, \tag{2}$$
$$A\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{b}=0,\quad \boldsymbol{\gamma}^{*T}\boldsymbol{x}^*=0,\quad \boldsymbol{\gamma}^*\geqslant 0,\quad \boldsymbol{x}^*\geqslant 0. \tag{3}$$
由于 PB1 满足严格互补条件，故必有 m 个 γ_i^* 等于 0，$n-m$ 个 γ_i^* 大于 0．由 (3) 式还知若 $\gamma_i^*=0$，则 $x_i^*>0$；若 $\gamma_i^*>0$，则 $x_i^*=0$． 将 $\boldsymbol{x}^*$ 按其对应的最优基划分有 $\boldsymbol{x}^{*T}=[\boldsymbol{x}_B^{*T}\vdots 0]$，$\boldsymbol{x}_B^*>0$，相应地有 $\boldsymbol{\gamma}^{*T}=[0\vdots\boldsymbol{\gamma}_D^{*T}]$，$\boldsymbol{\gamma}_D^*>0$，$\boldsymbol{c}^T=[\boldsymbol{c}_B^T\vdots\boldsymbol{c}_D^T]$，$A=[B\vdots D]$，$B$ 是满秩矩阵．于是(2)式又可写为
$$\boldsymbol{c}_D+D^T\boldsymbol{\lambda}^*=\boldsymbol{\gamma}_D^*,\quad \boldsymbol{c}_B+B^T\boldsymbol{\lambda}^*=0. \tag{4}$$
写出 PB($\boldsymbol{x}^o$, ρ) 的 Lagrangian 有
$$L_2=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}+\frac{\rho}{2}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^o\|^2+\boldsymbol{\lambda}^T(A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})-\boldsymbol{\gamma}^T\boldsymbol{x}. \tag{5}$$
由 PB($\boldsymbol{x}^o$, ρ) 的最优性条件 $\nabla_{\boldsymbol{x}}L_2=0$，$\nabla_{\lambda}L_2=0$ 和 $\boldsymbol{\gamma}^T\boldsymbol{x}=0$，$\boldsymbol{\gamma}\geqslant 0$，$\boldsymbol{x}\geqslant 0$ 有
$$\boldsymbol{c}+\rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^o)+A^T\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\gamma}=0, \tag{6}$$
$$A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}=0,\quad \boldsymbol{\gamma}\geqslant 0,\quad \boldsymbol{x}\geqslant 0,\quad \boldsymbol{\gamma}^T\boldsymbol{x}=0. \tag{7}$$
要想证明 PB($\boldsymbol{x}^o$, ρ) 与 PB1 等价，只须证 $\exists\hat{\boldsymbol{\lambda}}\in R^m$，$\hat{\boldsymbol{\gamma}}\in R^n$，$\hat{\boldsymbol{\gamma}}\geqslant 0$，$\hat{\boldsymbol{\gamma}}^T\boldsymbol{x}^*=0$． 使
$$\boldsymbol{c}+\rho(\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{x}^o)+A^T\hat{\boldsymbol{\lambda}}-\hat{\boldsymbol{\gamma}}=0. \tag{8}$$
其中 $\boldsymbol{x}^*$ 为 PB1 的最优解．

易知对所有满足 $\bar{\boldsymbol{\gamma}} \geqslant 0$, $\bar{\boldsymbol{\gamma}}^T \boldsymbol{x}^* = 0$ 的 $\bar{\boldsymbol{\gamma}}$ 来说,必有 $\bar{\boldsymbol{\gamma}}^T = [0 \vdots \bar{\boldsymbol{\gamma}}_D^T]$, $\bar{\boldsymbol{\gamma}}_D \in R^{n-m}$, $\bar{\boldsymbol{\gamma}}_D \geqslant 0$, 且 $\bar{\boldsymbol{\gamma}}$ 的划分与 $\boldsymbol{\gamma}^*$ 的划分完全相同. 仿照式(4)可将(8)式写为

$$\boldsymbol{c}_D - \rho \boldsymbol{x}_D^o + D^T \hat{\boldsymbol{\lambda}} - \hat{\boldsymbol{\gamma}}_D = 0, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{c}_B + \rho(\boldsymbol{x}_B^* - \boldsymbol{x}_B^o) + B^T \hat{\boldsymbol{\lambda}} = 0. \tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{x}^{oT} = [\boldsymbol{x}_B^{oT} \vdots \boldsymbol{x}_D^{oT}]$. 于是欲证 PB($\boldsymbol{x}^o$, ρ) 与 PB1 等价, 只须证 $\exists \hat{\boldsymbol{\lambda}} \in R^m$, $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_D \in R^{n-m}$, $\bar{\boldsymbol{\gamma}}_D \geqslant 0$, 使(9)和(10)式成立即可. 令 $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda}^* + \tilde{\boldsymbol{\lambda}}$, $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_D = \boldsymbol{\gamma}_D^* + \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_D$, 则由(4)式又可将(9),(10)式写为

$$-\rho \boldsymbol{x}_D^o + D^T \tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_D, \tag{11}$$

$$\rho(\boldsymbol{x}_B^* - \boldsymbol{x}_B^o) + B^T \tilde{\boldsymbol{\lambda}} = 0. \tag{12}$$

由于 B 是满秩的,故可将(11),(12)式联立消去 $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ 得

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_D = -\rho[D^T(B^T)^{-1}(\boldsymbol{x}_B^* - \boldsymbol{x}_B^o) + \boldsymbol{x}_D^o]. \tag{13}$$

由(13)式可以看出,对任给的 $\boldsymbol{x}^o$, 只要 ρ 充分小,就可使 $\boldsymbol{\gamma}_D^* \geqslant |\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_D|$, 从而 $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_D \geqslant 0$. 于是对任给的 $\boldsymbol{x}^o \in R^n$ 必存在 $\rho > 0$, $\hat{\boldsymbol{\lambda}} \in R^m$, $\hat{\boldsymbol{\gamma}} \in R^n$, $\hat{\boldsymbol{\gamma}} \geqslant 0$, 使 $\boldsymbol{x}^*$ 满足 PB($\boldsymbol{x}^o$, ρ) 的一阶必要条件. 由于 PB($\boldsymbol{x}^o$, ρ) 的目标函数是严格凸的,故 $\boldsymbol{x}^*$ 是 PB($\boldsymbol{x}_0$, ρ) 的唯一的最优解. 另一方面 PB1 满足严格互补条件,故最优解唯一,即为 $\boldsymbol{x}^*$. 从而 PB1 与 PB·($\boldsymbol{x}^o$, ρ) 等价. 定理证毕. □

容易看出 PB($\boldsymbol{x}^o$, ρ) 的目标函数不仅是严格凸的,而且还是可分的, 因此很适宜用价格协调法来求解. 此外, PB($\boldsymbol{x}^o$, ρ) 的 Hessen 阵具有非常简单的形式 ρI_n. 这将使我们有可能采用具有二次收敛性质的协调算法来求解 PB($\boldsymbol{x}^o$, ρ)[5]. 由于 PB1 与 PB·($\boldsymbol{x}^o$, ρ) 是等价的,所以可以通过求解问题 PB($\boldsymbol{x}^o$, ρ) 得到 PB1 的解.

三、线性稳态控制问题中的二次等价性原理

一般的稳态控制问题可描述为[1,4]

PB2
$$\min_{\boldsymbol{c},\boldsymbol{u},\boldsymbol{y}} Q(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{u})$$

$$s.\ t.\ \boldsymbol{u} = H\boldsymbol{y}, \begin{cases} y_i = F_i(c_i, u_i) \\ g_i(c_i, u_i) \leqslant 0 \end{cases} \qquad i = \overline{1, N}$$

或写成总体形式

PB2
$$\min_{\boldsymbol{c},\boldsymbol{u},\boldsymbol{y}} Q(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{u})$$

$$s.\ t.\quad \boldsymbol{u} = H\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y} = F(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{u}), \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{u}) \leqslant 0.$$

其中 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{y} \in R^n$, $\boldsymbol{c} \in R^m$; $\boldsymbol{g}(\cdot, \cdot)$ 为从 $R^m \times R^n \to R^l$ 中的连续可微映射, $\boldsymbol{F}(\cdot, \cdot)$ 为 $R^m \times R^n \to R^n$ 中的连续可微映射, $Q(\cdot, \cdot)$ 是 $R^m \times R^n$ 上的连续可微函数; N 是子系统的数目. 对于线性稳态控制问题来说,映射 $\boldsymbol{g}(\cdot, \cdot)$, $\boldsymbol{F}(\cdot, \cdot)$ 和函数 $Q(\cdot, \cdot)$ 均为线性的. 故 PB2 可进一步写为

PB3
$$\min_{\boldsymbol{c},\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}} \{\boldsymbol{q}_1^T \boldsymbol{c} + \boldsymbol{q}_2^T \boldsymbol{u}\}$$

$$\begin{aligned} s.\ t.\quad & \boldsymbol{u} = H\boldsymbol{y}, \\ & \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{c} + B\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}, \end{aligned}$$

$$Ec + Ru + d + z = 0, \quad z \geqslant 0.$$

其中 q_1, q_2, f, d 分别为 m, n, n, l 维向量,而 A, B, E, R 分别为 $n\times m$, $n\times n$, $l\times m$, $l\times n$ 矩阵,z 为松弛变量;H 是结构矩阵,由 1 和 0 组成[1,4].

引理 1. 设线性规划问题

PB4
$$\min_{c}\{\hat{q}^T c\}$$
$$s.t. \hat{A}c \leqslant \hat{d}$$

的最优解存在,且满足严格互补条件. 其中 $c\in R^m$, $\hat{d}$ 和 $\hat{q}$ 分别为 l 和 m 维向量. $\hat{A}$ 为 $l\times m$ 矩阵,且为列满秩的. 则对任给的 $c^0\in R^m$, 必存在 $\rho>0$, 使问题

$PB(c^0,\rho)$
$$\min_{c}\left\{\hat{q}^T c+\frac{\rho}{2}\|c-c^o\|_G^2\right\}$$
$$s.\ t.\quad \hat{A}c\leqslant \hat{d}$$

与问题 PB4 等价. 其中 G 为 $m\times m$ 非负定对称矩阵.

证. 易知问题 PB4 的对偶问题为

DP4
$$\max_{\gamma}\{\hat{d}^T\gamma\}$$
$$s.\ t.\quad \hat{A}^T\gamma=\hat{q},\quad \gamma\geqslant 0$$

由于 PB4 的最优解存在,且满足严格互补条件,故 DP4 的最优解存在且唯一. 注意到 $\hat{A}^T$ 是行满秩的,故由 DP4 的最优性条件必有

$$\hat{B}^T\gamma_B^*=\hat{q},\quad \gamma_B^*>0. \tag{14}$$

其中 $\gamma^{*T}=[\gamma_B^{*T}\vdots 0]$ 为 DP4 的最优解, $\hat{A}^T=[\hat{B}^T\vdots\hat{D}^T]$,而 $\hat{B}^T$ 为 DP4 的最优基所对应的基本矩阵.

令
$$\hat{\gamma}^T=[\hat{\gamma}_T^B\vdots 0],\quad \hat{\gamma}_B=\gamma_B^*+\tilde{\gamma}_B,\quad \hat{\gamma}_B>0. \tag{15}$$

若要使 $PB(c^o,\rho)$ 与 PB4 等价,则由 $PB(c^o,\rho)$ 的最优性条件知, 应有 $\hat{\gamma}$ 满足(15)式,且使下式成立.

$$\rho G(c^*-c^o)-\hat{A}^T\hat{\gamma}+\hat{q}=0, \tag{16}$$

或者说,应存在 $|\tilde{\gamma}_B|\leqslant\gamma_B^*$, 使

$$\rho G(c^*-c^o)-\hat{B}^T(\gamma_B^*+\tilde{\gamma}_B)+\hat{q}=0. \tag{17}$$

其中 c^* 为问题 PB4 的最优解. 利用式(14)并注意到 $\hat{B}^T$ 的可逆性,可将(17)式写成

$$\tilde{\gamma}_B=\rho(\hat{B}^T)^{-1}G(c^*-c^o). \tag{18}$$

由(18)式 $\tilde{\gamma}_B$ 的表达式知只要 ρ 充分小,$|\tilde{\gamma}_B|$ 就可任意接近于 0. 注意到 $\gamma_B^*>0$, 从而对任给的 $c^o\in R^m$, 必存在 $\rho>0$, 使 $\hat{\gamma}_B\geqslant 0$, 于是 $PB(c^o,\rho)$ 与 PB4 等价. 引理证毕. □

定理 2. 设问题 PB3 的关联约束 $u=Hy$ 与系统方程 $y=Ac+Bu+f$ 满足正则性条件,即对任意给定的控制 c, 由关联约束与系统方程可唯一确定关联输入 u 和系统输出 y. 设 PB3 的不等式约束满足严格互补条件,并设 PB3 的最优解存在且唯一. 则对任给的 $c^o\in R^m$, u^o, $y^o\in R^n$, $z^o\in R^l$, $\exists\rho>0$, 使问题

$PB(c^o, u^o, z^o, \rho)$
$$\min_{c,u,}\left\{q_1^T c+q_2^T u+\frac{\rho}{2}\|c-c^o\|^2+\frac{\rho}{2}\|u-u^o\|^2+\frac{\rho}{2}\|z-z^o\|^2\right\}$$

$$s.\ t.\quad \boldsymbol{u}=H(A\boldsymbol{c}+B\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f}),\quad E\boldsymbol{c}+R\boldsymbol{u}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{z}=0,\quad \boldsymbol{z}\geqslant 0. \tag{19}$$

PB($\boldsymbol{c}^o$, $\boldsymbol{u}^o$, $\boldsymbol{y}^o$, $\boldsymbol{z}^o$, ρ)

$$\min_{\boldsymbol{c},\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}}\left\{\boldsymbol{q}_1^T\boldsymbol{c}+\boldsymbol{q}_2^T\boldsymbol{u}+\frac{\rho}{2}\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{c}^o\|^2+\frac{\rho}{2}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^o\|^2+\frac{\rho}{2}\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^o\|^2+\frac{\rho}{2}\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}^o\|^2\right\}$$

$$s.\ t.\quad \boldsymbol{u}=H\boldsymbol{y},\quad \boldsymbol{y}=A\boldsymbol{c}+B\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f},\quad E\boldsymbol{c}+R\boldsymbol{u}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{z}=0,\quad \boldsymbol{z}\geqslant 0 \tag{20}$$

均与问题 PB3 等价.

证．由于 PB3 的约束方程 $\boldsymbol{u}=H\boldsymbol{y}$ 和系统方程 $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{c}+B\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f}$ 满足正则性条件，故可将式(20)中的 $\boldsymbol{y}$，式(19)、(20)中的 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{z}$ 关于 $\boldsymbol{c}$ 解出

$$\boldsymbol{u}=(I-HB)^{-1}HA\boldsymbol{c}+(I-HB)^{-1}H\boldsymbol{f}=P_1\boldsymbol{c}+\boldsymbol{h}_1, \tag{21}$$

$$\boldsymbol{y}=(BP_1+A)\boldsymbol{c}+B\boldsymbol{h}_1+\boldsymbol{f}=P_2\boldsymbol{c}+\boldsymbol{h}_2, \tag{22}$$

$$\boldsymbol{z}=-(E+RP_1)\boldsymbol{c}-(R\boldsymbol{h}_1+\boldsymbol{d})=-P_3\boldsymbol{c}+\boldsymbol{h}_3. \tag{23}$$

其中 $P_1=(I-HB)^{-1}HA$，$P_2=BP_1+A$，$P_3=E+RP_1$，$\boldsymbol{h}_1=(I-HB)^{-1}H\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{h}_2=B\boldsymbol{h}_1+\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{h}_3=-(R\boldsymbol{h}_1+\boldsymbol{d})$（这里 $(I-HB)$ 的可逆性是由约束的正则性所保证的）．将(21)—(23)式中的 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ 分别代入问题 PB($\boldsymbol{c}^o$, $\boldsymbol{u}^o$, $\boldsymbol{z}^o$, ρ)，PB($\boldsymbol{c}^o$, $\boldsymbol{u}^o$, $\boldsymbol{y}^o$, $\boldsymbol{z}^o$, ρ)和 PB3，整理后立即知，对于任给的 $\boldsymbol{c}^o$, $\boldsymbol{u}^o$, $\boldsymbol{y}^o$, $\boldsymbol{z}^o$ 和 $\rho>0$，PB($\boldsymbol{c}^o$, $\boldsymbol{u}^o$, $\boldsymbol{z}^o$, ρ) 等价于问题

PB($\hat{\boldsymbol{c}}_1^o$, G_1, ρ)

$$\min_{\boldsymbol{c}}\left\{\boldsymbol{q}_3^T\boldsymbol{c}+\frac{\rho}{2}\|\boldsymbol{c}-\hat{\boldsymbol{c}}_1^o\|_{G_1}^2\right\}$$

$$s.\ t.\quad P_3\boldsymbol{c}\leqslant\boldsymbol{h}_3.$$

PB($\boldsymbol{c}^o$, $\boldsymbol{u}^o$, $\boldsymbol{y}^o$, $\boldsymbol{z}^o$, ρ) 等价于问题

PB($\hat{\boldsymbol{c}}_2^o$, G_2, ρ)

$$\min_{\boldsymbol{c}}\left\{\boldsymbol{q}_3^T\boldsymbol{c}+\frac{\rho}{2}\|\boldsymbol{c}-\hat{\boldsymbol{c}}_2^o\|_{G_2}^2\right\}$$

$$s.\ t.\quad P_3\boldsymbol{c}\leqslant\boldsymbol{h}_3.$$

而问题 PB3 则与下面的问题等价.

PB5

$$\min_{\boldsymbol{c}}\{\boldsymbol{q}_3^T\boldsymbol{c}\}$$

$$s.\ t.\quad P_3\boldsymbol{c}\leqslant\boldsymbol{h}_3.$$

其中 $G_1=I+P_1^TP_1+P_3^TP_3$，$G_2=G_1+P_2^TP_2$，$\boldsymbol{q}_3=\boldsymbol{q}_1+P_1^T\boldsymbol{q}_2$，$\hat{\boldsymbol{c}}_1^o=G_1^{-1}(\boldsymbol{c}^o+P_1^T\boldsymbol{u}^o-P_1^T\boldsymbol{h}_1+P_3^T\boldsymbol{h}_3-P_3^T\boldsymbol{z}^o)$，$\hat{\boldsymbol{c}}_2^o=G_2^{-1}(G_1\hat{\boldsymbol{c}}_1^o-P_2^T\boldsymbol{h}_2+P_2^T\boldsymbol{y}^o)$.

可以证明 P_3 是列满秩的，因若不然，则存在初等变换阵 S，使 $\bar{P}=P_3S=[\bar{P}_1\vdots 0]$．其中 $\bar{P}_1$ 是满秩的． 令 $\bar{\boldsymbol{c}}=S^{-1}\boldsymbol{c}=[\bar{\boldsymbol{c}}_1^T\vdots\bar{\boldsymbol{c}}_2^T]^T$，$\bar{\boldsymbol{q}}=S^T\boldsymbol{q}_3=[\bar{\boldsymbol{q}}_1^T\vdots\bar{\boldsymbol{q}}_2^T]$． 则显然有 PB5 等价于问题

PB6

$$\min_{\bar{\boldsymbol{c}}_1,\bar{\boldsymbol{c}}_2}\{\bar{\boldsymbol{q}}_1^T\bar{\boldsymbol{c}}_1+\bar{\boldsymbol{q}}_2^T\bar{\boldsymbol{c}}_2\}$$

$$s.\ t.\quad \bar{P}_1\bar{\boldsymbol{c}}_1\leqslant\boldsymbol{h}_3. \tag{24}$$

易证 PB6 的 $\bar{\boldsymbol{q}}_2$ 等于 0，事实上若 $\bar{\boldsymbol{q}}_2$ 不等于 0，则可令 $\bar{\boldsymbol{c}}_2=-\bar{\boldsymbol{q}}_2t$，$t\in R^+$，$\bar{\boldsymbol{c}}_1$ 满足式(24)．显然 $\forall t\in R^+$，如此定义的 $\bar{\boldsymbol{c}}_1$ 和 $\bar{\boldsymbol{c}}_2$ 是 PB6 的可行解，令 $t\to\infty$ 便知 PB6 无有界

最优解. 但 PB6 等价于 PB5, 从而又等价于 PB3, 故而知与定理假设中 PB3 的最优解的存在性相矛盾. 于是 $\bar{q}_2=0$. 但由 PB6 知若 $\bar{q}_2=0$, 则其最优解不唯一, 而这又和 PB3 的最优解唯一的假设相矛盾. 从而 P_3 必然是列满秩的.

由定理所给条件知 PB3 满足严格互补条件. 故由引理 1 知,对任给的 $\boldsymbol{c}^o$, $\boldsymbol{u}^o$, $\boldsymbol{y}^o$, $\boldsymbol{z}^o$ 必存在 ρ_1, $\rho_2>0$, 使 PB($\hat{\boldsymbol{c}}_1^o$, G_1, ρ_1) 和 PB($\hat{\boldsymbol{c}}_2^o$, G_2, ρ_2) 均与 PB3 等价. 从而便有 PB3 等价于 PB($\boldsymbol{c}^o$, $\boldsymbol{u}^o$, $\boldsymbol{z}^o$, ρ_1) 和 PB($\boldsymbol{c}^o$, $\boldsymbol{u}^o$, $\boldsymbol{y}^o$, $\boldsymbol{z}^o$, ρ_2). □

几乎与上节的情况完全一样, PB($\boldsymbol{c}^o$, $\boldsymbol{u}^o$, $\boldsymbol{z}^o$, ρ_1) 和 PB($\boldsymbol{c}^o$, $\boldsymbol{u}^o$, $\boldsymbol{y}^o$, $\boldsymbol{z}^o$, ρ_2) 均具有可分的严格凸的二次目标函数,且 Hessen 阵具有十分简单的形式 ρI_n. 由定理 2 知,为求 PB3 的解, 只需求解 PB($\boldsymbol{c}^o$, $\boldsymbol{u}^o$, $\boldsymbol{z}^o$, ρ_1) 和 PB($\boldsymbol{c}^o$, $\boldsymbol{u}^o$, $\boldsymbol{y}^o$, $\boldsymbol{z}^o$, ρ_2) 中任意一个就可以了. 而这两个问题通常可认为是 PB3 的两种等价形式. 在定理 2 中建立 PB3 的两种等价形式的目的在于,不同的等价形式可以导出不同的分解协调方案.

四、点凸化技术 (PCT) 及其应用

所谓点凸化技术 (PCT), 实际上就是对任给的线性规划问题 PB1 或稳态控制问题 PB3, 寻找对应的等价问题 PB($\boldsymbol{x}^o$, ρ) 或 PB($\boldsymbol{c}^o$, $\boldsymbol{u}^o$, $\boldsymbol{z}^o$, ρ) 或 PB($\boldsymbol{c}^o$, $\boldsymbol{u}^o$, $\boldsymbol{y}^o$, $\boldsymbol{z}^o$, ρ) 的一种方法. 显然 PCT 的主要任务就在于估算 ρ. ρ 的估算一般是通过经验公式及试凑的方法, 好在我们选择 ρ 的准则是单边的,即越小越好(当然在计算机字长允许的情况下).

对于线性规划 PB1 来说,一般可按下式估计 ρ:

$$\rho\leqslant 0.001d_1\|\boldsymbol{c}\|/\|\boldsymbol{b}\|. \tag{25}$$

其中 $d_1=\max_i\{\|A_1\|, \|A_2\|,\cdots,\|A_m\|\}$, $A^T=[A_1^T, A_2^T, \cdots, A_m^T]$, $\|A_i\|^2=\sum_j a_{ij}^2$, $\|\boldsymbol{c}\|^2=\sum_j c_j^2$, $\|b\|^2=\sum_i b_i^2$.

完全类似于(25)式,可得对应于稳态控制问题 PB3 的参数 ρ 的估计公式

$$\rho\leqslant 0.001d_2\|\boldsymbol{q}_3\|/\|\boldsymbol{h}_3\|. \tag{26}$$

其中 $d_2=\max_i\{\|P_3^{(1)}\|, \|P_3^{(2)}\|,\cdots,\|P_3^{(l)}\|\}$, $P_3^T=[P_3^{(1)T},\cdots,P_3^{(l)T}]$, $P_3=E+RP_1$, $\boldsymbol{q}_3=\boldsymbol{q}_1+P_1^T\boldsymbol{q}_2$, $P_1=(I-HB)^{-1}HA$, $\boldsymbol{h}_3=-(R\boldsymbol{h}_1+\boldsymbol{d})$, $\boldsymbol{h}_1=(I-HB)^{-1}H\boldsymbol{f}$. 而 A, B, E, R, H, $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{d}$ 的定义同 PB3. 注意估计式(26)适用于 PB3 的两种等价形式.

在用经验公式(25)或(26)确定了 ρ 以后,还需检验这样选择的 ρ 是否合理. 办法很简单,分别用 $\rho_1=\rho$ 和 $\rho_1=\frac{1}{2}\rho$ 计算点凸化问题, 若得到的最优解相同则证明 ρ 的选择是合理的,且这时得到的最优解即为原问题的最优解.若得到的最优解不同则说明 ρ 太大, 令 $\rho=\frac{1}{2}\rho$, 再重复上面的过程,直到解相同为止.

下面通过具体例子说明 PCT 在线性规划及稳态控制问题(线性约束, 线性目标)中的应用.

例. 本题由五个子系统组成，分别为

SUB1
$$\begin{cases}\min\{14c_{11}+5u_{11}\}\\ s.\ t.\ \ c_{11}+u_{11}-y_{11}-y_{12}=50\\ \quad c_{11}\leqslant 300,\ u_{11}\leqslant 100,\\ \quad c_{11}\geqslant 0,\ u_{11}\geqslant 0;\end{cases}$$

SUB2
$$\begin{cases}\min\{1.2u_{21}\}\\ s.\ t.\ \ u_{21}-y_{21}-y_{22}=30\\ \quad u_{21}\leqslant 300,\ u_{21}\geqslant 0;\end{cases}$$

SUB3
$$\begin{cases}\min\{15c_{31}+0.8u_{31}\}\\ s.\ t.\ \ c_{31}+u_{31}-y_{31}=20\\ \quad c_{31}\leqslant 150,\ u_{31}\leqslant 500\\ \quad c_{31}\geqslant 0,\ u_{31}\geqslant 0;\end{cases}$$

SUB4
$$\begin{cases}\min\{12u_{41}+14u_{42}\}\\ s.\ t.\ \ u_{41}+u_{42}-y_{41}-y_{42}=150\\ \quad u_{41}\leqslant 200,\ u_{42}\leqslant 80\\ \quad u_{41}\geqslant 0,\ u_{42}\geqslant 0;\end{cases}$$

SUB5
$$\begin{cases}\min\{10u_{51}+20u_{52}\}\\ s.\ t.\ \ u_{51}+u_{52}=200\\ \quad u_{51}\leqslant 140,\ u_{52}\leqslant 80\\ \quad u_{51}\geqslant 0,\ u_{52}\geqslant 0.\end{cases}$$

关联约束为　$y_{11}=u_{21},\ y_{12}=u_{52},\ y_{21}=u_{31},\ y_{22}=u_{41},\ y_{31}=u_{42},\ y_{41}=u_{51},\ y_{42}=u_{11}$.

令 $c_{11}^0=c_{31}^0=u_{11}^0=u_{21}^0=u_{31}^0=u_{41}^0=u_{42}^0=u_{51}^0=u_{52}^0=0$，并令 ρ 分别等于 0.002 和 0.001，用 PCT 求解可得

$$c_{11}^1=c_{11}^2=c_{11}^*=300,\ u_{11}^1=u_{11}^2=u_{11}^*=0,\ u_{21}^1=u_{21}^2=u_{21}^*=170$$
$$c_{31}^1=c_{31}^2=c_{31}^*=150,\ u_{31}^1=u_{31}^2=u_{31}^*=70,\ u_{41}^1=u_{41}^2=u_{41}^*=200,$$
$$u_{42}^1=u_{42}^2=u_{42}^*=70,\ u_{51}^1=u_{51}^2=u_{51}^*=120,\ u_{52}^1=u_{52}^2=u_{52}^*=80.$$

其中各变量右上角注的"1"表示 $\rho=0.002$，"2"表示 $\rho=0.001$，"*"表示例的真正最优解.

五、结　论

本文提出的等价性原理的意义在于它可使难于分解的线性问题等价于一个具有可分目标函数的二次问题．利用这一原理，本文提出了点凸化技术（PCT）．借助于 PCT 可使大部分线性问题能方便地用关联平衡法求解.

参　考　文　献

[1] Findeisen, W. et al., Control and Coordination in Hierarchical Systems, Willey and Son, London, 1980.

[2] Tatjewski, P., On-line Hierarchical Control of Steady-State Systems Using the Augmented Interaction Balance Method with Feedback, Large Scale Systems, 8(1985), 1—18.

[3] Jie Lin and Bai-wu Wan, Sequential Convexifying Method with Application to Optimization and Control, Proceedings of IFAC Congress, Munich, 7(1987), 115—121.

[4] 万百五，P.Roberts，稳态大系统递阶控制技术的一些改进（I）直接法，（II）价格法，（III）混合法，西安交通大学学报，第 2 期1—16，第 3 期 27—38，1983.

[5] Luenberger, D. G., Introduction to Linear and Nonlinear Programming, Addison-Wesley Publishing Company, 1973.

QUADRATIC EQUIVALENCE PRINCIPLE AND POINT CONVEXIFYING TECHNIQUE IN OPTIMIZATION AND CONTROL OF LINEAR STEADY STATE SYSTEMS

Lin Jie Wan Baiwu
(Xi'an Jiaotong University)

Abstract

The formulation and proof of a quadratic equivalence principle are presented in this paper. The principle states that a non-degenerate linear programming problem is equivalent to a separable quadratic one obtained by adding a special penalty terms to the original problem. Based on this principle, a point convexifying technique is introduced, which can be used to convexify linear programming or linear steady state control problems so that the interaction balance method can be applied. A simple example is given to illustrate the application of the technique.