第 14 卷 第 5 期
1988 年 9 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 14, No. 5
Sept., 1988

奇异线性系统的最优调节器问题

赵 克 友
（青 岛 大 学）

摘　　要

考虑奇异线性系统的最优调节器问题。所得调节器由线性反馈增益和积分器组成，反馈增益矩阵由解一个稀疏的矩阵 Riccati 方程而算出。闭环稳定性也予以讨论。

一、问题的描述

近来引起人们极大关注，且在许多领域中经常遇到的所谓奇异线性系统有如下数学描述：

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{1}$$

其中 $x(\cdot) \in R^n$, $u(\cdot) \in R^p$, E, A 和 B 各为相应维数的常实矩阵，且 E 与 A 可以是奇异的。若除去有限多个复数 λ 外，总有 $\det(\lambda E - A) \neq 0$，则称系统(1)是正则的(或 $\lambda E - A$ 是正则矩阵束)。给出 $u(\cdot)$ 及初值条件能否保证(1)的解存在与唯一，这是可解性问题。已有结论：正则系统(1)必可解[1]。

称满足 $\mathrm{rank}\ E^m = \mathrm{rank} E^{m+1}$ 的最小非负整数 m 为系统(1)的指数。依据正则矩阵束已有分解结论[2]，对指数 m 的正则系统 (1) 存在可逆矩阵 P 与 Q，使 $PEQQ^{-1}\dot{x}(t) = PAQQ^{-1}x(t) + PBu(t)$ 有下面的形式[1]：

$$\begin{cases} \dot{y}_s = E_s y_s + B_s u, & (2a) \\ E_f \dot{y}_f = y_f + B_f u, E_f^{m-1} \neq 0, E_f^m = 0, & (2b) \end{cases}$$

其中 $(Q^{-1}x)' = [\underset{n_1}{y_s'}, \underset{n_2}{y_f'}], (PB)' = [\underset{n_1}{B_s}, \underset{n_2}{B_f}]$.

定义性能指标为

$$J = \int_0^\infty \left(y_s' Q_s y_s + y_f' Q_f y_f + \sum_{i=0}^{m} \overset{(i)}{u}{}' R_i \overset{(i)}{u} \right) dt, \tag{3}$$

其中 $Q_s, Q_f, R_0, R_1, \cdots, R_{m-1}$ 分别是相应维数的对称非负定常实矩阵，而 R_m 是对称正定常实矩阵。

在性能指标(3)下，对系统(2)求解最优反馈控制，便是本文欲解决的所谓调节器问题。

本文于 1986 年 2 月 24 日收到。

二、调节器问题的解

如下定义形式的状态向量 $X(t)$ 及控制向量 $v(t)$：

$$X(t)=\begin{bmatrix} y_s(t) \\ u(t) \\ \dot{u}(t) \\ \vdots \\ \overset{(m-1)}{u}(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_s(t) \\ U(t) \end{bmatrix}\begin{matrix} n_1 \\ mp \end{matrix}, \quad v(t)=\overset{(m)}{u}(t).$$

组合方程(2a)及 u 的各阶导数可写出增广方程：

$$\dot{X}(t)=\boldsymbol{A}X(t)+\boldsymbol{B}v(t), \tag{4}$$

其中，

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} E_s & B_s & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & I_p & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & I_p \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ I_p \end{bmatrix}, \ I_p: p \text{ 阶单位方阵.}$$

对式(2b)逐次迭代后可得

$$y_f=-[B_f, E_fB_f, \cdots\cdots, E_f^{m-1}B_f]U=-\boldsymbol{D}U. \tag{5}$$

令 $\boldsymbol{R}=\text{block-diag}\ \{R_0, R_1, \cdots, R_{m-1}\}$, $\boldsymbol{Q}=\text{block-diag}\ \{Q_s, \boldsymbol{D}'Q_f\boldsymbol{D}+\boldsymbol{R}\}$，则性能指标(3)可重写为

$$J=\int_0^\infty (X'\boldsymbol{Q}X+v'R_mv)dt. \tag{6}$$

至此已很清楚，早先提出的调节器问题已化为对增广系统(5)在指标(6)下的调节器问题。由熟知的线性最优调节器理论[3]，可得下面结果。

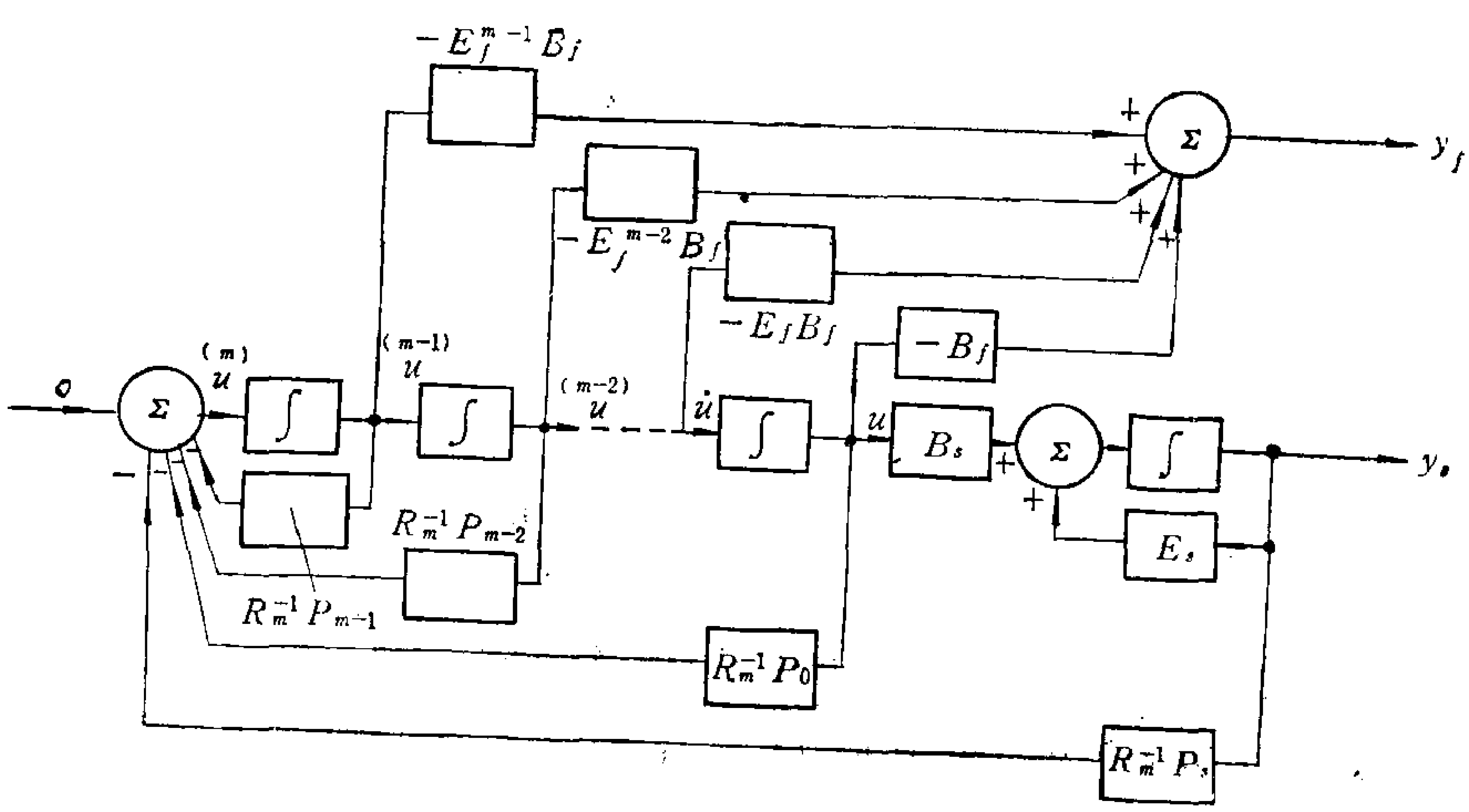

图 1　最优闭环方框图

结论 1：若 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 是可控对（可减弱为可检测对），则调节器问题有解 $v^*(t) = -R_m^{-1}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{P}X(t)$，其中对称阵 $\boldsymbol{P}$ 满足矩阵 Riccati 方程 $\boldsymbol{PA} + \boldsymbol{A}'\boldsymbol{P} - \boldsymbol{PB}R_m^{-1}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} = 0$；初值为 $X(0) = X_0$ 的最优性能指标为 $J^* = X_0'\boldsymbol{P}X_0$；若再有$(\boldsymbol{Q}^{\frac{1}{2}}, \boldsymbol{A})$是可观对(可减弱为可检测对)的话，则闭环系统 $\dot{X} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}R_m^{-1}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{P})X$ 还是全局渐近稳定的．若 $\boldsymbol{P}$ 的最后 p 行所成子块矩阵按向量 X 的分块进行相应的分块为 $[\underset{n_1}{P_s}, \underset{p}{P_0}, \underset{p}{P_1}, \cdots, \underset{p}{P_{m-1}}]$，则

$$v^*(t) = \overset{(m)}{u}{}^*(t) = -(R_m^{-1}P_sY_s + R_m^{-1}P_0u + \cdots + R_m^{-1}P_{m-1}\overset{(m-1)}{u}). \tag{7}$$

三、关于可控性与可观性

注意到下列两个秩条件

$$\operatorname{rank}\ [B_s E_s B_s \cdots E_s^{n_1-1} B_s] = n_1, \tag{8}$$

$$\operatorname{rank}\ [\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{AB} \cdots \boldsymbol{A}^{n_1+mp-1}\boldsymbol{B}] = n_1 + mp \tag{9}$$

是等价的这点，立即得到

结论 2：$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$是可控对，当且仅当条件(8)成立．

若令 $Q_s^{\frac{1}{2}}, Q_f^{\frac{1}{2}}, \boldsymbol{Q}^{\frac{1}{2}}$ 为分别满足 $Q_s'^{\frac{1}{2}} Q_s^{\frac{1}{2}} = Q_s$，$Q_f'^{\frac{1}{2}} Q_f^{\frac{1}{2}} = Q_f^{\frac{1}{2}}$ 及 $\boldsymbol{Q}'^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{Q}^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{Q}$ 的任一矩阵(它们的不唯一性对下文无妨[3])．可以证明，下面两个秩条件

$$\operatorname{rank}\ [Q_s'^{\frac{1}{2}} E_s' Q_s'^{\frac{1}{2}} \cdots E_s' Q_s'^{\frac{1}{2}}] = n_1, \tag{10}$$

$$\operatorname{rank}\ (Q_f^{\frac{1}{2}} B_f) = p \tag{11}$$

合在一起，定能使秩条件

$$\operatorname{rank}\ [\boldsymbol{Q}'^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{A}' \boldsymbol{Q}'^{\frac{1}{2}} \cdots \boldsymbol{A}'^{n_1+mp-1} \boldsymbol{Q}'^{\frac{1}{2}}] = n_1 + mp$$

成立．这样以来又可得到

结论 3：若条件(10)及(11)成立，则 $(\boldsymbol{Q}^{\frac{1}{2}}, \boldsymbol{A})$ 是可观对．

四、结　论

正则系统(1)可分解为 (2a)-(2b)，秩条件 (8) 保证了它在性能指标(3)下的最优调节器问题有解，最优闭环系统见方块图所示．最优调节器由线性反馈增益和积分器组成，是有记忆的． 秩条件(10)与(11)共同保证了最优闭环系统是全局渐近稳定的，由文[3]知，闭环系统有着相当满意的稳定裕度．各积分器的初值实际上是不重要的，这对工程实现是很有意义的．

参 考 文 献

[1] Yip, E. and Sincovec, R. F., Solvability, controllability, and observability of continuous descriptor systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **26**(1981), 702—707.

[2] Gantmacher, F. R., The Theory of Matrices, **Vol. 2**, Chelsea (1974).

[3] Anderson, B. D. O. and Moore, J. B., Linear Optimal Control, Prentice-Hall (1971).

THE OPTIMAL REGULATOR PROBLEM OF SINGULAR LINEAR SYSTEMS

ZHAO KEYOU
(*Qingdao University*)

ABSTRACT

The optimal regulator problem of a singular linear system is considered. The resultant regulator can be implemented by applying linear feedback gains and dynamic integrators. The appropriate feedback matrix can be calculated by solving a scattered matrix Riccati equation. The stability of the closed system is also discussed.

中国自动化技术公司简介

中国自动化技术公司(简称中自公司)是由中国科学院自动化所为主集资创办的全民所有制高科技企业. 以自动化所的技术力量为后盾,集技术开发、生产、推广应用、技术服务为一体，实行有限度的技贸结合，旨在挖掘科技潜力,致力于把科研成果尽快转化为生产力,促进科学技术研究与工农业生产的发展.

中自公司总公司下辖七个具有独立法人资格的集体所有制企业. 经过几年的努力，中自公司已开发了几十种产品,获得了较高的经济效益,积累资金几百万元. 1987年生产经销总额为5500万元.

主要产品: CA 系列电视图象采集卡及系统;显微电视图象系统;高分辨率彩色图形 CAD 工作站;力矩电机伺服系统;直流电机拖动系统;交流变频调速系统;可编程光栅数显表; 单双坐标光栅数显表;智能化红外测温仪;激光测径仪等.

主要经营范围: 计算机及外部设备(该公司为美国 IBM 公司及美国 COMPAQ 公司指定代理商);可编程控制器(日本立石公司系列产品);交流电动机变频调速器(日本 SANKEN 公司系列产品); 各种 IC、晶体管小型工具近万种及仪器仪表、声像设备、医用设备、机房设备等.

中自公司依靠自动化所雄厚的科技力量,可承接 IC 芯片解剖分析; 自动化立体仓库工程;生产过程自动化;计算机信息管理等项目的技术开发.

(张雪贞)