Kalman 标准结构形式的推广

涂 奉 生
(南开大学)

摘　　要

本文利用线性系统的模论，给出了在多项式矩阵所描述下的线性系统的 Kalman 标准结构形式.

Kalman 在[1]中创立了线性系统的模论，在文[2]中引进了线性系统的生成组及其最小多项式阵等重要概念，揭示了状态空间与多项式矩阵两种方法的内在联系. 在[3]中,将[2]中生成组与最小多项式阵等概念推广到模论上，论证了状态空间与多项式矩阵方法可以在模论基础上统一起来. 本文将在模论的基础上将 Kalman 标准结构形式[4]推广到用多项式矩阵描述的线性系统上来.

设 F 为一域,$F[z]$ 为 F 上的 z 的多项式环,X 为 $F[z]$-模,且为有限生成的挠模. 它也可看作域 F 的有限维线性空间,设其为 n 维,不难得到下面结果.

引理 1. 设 X_1 为 X 的子模,E_1 为 X_1 的生成组; 其最小多项式阵为 $P_1(z)$. 设 $E=[E_1,E_2]$ 为 X 的生成组,则 E 具有如下形式最小多项式阵:

$$P(z)=\left[\begin{array}{c|c} P_0(z) & P_{12}(z) \\ \hline 0 & P_2(z) \end{array}\right]. \tag{1}$$

设 $\Sigma=(X;g,h)$ 为一由模论描述的线性系统[1,3]，如下交换图所示. 设 $E_u=[u_1,\cdots,u_m]$ 为输入模空间 U 的基底. 令 $E_b=[g(u_1),\cdots,g(u_m)]\subset X$,由 E_b 所生成的子模 $X_b\subset X$,称为能达子模. 设 E_1 为 X_b 的任一生成组,$P_1(z)$ 为 E_1 的最小多项式阵,设 $E=[E_1,E_2]$ 为 X 的生成组. 由引理 1, 可知 E 具有 (1) 的形式的最小多项式阵.

$$\begin{tikzcd} u \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & Y \\ & X \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

图 1 模论描述的线性系统

定理 1. 相对于 $E,P(z)$,线性系统 $\Sigma=(X;g,h)$ 的坐标表示为如下形式:

$$G(z)=[N_1(z)\vdots N_2(z)]\left[\begin{array}{c|c} P_1(z) & P_{12}(z) \\ \hline 0 & P_2(z) \end{array}\right]^{-1}\left[\begin{array}{c} Q_b(z) \\ \hline 0 \end{array}\right]+W(z), \tag{2}$$

其中子系统 Σ_b:

$$G_b(z)=N_1(z)P_1^{-1}(z)Q_b(z)+W(z) \tag{3}$$

本文于1986年2月25日收到.
本课题由中国科学院科研基金资助.

能达.

证明：根据[3]可知Σ相对于 $E,P(z)$ 的坐标表示为

$$G(z)=[N_1(z)\vdots N_2(z)]\left[\begin{array}{c|c}P_1(z)&P_{12}(z)\\\hline 0&P_2(z)\end{array}\right]^{-1}\left[\begin{array}{c}Q_1(z)\\\hline Q_2(z)\end{array}\right]+W(z).\tag{4}$$

由于 $Q(z)=[Q_1^T(z)|Q_2^T(z)]^T$ 为 E_b 相对于 $E=[E_1, E_2]$ 的坐标，即 $E_b=[E_1, E_2]Q(z)=[E_1,E_2][Q_1^T(z)|Q_2^T(z)]^T$. 又由于 $P^{-1}(z)Q(z)$ 是严格真有理分式阵，所以 $Q(z)$ 被唯一确定. 因为 E_b、E_1 皆为 X_b 的生成组，所以存在 $Q_b(z)$，使得 $E_b=E_1Q_b(z)$，且 $P_b(z)$，$Q_b(z)$ 左互质，$P_b^{-1}(z)Q_b(z)$ 为严格真有理分式阵. 由此即得 $Q(z)=[Q_b^T(z)|0]^T$，即(4)为(2)的形式且有(3). (2)称为Σ的能达结构形式. 由定理 1 可直接推出如下结果.

推理 1. 对任一个线性系统 Σ：

$$G(z)=N(z)P^{-1}(z)Q(z)+W(z)\tag{5}$$

均严格等价于能达结构形式(2)的系统.

对于线性系统 $\Sigma=(X;g,h)$，设 $\mathrm{Ker}h=X_{n0}\subset X$，并设 E_{n0} 为 x_{n0} 的任一生成组，$P_{n0}(z)$ 为 E_{n0} 的最小多项式阵. 取 $E=[E_{n0},E_0]$ 为X的一生成组，与定理 1 相仿可得如下结果.

定理 2. 相对于 E，系统 $\Sigma=(X;g,h)$ 的一坐标表示为

$$G(z)=[0|N_0(z)]\left[\begin{array}{c|c}P_{n0}(z)&P_{12}(z)\\\hline 0&P_0(z)\end{array}\right]^{-1}\left[\begin{array}{c}Q_1(z)\\\hline Q_2(z)\end{array}\right]+W(z),\tag{6}$$

其中子系统 Σ_0：

$$G_0(z)=N_0(z)P_0^{-1}(z)Q_2(z)+W(z)\tag{7}$$

为能观的. (7)称为系统的能观结构形式.

推理 2. 对任一线性系统 Σ：

$$G(z)=N(z)P^{-1}(z)Q(z)+W(z)$$

均严格等价于能观结构形式(7)的系统.

对于线性系统 $\Sigma=(X;g,h)$，令 $X_{bno}=X_b\cap X_{n0}$ 为能达不能观子模. 设 E_1 为 X_{bno} 的任一生成组，$E_b=[E_1,E_2]$ 为 X_b 的生成组，$E_{n0}=[E_1, E_3]$ 为 X_{n0} 的生成组，$E=[E_1,E_2,E_3,E_4]$ 为X的生成组. 由定理 1、定理 2 可直接导出如下结果.

定理 3. 线性系统 $\Sigma=(X;g,h)$ 相对于E的一坐标表示为

$$G(z)=[0|N_2(z)|0|N_4(z)]\left[\begin{array}{c|c|c|c}P_1(z)&P_{12}(z)&P_{13}(z)&P_{14}(z)\\\hline 0&P_2(z)&0&P_{24}(z)\\\hline 0&0&P_3(z)&P_{34}(z)\\\hline 0&0&0&P_4(z)\end{array}\right]^{-1}\left[\begin{array}{c}Q_1(z)\\\hline Q_2(z)\\\hline 0\\\hline 0\end{array}\right]+W(z),\tag{8}$$

其中子系统 Σ_b：

$$G_b(z)=[0|N_2(z)]\left[\begin{array}{c|c}P_1(z)&P_{12}(z)\\\hline 0&P_2(z)\end{array}\right]^{-1}\left[\begin{array}{c}Q_1(z)\\\hline Q_2(z)\end{array}\right]+W(z) \tag{9}$$

能达,而子系统 Σ_0:

$$G_0(z)=[N_2(z)|N_4(z)]\left[\begin{array}{c|c}P_2(z)&P_{24}(z)\\\hline 0&P_4(z)\end{array}\right]^{-1}\left[\begin{array}{c}Q_1(z)\\\hline Q_2(z)\end{array}\right]+W(z) \tag{10}$$

能观,且子系统 Σ_{b0}:

$$G_{b0}(z)=N_2(z)P_2^{-1}(z)Q_2(z)+W(z) \tag{11}$$

能达能观. (8)称为 Kalman 标准结构形式.

推理 3. 对任一线性系统 Σ:

$$G(z)=N(z)P^{-1}(z)Q(z)+W(z)$$

均严格等价于 Kalman 标准结构形式(8)的系统.

例: 考虑系统 $\Sigma=(X;g,h)$, 其 X 的一生成组为 $E=[e]$,相对于 E 的一坐标表示为

$$G(z)=N(z)P^{-1}(z)Q(z)+W(z),$$

其中,$N(z)=(z^2+1)(z+1)^2\left(-\frac{2}{3}z+1\right)$, $P(z)=z(z+1)^2(z^2+1)(z^2-2)$,

$$Q(z)=(z^2+1)(z^2-2)(z^2+3z+1),\ W(z)=\frac{2}{3}z^4+z^3-\frac{5}{3}z^2-\frac{7}{3}.$$

不难看出,系统 Σ 的能达子模 X_b 由 $E_b=[Q(z)e]$ 所生成,其最小多项式为 $z(z+1)^2$, 而 $E_b^*=[e_1,e_2]$,$e_1=z(z^2+1)(z^2-2)e$,$e_2=(z+1)^2(z^2+1)(z^2-2)e$,仍为 X_b 的一生成组. 系统的不能观子模 X_{n0} 为由 $E_{n0}=[z(z^2-2)e]$ 所生成, $E_{n0}^*=[e_1,\ e_3]$, $e_3=z(z+1)^2(z^2-2)e$,也为 X_{n0} 的一生成组. 这样,能达不能观的子模 X_{bn0} 的一生成组为 $E_{bn0}=[e_1]$,取

$$E^*=[e_1,e_2,e_3,e_4]=[e][z(z^2+1)(z^2-2),(z+1)^2(z^2+1)(z^2-2),$$
$$z(z+1)^2(z^2-2),z(z+1)^2(z^2+1)],$$

显然 E^* 是满足定理 3 要求的 X 的一生成组,且 E^* 的最小多项式阵为

$$P^*(z)=\begin{bmatrix}(z+1)^2&&&0\\&z&&\\&&z^2+1&\\0&&&z^2-2\end{bmatrix},$$

那么经过计算, Σ 相对于 $E^*,P^*(z)$ 的坐标表示为

$$G(z)=[0\ 1\ \ 0\ 1]\begin{bmatrix}(z+1)^2&&&0\\&z&&\\&&z^2+1&\\0&&&z^2-2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},$$

即为 Kalman 标准结构形式.

参 考 文 献

[1] Kalman, R. E., Falb, P. L., and Arbib, M. A., Topics in Mathematical System Theory, Chapter 10, McGraw-Hill Book Company (1969).
[2] 韩京清，线性空间上的控制系统，控制理论与应用，**Vol. 2**, No. 2 (1985).
[3] 关肇直，陈翰馥，线性控制系统的能控性和能观测性，科学出版社，1975 年，61—62.

GENERALIZED KALMAN'S STANDARD FORMS FOR LINEAR SYSTEMS

Tu Fengsheng

(*Nankai University*)

Abstract

Using module theory of linear systems, Kalman's standard forms for linear systems in polynomial matrix description have been given in this paper.