第 14 卷 第 5 期 自动化学报 Vol. 14, No. 5
1988 年 9 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sept., 1988

# 均方差图象匹配系统的局部精度

彭嘉雄
(华中工学院)

**摘　　要**

本文用均方可微的二维齐次高斯随机场模型描述图象信号和噪声. 在信号和噪声相互独立且噪声的数学期望为零等条件下，证明了均方差图象匹配系统的三个重要性质，导出了均方差匹配系统局部精度的解析表达式，为系统的精度分析和计算提供了理论和应用基础.

## 一、引　　言

图象匹配是利用实测图象与参考图象进行相关或匹配来确定它们之间相对位移的技术. 它广泛应用于图象处理与识别、机器视觉、飞行器的辅助导航与制导等领域中. 主要用均方差、互相关、平均绝对差或绝对差之和等算法进行匹配[1,2,3]. 匹配方式有内含式和覆盖式两种. 文献[4]、[5]研究了互相关匹配系统的局部精度. 对于均方差匹配系统，只有文献[6]研究了一维相关器进行穿越式匹配的局部精度. 本文研究均方差图象匹配系统在两种匹配方式下的局部精度，文中凡对随机函数求积分和偏导数都是在均方意义上说的.

## 二、数学模型与均方差函数的性质

### 1. 内含式匹配

它是实测图象包含在参考图象之内，通过匹配要在参考图象内找出与实测图象达到最佳匹配的子图位置. 设参考图象和实测图象的模型为

$$r(t+x,u+y)=s(t+x,u+y), \tag{1}$$

$$m(t,u)=s(t,u)+n(t,u), \tag{2}$$

式中 $s$、$n$ 是图象信号和噪声随机场，$t\in[-T_1/2,T_1/2]$ 和 $u\in[-T_2/2,T_2/2]$ 是空间变量. 将(1)、(2)式相减得误差函数:

$$e(t,u;x,y)=s(t+x,u+y)-s(t,u)-n(t,u). \tag{3$$

### 2. 覆盖式匹配

它是参考图象包含在实测图象之内，通过匹配要在实测图象内找出与参考图象达到

本文于 1986 年 4 月 14 日收到.

最佳匹配的子图位置．设参考图象和实测图象的模型为

$$r(t,u)=s(t,u), \tag{4}$$

$$m(t+x,u+y)=s(t+x,u+y)+n(t+x,u+y), \tag{5}$$

则误差函数为

$$e(t,u;x,y)=s(t+x,u+y)+n(t+x,u+y)-s(t,u). \tag{6}$$

两种匹配方式的均方差函数为

$$q(x,y)=\frac{1}{T_1T_2}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}\int_{-\frac{T_2}{2}}^{\frac{T_2}{2}} e^2(t,u;x,y)\,dt\,du, \tag{7}$$

它的极小值的位置即最佳匹配的位置，称为配准点，无噪声情况下的配准点称为正确配准点．以(3)式和(6)式代入(7)式可知，正确配准点在 $x=0$ 和 $y=0$ 点且 $q(x,y)$ 的极小值为零．

用 $E$ 表示数学期望算子，则信号的自相关函数为 $R_s(x,y)=E[s(t,u)s(t+x,u+y)]$．关于随机离散图象自相关函数理论模型的研究见文献[7]．函数关于自变量的偏导数将用相应的自变量作为函数的下标来表示，则两种匹配方式的均方差函数都有下述性质．

**定理 1.** 若信号和噪声是相互独立的均方可微的二维齐次随机场且噪声的数学期望为零，则对于均方差函数(7)有

$$E[q_{AB}(0,0)]=-2R_{sAB}(0,0),\ A=x,y;\ B=x,y, \tag{8}$$

$$E[q_x(0,0)]=0 \text{ 和 } E[q_y(0,0)]=0. \tag{9}$$

证明：分别用(3)和(6)式代入(7)式，将被积函数展开后两边求数学期望，根据求数学期望与求积分的可交换性和定理中的假设条件得：

$$E[q(x,y)]=2R_s(0,0)-2R_s(x,y)+R_n(0,0). \tag{10}$$

利用求数学期望与求偏导数的可交换性，将此式在 $x=0$ 和 $y=0$ 点关于 $x$、$y$ 求二阶偏导数和混合偏导数即得(8)式．同样可得：

$$E[q_x(0,0)]=-2R_{sx}(0,0) \text{ 和 } E[q_y(0,0)]=-2R_{sy}(0,0). \tag{11}$$

由一维相关函数 $R_s(x,0)$ 和 $R_s(0,y)$ 的性质[8]得：

$$R_{sx}(0,0)=0 \text{ 和 } R_{sy}(0,0)=0. \tag{12}$$

结合(11)、(12)式即得(9)式．证毕．

## 三、精度的度量

若实测图象是有噪声的，则 $q(x,y)$ 的极小值大于零．配准点也将随机地偏离正确配准点，偏离的随机误差由配准点在正确配准点邻域内的随机位置 $(\xi,\eta)$ 确定．设 $q(x,y)$在正确配准点的邻域内是均方解析的，则可展开为泰勒级数如下：

$$q(x,y)=q(0,0)+q_x(0,0)x+q_y(0,0)y+\frac{1}{2}q_{xx}(0,0)x^2 + q_{xy}(0,0)xy+\frac{1}{2}q_{yy}(0,0)y^2+\cdots\cdots. \tag{13}$$

若邻域足够小，即实测图象有足够的信噪比(实际如此)，则 $q(x, y)$ 可用(13)式中写出的二次函数近似. 设随机变量 $q_{xx}(0,0)$、$q_{xy}(0,0)$ 和 $q_{yy}(0,0)$的标准差比它们的数学期望小得多(对于合理的信噪比就是这样)，则这些随机变量可用它们的数学期望近似[5,6]. 以 $\xi$、$\eta$ 代 $x$、$y$ 即得:

$$q(\xi,\eta) = q(0,0) + q_\xi(0,0)\xi + q_\eta(0,0)\eta + \frac{1}{2}E[q_{\xi\xi}(0,0)]\xi^2 + E[q_{\xi\eta}(0,0)]\xi\eta + \frac{1}{2}E[q_{\eta\eta}(0,0)]\eta^2. \tag{14}$$

作坐标变换:

$$v = \xi\cos\phi + \eta\sin\phi \quad 和 \quad z = -\xi\sin\phi + \eta\cos\phi, \tag{15}$$

则得

$$\xi = v\cos\phi - z\sin\phi \quad 和 \quad \eta = v\sin\phi + z\cos\phi, \tag{16}$$

$$f(v,z) = q(\xi,\eta), \tag{17}$$

$$\begin{aligned} f_v(0,0) &= q_\xi(0,0)\cos\phi + q_\eta(0,0)\sin\phi, \\ f_z(0,0) &= -q_\xi(0,0)\sin\phi + q_\eta(0,0)\cos\phi, \\ f_{vz}(0,0) &= -q_{\xi\xi}(0,0)\sin\phi\cos\phi + q_{\eta\eta}(0,0)\sin\phi\cos\phi \\ &\quad + q_{\xi\eta}(0,0)(\cos^2\phi - \sin^2\phi). \end{aligned} \tag{18}$$

对(18)式求数学期望并应用(8)式，令 $E[f_{vz}(0,0)] = 0$，求得新坐标系应旋转的角度为

$$\phi = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2R_{sxy}(0,0)}{R_{sxx}(0,0) - R_{syy}(0,0)}. \tag{19}$$

在此角度下，在新坐标系中有:

$$f(v,z) = f(0,0) + f_v(0,0)v + f_z(0,0)z + \frac{1}{2}E[f_{vv}(0,0)]v^2 + \frac{1}{2}E[f_{zz}(0,0)]z^2.$$

关于 $v$、$z$ 求一阶偏导数并令它们等于零可得:

$$v = -\frac{f_v(0,0)}{E[f_{vv}(0,0)]} \quad 和 \quad z = -\frac{f_z(0,0)}{E[f_{zz}(0,0)]}. \tag{20}$$

两边求标准差得:

$$\sigma_v = \frac{\sigma_{fv}}{E[f_{vv}(0,0)]} \quad 和 \quad \sigma_z = \frac{\sigma_{fz}}{E[f_{zz}(0,0)]}, \tag{21}$$

并由(16)式得 $\xi$ 和 $\eta$ 的标准差为

$$\sigma_\xi = \sigma_v\cos\phi - \sigma_z\sin\phi \quad 和 \quad \sigma_\eta = \sigma_v\sin\phi + \sigma_z\cos\phi, \tag{22}$$

则 $\sigma_\xi$ 和 $\sigma_\eta$ 就是系统定位精度的度量，因是研究正确配准点邻域内精度，称为局部精度.

## 四、内含式系统的局部精度

为了避免重复而又能在新坐标系中讨论问题，现将数学模型(1)至(7)中的 $x$ 理解为

$v,y$ 理解为 $z,q(x,y)$ 理解为 $f(v,z)$[8]，则对于内含式系统有：

**定理 2.** 如果误差函数 (3) 中信号和噪声都是高斯随机场且满足定理 1 中的假设条件，则对于函数 $f(v,z)$ 有：

$$\sigma_{fv}^2 = \frac{4}{a^2b^2}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}(|\tau| - a)(b - |\theta|)R_n(\tau,\theta)R_{svv}(\tau,\theta)d\tau d\theta, \tag{23}$$

$$\sigma_{fz}^2 = \frac{4}{a^2b^2}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}(|\tau| - a)(b - |\theta|)R_n(\tau,\theta)R_{szz}(\tau,\theta)d\tau d\theta. \tag{24}$$

式中 $\tau = t_2 - t_1$，$\theta = \theta_2 - \theta_1$，$|\tau|$ 和 $|\theta|$ 是 $\tau$ 和 $\theta$ 的绝对值，$a$、$b$ 是 $T_1$、$T_2$ 在新坐标系中的象。

证明：以(3)式代入(7)式，在 $v = 0$ 和 $z = 0$ 点关于 $v$ 求一阶偏导数得：

$$f_v(0,0) = \frac{2}{ab}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} n(t,u)S_v(t,u)dt\,du. \tag{25}$$

由定理 1 知 $E[f_v(0,0)] = 0$，则由(25)式得：

$$\sigma_{fv}^2 = \frac{4}{a^2b^2}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} E[n(t_1,u_1)S_v(t_1,u_1) \times n(t_2,u_2)S_v(t_2,u_2)]dt_2dt_1du_2du_1. \tag{26}$$

因高斯随机场的偏导数也是高斯的，故(26)式的被积函数是四个联合高斯随机变量的乘积矩，可用下列公式[9]展开：

$$E[g_1g_2g_3g_4] = E[g_1g_2]E[g_3g_4] + E[g_1g_3]E[g_2g_4] + E[g_1g_4]E[g_2g_3] - 2E[g_1]E[g_2]E[g_3]E[g_4]. \tag{27}$$

利用求偏导数与求数学期望的可交换性和定理 1 中的假设条件可证：

$$E[n(t_i,u_i)S_v(t_j,u_j)] = 0,\ i,j = 1,2; \tag{28}$$

$$E[n(t_1,u_1)n(t_2,u_2)] = R_n(\tau,\theta); \tag{29}$$

$$E[S_v(t_1,u_1)S_v(t_2,u_2)] = -R_{svv}(\tau,\theta). \tag{30}$$

因噪声的数学期望为零，故结合(26)至(30)诸式即得：

$$\sigma_{fv}^2 = -\frac{4}{a^2b^2}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} R_n(t_2 - t_1, u_2 - u_1) \times R_{svv}(t_2 - t_1, u_2 - u_1)dt_2dt_1du_2du_1. \tag{31}$$

作坐标变换：

$$\tau = t_2 - t_1,\ \alpha = t_2 + t_1;\ \theta = u_2 - u_1,\ \beta = u_2 + u_1, \tag{32}$$

此变换的雅可比式为 $|J| = 4$. 对(31)式应用多重积分的换元公式[10]即得：

$$\sigma_{fv}^2 = -\frac{4}{|J|a^2b^2}\int_{-a}^{a}\int_{-a+|\tau|}^{a-|\tau|}\int_{-b}^{b}\int_{-b+|\theta|}^{b-|\theta|} R_n(\tau,\theta)R_{svv}(\tau,\theta)d\tau d\alpha d\theta d\beta$$

$$= \frac{4}{a^2b^2}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}(|\tau| - a)(b - |\theta|)R_n(\tau,\theta)R_{svv}(\tau,\theta)d\tau d\theta.$$

此即(23)式. 同样可证(24)式，证毕.

据(21)式、定理 2 和定理 1 得：

$$\sigma_v = \frac{1}{abR_{svv}(0,0)}\left[\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}(|\tau|-a)(b-|\theta|)R_n(\tau,\theta)R_{svv}(\tau,\theta)d\tau d\theta\right]^{\frac{1}{2}}, \quad (33)$$

$$\sigma_z = \frac{1}{abR_{szz}(0,0)}\left[\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}(|\tau|-a)(b-|\theta|)R_n(\tau,\theta)R_{szz}(\tau,\theta)d\tau d\theta\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (34)$$

以 $\sigma_v$ 和 $\sigma_z$ 代入(22)式即得系统的局部精度.

## 五、覆盖式系统的局部精度

**定理 3.** 如果误差函数(6)中的信号和噪声满足定理 1 和定理 2 中的假设条件,则对于函数 $f(v,z)$ 有:

$$\sigma_{fv}^2 = \frac{4}{a^2b^2}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}(|\tau|-a)(b-|\theta|)\{R_n(\tau,\theta)[R_{svv}(\tau,\theta) + R_{nvv}(\tau,\theta)] + R_{nv}^2(\tau,\theta)\}d\tau d\theta, \quad (35)$$

$$\sigma_{fz}^2 = \frac{4}{a^2b^2}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}(|\tau|-a)(b-|\theta|)\{R_n(\tau,\theta)[R_{szz}(\tau,\theta) + R_{nzz}(\tau,\theta)] + R_{nz}^2(\tau,\theta)\}d\tau d\theta. \quad (36)$$

证明: 以(6)式代入(7)式,在 $v=0$ 和 $z=0$ 点关于 $v$ 求一阶偏导数得:

$$f_v(0,0) = \frac{2}{ab}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} n(t,u)[S_v(t,u)+n_v(t,u)]dt\,du. \quad (37)$$

由定理 1 得 $E[f_v(0,0)]=0$,则利用(37)式可得:

$$\sigma_{fv}^2 = \frac{4}{a^2b^2}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} E\{n(t_1,u_1)[S_v(t_1,u_1)+n_v(t_1,u_1)] \times n(t_2,u_2)[S_v(t_2,u_2)+n_v(t_2,u_2)]\}dt_2dt_1du_2du_1. \quad (38)$$

同定理 2 证明中一样,可证:

$$E\{n(t_i,u_i)[S_v(t_i,u_i)+n_v(t_i,u_i)]\}=0, \ i=1,2; \quad (39)$$

$$E[n(t_1,u_1)n(t_2,u_2)] = R_n(\tau,\theta); \quad (40)$$

$$E\{[S_v(t_1,u_1)+n_v(t_1,u_1)][S_v(t_2,u_2)+n_v(t_2,u_2)]\} = -R_{svv}(\tau,\theta)-R_{nvv}(\tau,\theta); \quad (41)$$

$$E\{n(t_i,u_i)[S_v(t_j,u_j)+n_v(t_j,u_j)]\} = (-1)^j R_{nv}(\tau,\theta), \ i\neq j, \ i,j=1,2. \quad (42)$$

因噪声的数学期望为零,故按(27)式展开(38)式的被积函数后代入(39)至(42)各式可得:

$$\sigma_{fv}^2 = -\frac{4}{a^2b^2}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\{R_n(t_2-t_1,u_2-u_1)[R_{svv}(t_2-t_1,u_2-u_1) + R_{nvv}(t_2-t_1,u_2-u_1)] + R_{nv}^2(t_2-t_1,u_2-u_1)\}dt_2dt_1du_2du_1. \quad (43)$$

引入坐标变换(32)并应用多重积分的换元公式[10]得:

$$\sigma_{fv}^2 = -\frac{4}{|J|a^2b^2}\int_{-a}^{a}\int_{-a+|\tau|}^{a-|\tau|}\int_{-b}^{b}\int_{-b+|\theta|}^{b-|\theta|}\{R_n(\tau,\theta)[R_{svv}(\tau,\theta)+R_{mvv}(\tau,\theta)]$$

$$+ R_{nv}^2(\tau,\theta)\}d\tau d\alpha d\theta d\beta$$

$$= \frac{4}{a^2b^2}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}(|\tau|-a)(b-|\theta|)\{R_n(\tau,\theta)[R_{svv}(\tau,\theta)+R_{nvv}(\tau,\theta)]$$

$$+ R_{nv}^2(\tau,\theta)\}d\tau d\theta.$$

此即(35)式。同样可证(36)式，证毕。

根据(21)式、定理 3 和定理 1 得：

$$\sigma_v = \frac{1}{abR_{svv}(0,0)}\left[\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}(|\tau|-a)(b-|\theta|)\{R_n(\tau,\theta)[R_{svv}(\tau,\theta) + R_{nvv}(\tau,\theta)] + R_{nv}^2(\tau,\theta)\}d\tau d\theta\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{44}$$

$$\sigma_z = \frac{1}{abR_{szz}(0,0)}\left[\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}(|\tau|-a)(b-|\theta|)\{R_n(\tau,\theta)[R_{szz}(\tau,\theta) + R_{nzz}(\tau,\theta)] + R_{nz}^2(\tau,\theta)\}d\tau d\theta\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{45}$$

以 $\sigma_v$ 和 $\sigma_z$ 代入(22)式即得系统的局部精度。

## 六、结　　论

本文建立了内含式和覆盖式图象匹配系统的数学模型，研究了均方差匹配系统的性质，利用坐标旋转简化了二次函数的表达式，确定了精度的度量，在某些一般的假设条件下导出了均方差图象匹配系统局部精度的表达式。证明了局部精度依赖于信号和噪声自相关函数的理论模型[7]及其偏导数的积分。为系统的精度分析、计算、估计、参数选择和系统设计提供了理论和应用基础。

## 参　考　文　献


[1] Pratt W. K., Digital Image Processing, John Wiley & Sons (1978), 551—566.

[2] Svedlow M., McGillem C. D., and Anuta P. E., Image Registration: Similarity Measure and Preprocessing Method Comparisons, *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, **AES-14**(1978), 1, 141—149.

[3] VanderBrug G. J. and Rosenfeld A., Two-Stage Template Matching, *IEEE Trans. Comput.*, **C-26**(1977), 4, 384—393.

[4] Webber R. F. and Delashmit W. H., Product Correlator Performance for Gaussian Random Scenes, *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, **AES-10**(1974), 4, 516—520.

[5] Mostafavi H. and Smith F. W., Image Correlation with Geometric Distortion, Part II: Effect on Local Accuracy, *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, **AES-14**(1978), 3, 494—500.

[6] Fogle D. A. and Goebel R. H., The Two-Dimensional Accuracy of a One-Dimensional Correlator, Proc. of 1976 IEEE Southeastcon Region 3 Conf. (1976), 230—232.

[7] 彭嘉雄，张天序，随机离散图象的统计模型研究，自动化学报，**10**(1984)，1，16—21.

[8] Swerling, P., Statistical Properties of the Contours of Random Surfaces, *IRE Trans. Inform. Theory*, IT-8 (1962), 4, 315—320.

[9] 塞奇 A. P. 梅尔萨 J. L.，估计理论及其在通讯与控制中的应用，科学出版社 (1978年)，81—82.

[10] Goffman C.，多元微积分，人民教育出版社 (1978年)，91—130.

# THE LOCAL ACCURACY OF MEAN-SQUARE DIFFERENCE IMAGE MATCHING SYSTEM

PENG JIAXIONG

*(Huazhong University of Science and Technology)*

ABSTRACT

In this paper, the image signal and noise are described by models of mean-square differentiable two-dimensional homogeneous Gaussian random field. Under the conditions that signal and noise are independent and the mathematical expectation of noise is zero, the three important properties of the mean-square difference image matching system are proved. The analytical expressions of local accuracy for the meansquare difference matching system are derived. The theory and application basis are provided for accuracy analysis and evaluation of a system.