第14卷 第6期 自 动 化 学 报 Vol. 14, No. 6
1988 年 11 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Nov, 1988

线性系统最经济结构综合的有向图解法

汪 定 伟
(东 北 工 学 院)

摘 要

本文提出一种按状态变量间的可达关系选择线性系统最经济控制结构的方法，并证明由该方法选出的控制矩阵是非零元素最少的.

文献[1]提出了线性系统最经济结构综合的概念，提法如下:

对于线性时不变系统 $S(A, B, C)$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \tag{1}$$

给定 A，选择 B, C 使系统完全能控、能观，且使 B, C 中的非零元素的个数为最少.

尔后，不少文献对最经济控制结构的求法作了研究[2-4]. 本文从系统有向图的可达关系出发，提出了一种新的更为简捷的解法.

对应于任意矩阵 A 的布尔矩阵和 A 有相同的维数，并将 A 的非零元素替换为 1 的矩阵，记为 A_B. 若 A_B 为 n 维方阵，则记以 A_B 为邻接矩阵的有向图为 $G(A_B)$[5].

$$R = (I + A_B)^{n-1}, \tag{2}$$

称 R 为 $G(A_B)$ 的可达矩阵.

定义 1[6]. 对于系统 $S(A, B)$，当且仅当存在一完全能控的系统 $S^*(A^*, B^*)$，且 $A_B^* = A_B$, $B_B^* = B_B$ 时，称 $S(A, B)$ 是结构完全能控的.

定义 2[6]. A_B 中含有的最大置换矩阵的阶数称为 $G(A_B)$ 的项秩 (Term Rank)，记为 $\mathrm{TR}(A_B)$.

定理 1[6]. 给定系统 $S(A, B)$，定义 F, K 为

$$F = \left[\begin{array}{c|c} A_B & B_B \\ \hline O & O \end{array}\right], \text{为 } n+m \text{ 阶方阵},$$

$K = RB_B$，其中 R 为 $G(A_B)$ 的可达矩阵. 则系统结构完全能控的必要条件为:

1) $\mathrm{TR}(F) = n$; 2) K 每行至少有一个非零元.

引理 1. 如 $S(A, B)$ 是结构完全能控的，则有向图 $G(F^T)$ 中，任一状态变量对应的节点 x_i，至少对于一个控制量的节点 u_j 是可达的.

此引理由定理 1 很容易证明.

本文于 1986 年 3 月 31 日收.

定理 2. 结构能控系统中，如果控制矩阵选取如下结构形式：

$$B_B=[b_1b_2\cdots b_m],\ b_i=e_j,\ i=1,2,\cdots,m,$$

则 B_B 中必有一个 $b_i=e_{j^*}$，其中第 j^* 列是R中非零元素最多的列．这里 e_j 是单位阵 I 的第 j 列．

此定理由引理 1 也不难证明．

由于最经济控制系统必须满足结构能控条件，按定理 2，逐次按R中非零元素最多的列构造结构控制阵，于是有如下算法：

步 1．由A构造 A_B，按(2)式计算 R．

步 2．令 $k=1$，$R^k=R$，$n^k=n$．

步 3．若 $j^{*k}=\arg\max\limits_j v_j^k=\sum\limits_{i=1}^{n^k}r_{ij}^k$，则取 $b_k=e_{j^*k}$；如 j^{*k} 不唯一，则可得多个结果．

这里，r_{ij}^k 是第 k 次迭代中可达阵 R^k 的元素．arg 是取使 v_j^k 达到最大值的下标变量 j．

步 4．若 $r_{ij^{*k}}=1$，A_i，则划去 R^k 中的第 i 行，第 i 列，剩余部分构成 R^{k+1}．记 R^{k+1} 的阶数为 n^{k+1}．

步 5．若 $n^{k+1}=0$，取 $B_B=[b_1b_2\cdots b_k]$ 转步 6，否则 $k=k+1$ 转步 3．

步 6．对所有选好的 B_B 检验 $\mathrm{TR}(F)=n$ 是否成立，舍去不满足条件的结果，如对各个结果均有 $\mathrm{TR}(F)=\bar{n}<n$，则增加 $n-\bar{n}$ 列 b_i，使 $\mathrm{TR}(F)=n$ 成立，转步7．

步 7．将 B_B 的非零元换为变元，获得 B．检验 $[B\ AB\cdots A^{n-1}B]$ 满秩否，舍去不满足条件的结果．如对所有B均不满足条件，则算法失败．

下面证明按以上算法构造的 B_B，在所有满足结构能控性条件的控制阵中是非零元素最少的．

引理 2． 对于给定的 A_B，若算法中的 j^{*k} 不唯一，则无论如何选取 j^{*k}，所得的 B_B 都有相同的列数．且每步迭代中的 R^k 的阶数也是相同的．

证明见附录．

定理 3． 对于给定的 A，如果 B_B 按定理 2 中限定的形式构造，则所有使系统能控的控制阵中按以上算法选取的B是非零元素最少的．

证明见附录．

例题[2]．设

$$A=\begin{bmatrix}2&0&0&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&2&0&0\\1&0&-1&1&-1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix},$$

则

$$R=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&0&0\\1&0&1&1&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

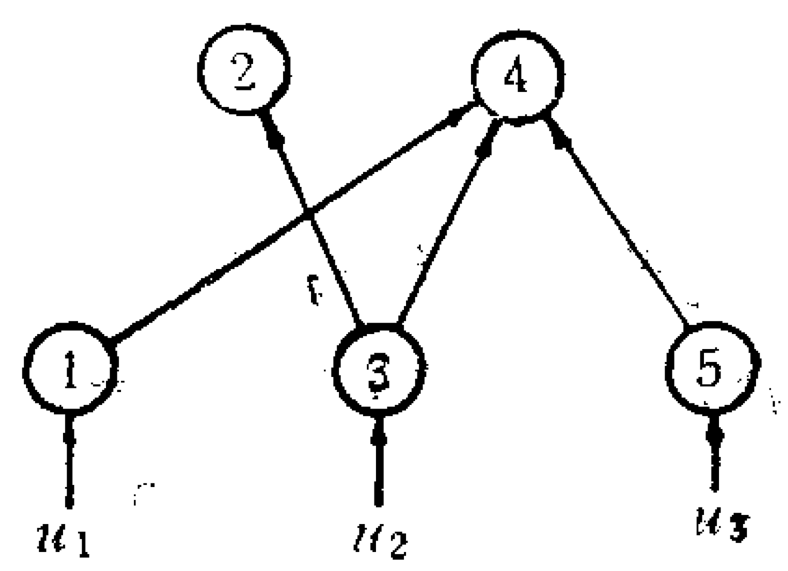

图 1

取 $b_1=e_3$，划去第 2，3，4 列和行，得

$$R^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

取 $b_2=e_1$，划去第 1 列、行，得 $R^3=[1]$. 取 $b_3=e_5$，故有 $B_B=[e_3e_1e_5]$. 将 B_B 中的 1 换为变元，即得到与文[2,3]同样的结果.

从图 1 中的有向图 $G(A_B^T)$ 可见，节点 1，3，5 是源节点，至少要有 3 个控制，才能使 $G(A_B^T)$ 由控制节点完全可达.

通过这项研究可以看出，有向图分析法在最经济结构综合中有着较广的应用前景.

参 考 文 献

[1] 涂序彦，最经济控制系统结构综合问题，自动化学报，**8**(1982)，103—111.
[2] 陈兆宽、张荣祥，线性控制系统最经济结构综合的代数方法，自动化学报，**7**(1981)，171—178.
[3] 涂攀生、涂序彦，线性系统最经济控制问题的一种解法，自动化学报，**10**(1984)，345—349.
[4] 霍伟，线性系统的结构经济控制，自动化学报，**11**(1985)，393—400.
[5] 王朝瑞，图论，人民教育出版社(1981).
[6] Schizas, C. and F. J. Evans, APL and Graph Theory in Dynamic System Analysis, IEE Proc., **128**(1981), Part D, 85—92.

附 录

1．引理 2 的证明

设在第 k 步迭代中有 $v_i^k=v_j^k=\max\{v_l^k, l=1,2,\cdots,n^k\}$，$R_i^{k+1}$，$R_j^{k+1}$ 分别为划去 R^k 中第 i 列 r_i 或第 j 列 r_j 的非零元所对应的行、列后形成的部分可达阵.

情况 1. 若节点 i，节点 j 互相可达，则 $r_i=r_j$ 显然有 $R_i^{k+1}=R_j^{k+1}$.

情况 2. 若节点 i，j 互不可达，且 $r_i\cap r_j=0$. 即节点 i，j 属于不同的分离子图. 则无论划去哪个节点的可达节点集，均不影响另一个节点的可达节点集. 未被划去的节点在下一步迭代中必是可达元素最多的节点. 所以必有 $v_{j*}^{k+1}=v_{j*}^k$，且 R^{k+1} 是 $n^k-v_{j*}^k$ 阶的，R^{k+2} 是 $n^k-2v_{j*}^k$ 阶的. $k+2$ 步后形成的子图与划去节点 i 或节点 j 的顺序无关.

情况 3. 若节点 i，j 互不可达，且 $r_i\cap r_j\neq 0$. 设 $r_i\cap r_j$ 有 l 个非零元素. 则无论先划去哪个节点的可达元素集，剩余子图中除将保留节点 i，j 均不可达的节点外，都将保留一枝由一个节点可达的 v_{j*}^k-l 个节点. 因此，后续迭代中的情况与选择节点 i，j 的先后顺序无关.

由 k 的任意性，有引理成立.

2．定理 3 的证明

设 B^* 是已知的具有定理 2 限定的结构形式的最经济控制阵，其非零元素个数 $N(B^*)=m^*$. 下面证明 $N(B)=m^*$.

设在有向图 $G(F^T)$ 中，这里

$$F=\left[\begin{array}{c|c}A_B&B_B^*\\\hline 0&0\end{array}\right]$$

节点 u_i 可达的节点集为 S_i，$i=1,2,\cdots,m^*$. 记 S_i 的元素个数为 $N(S_i)$.

设 $N(S_{i^*})=\max\{N(S_i),\ i=1,2,\cdots,m^*\}$，则必有 $N(S_{i^*})=v_{j*1}^1$. 这里，v_{j*1}^1 是算法第一次迭代中非零元数最多列的非零元的个数.

因为，若 $N(S_{i^*})>v_{j*1}^1$，则与 v_{j*1}^1 的选法矛盾；

若 $N(S_{i^*})<v_{j*1}^1$，则与 B^* 完全能控矛盾.

因为至少可达 x_{j*1} 的控制可达 v_{j*1}^1 个节点.

构造集合 $S_i^2 = S_i - S_i \cap S_{i^*}$, $i = 1, 2, \cdots, m^*$, $i \neq i^*$,

取 $N(S_{i*2}^2) = \max\{N(S_i^2), i = 1, 2, \cdots, m^*, i \neq i^*\}$,

由引理 2 有 $N(S_{i*2}^2) = v_{j*2}^2$.

以此类推，有 $N(S_{i*k}^k) = v_{j*k}^k$, $k = 3, 4, \cdots, m^*$.

由 A_B 的节点数不变，于是必有

$$N(B) = N(B^*) = m^*.$$

DIGRAPH SOLUTION TO MOST ECONOMICAL STRUCTURE SYNTHESIS OF LINEAR SYSTEMS

Wang Dingwei

(*Northeast University of Technology*)

Abstract

A new algorithm based on the reachable relationships between the state variables to select the most economical control structure of linear systems has been developed. It has been proved that the control matrix obtained by this algorithm is of the least nonzero elements.