第14卷 第6期 自动化学报 Vol. 14, No. 6
1988年11月 ACTA AUTOMATICA SINICA Nov., 1988

一种简单的具有可变遗忘因子的自校正调节器

张殿华　　郎世俊
(东北工学院)

摘　　要

本文提出了一种算法简单,适合时变系统的、具有可变遗忘因子的自校正调节器，并指出算法是确定性收敛的.

一、引　　言

在控制理论中,长期存在的一个问题就是如何获得一种简单的、全局收敛的自适应控制算法. 这种算法对于所有的初始系统和算法状态，都可以用有界的输入序列去获得一个给定线性系统的输出,这个输出渐近地跟随事先所期望的序列.

在实际中使用自适应控制的真正动机往往是去处理时变系统. 而对时变系统的情况,很难产生一种完整的收敛理论. 但重要的是，算法对时变系统应具备两个特性：第一,如系统是时变的,算法对这种变化具有补偿作用;第二,如系统恰好时不变，控制器也能满意工作.

二、一种简单的具有可变遗忘因子的自校正调节器

2.1. 问题的提法

设被控系统是单输入单输出的,是确定性离散时间和时不变的,用下列方程描述:

$$A(z^{-1})Y(t) = z^{-d}B(z^{-1})u(t). \tag{2.1}$$

这里 z^{-1} 是单位延时因子;$\{u(t)\}$ 和 $\{Y(t)\}$ 分别是系统的输入输出序列; d 是系统延时. 且

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + \cdots + a_nz^{-n}, \tag{2.2}$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1z^{-1} + \cdots + b_mz^{-m}. \tag{2.3}$$

这里 $b_0 \neq 0$, 设系统满足下列条件:

$A1$: d 是已知的;

本文于1986年3月17日收到.

$A2$: m 和 n 的上界是已知的；

$A3$: $B(z^{-1})$ 的所有零点严格在单位圆内.

对(2.1)式重复迭代后，可得如下预报形式：

$$Y(t+d) = \alpha(z^{-1})Y(t) + \beta(z^{-1})u(t), \tag{2.4}$$

$$\alpha(z^{-1}) \triangleq \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \cdots + \alpha_{n-1} z^{n+1}, \tag{2.5}$$

$$\beta(z^{-1}) \triangleq \beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \cdots + \beta_p z^{-p}. \tag{2.6}$$

这里，$\beta_0 \neq 0$，且 $p \triangleq m + d - 1$.

系统的参数 A 和 B(或 α 和 β)是未知的，给定参考序列 $\{Y^*(t)\}$，并设其满足下列条件：

$A4$: $|Y^*(t)| \leqslant m1 < \infty$，对于所有的 t.

要求所设计的控制器满足下列条件：

$C1$: $|Y(t)| \leqslant C'$, $|u(t)| \leqslant C'$，对所有 t;

$C2$: $|Y(t) - Y^*(t)| \to 0$，当 $t \to \infty$，对某些 $C' < \infty$.

2.2. 自校正调节器 I

考虑下面具有遗忘因子的最小二乘法：

$$P(t)^{-1} = \lambda P^{-1}(t-1) + \phi(t-d)\phi^T(t-d),$$

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + P(t)\phi(t-d)\varepsilon(t).$$

假设参数的协方差矩阵 $P(t)$ 是对角阵，且：

$$P^{-1}(t) = (\Gamma(t)/\bar{a})I.$$

这里 $\Gamma(t) = \mathrm{trace}\{P(t)^{-1}\}$，且 $\bar{a}$ 是一个标量常数，I 是单位矩阵，那么有

$$\Gamma(t) = \lambda\Gamma(t-1) + \phi^T(t-d)\phi(t-d).$$

这样就有了简化的自适应参数估计器：

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + (\bar{a}/\Gamma(t))\phi(t-d)\varepsilon(t).$$

关于 λ 的选择，以 Cordero[1]的提法为依据，把他的记忆长度重写如下：

$$N'(t) = [(1 + \phi^T(t-d)P(t-1)\phi(t-d)/\varepsilon^2(t)]\sigma.$$

从而我们就得到了在新的记忆长度 $N(t)$ 下的一种新的自校正控制方案.

自校正调节器 I:

数据：$\hat{\theta}(0)$, $\Gamma(0)$, σ, r, C.

第一步：$\varepsilon(t) = Y(t) - \phi^T(t-d)\hat{\theta}(t-1)$;

第二步：$N(t) = [(1 + \bar{a}\phi^T(t-d)\phi(t-d)/\Gamma(t-1)/\varepsilon^2(t)]\sigma$;

第三步：$\lambda(t) = 1 - 1/N(t)$;

第四步：$\Gamma(t) = \bar{\lambda}(t)\Gamma(t-1) + \phi^T(t-d)\phi(t-d)$;

第五步：$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + (\bar{a}/\Gamma(t))\phi(t-d)\varepsilon(t)$;

第六步：从 $\phi^T(t)\hat{\theta}(t) = Y^*(t+d)$ 中求出 $u(t)$.

在第三步中，如果 $N(t) \leqslant N$，则设 $N(t) = N$. $\bar{\lambda}(t)$ 和 $\bar{a}$ 的意义分别是：

如果 $\Gamma(t) = \lambda(t)\Gamma(t-1) + \phi^T(t-d)\phi(t-d) \geqslant C$，则 $\bar{\lambda}(t) = \lambda(t)$，否则 $\lambda(t) = 1$. 如果 $(\hat{\theta}(t-1) + (1/\Gamma(t))\varepsilon(t))_{n+1} = 0$，则

$\bar{a} \triangleq \gamma$, $\gamma \in (0, 2)$, $r \neq 1$.

$\bar{a} \triangleq 1$，其它.

$\bar{a}$ 之所以做这种规定，是为了防止 $\beta_0 = 0$ 的情况发生，以避免在求控制律时被零除. 关于初始数据 σ 的选择，仿真研究表明，一般 σ 与统计方差的比值在 100 左右.

对算法的收敛性分析，与 Goodwin[2]的方法相似，下面直接给出结论.

定理 1. 沿控制算法 $\hat{\theta}(t)$ 和 $u(t)$ 解的方向，向量 $\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta_0$ 的欧里几德模是非增加函数，即

$$\|\tilde{\theta}(t)\|^2 - \|\tilde{\theta}(t-1)\|^2 \leqslant 0,\ t \geqslant 0,$$

且

$$\lim_{t\to\infty} \phi^T(t)\tilde{\theta}(t)/\sqrt{\Gamma(t)} = 0.$$

这里 θ_0 是系统的真实参数.

定理 2. 在设定条件 $A1$—$A4$ 得以满足的情况下，如果对式(2.1)所示的系统进行控制，那么 $\{Y(t)\}$ 和 $\{u(t)\}$ 是有界的，且 $\lim\limits_{t\to\infty}[Y(t) - Y^*(t)] = 0$.

2.3. 自校正调节器 II

在自校正调节器 I 中，控制律是通过直接估计求得的，本节采用类似 Astrom[3] 的处理方法，假定参数 β_0 是已知的，可导出第二个算法.

自校正算法 II:

数据: $\theta(0), \Gamma(0), \sigma, C$.

第一步: $\varepsilon(t) = Y(t) - \phi^T(t-d)\hat{\theta}(t-1) - \hat{\beta}_0 u(t-d)$;

第二步: $N(t) = [(1 + \phi^T(t-d)\phi^T(t-d)/\Gamma(t-1))/\varepsilon^2(t)]\sigma$;

第三步: $\lambda(t) = 1 - 1/N(t)$;

第四步: $\Gamma(t) = \bar{\lambda}\Gamma(t-1) + \phi^T(t-d)\phi(t-d)$;

第五步: $\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + (1/\Gamma(t))\phi^T(t-d)\cdot\varepsilon(t)$;

第六步: $u(t) = (1/\hat{\beta}_0)(Y^*(t+d) - \phi^T(t)\hat{\theta}(t))$.

这里: $\phi^T(t) = (Y(t)\cdots Y(t-n+1)u(t-1)\cdots u(t-p))$;

$\theta^T = (\alpha_0\cdots\alpha_{n-1}\ \beta_1\cdots\beta_p)$;

$N(t)$ 的限制及 $\bar{\lambda}(t)$ 的意义，与算法 I 相同.

此算法的收敛性证明很困难，对它做另一种处理，把系统的预测方程写成下列形式:

$$\begin{aligned} Y(t+d) &= \alpha_0 Y(t) + \cdots + \alpha_{n-1}Y(t-n+1) + \beta_0 u(t) + \cdots + \beta_p u(t-p) \\ &= \beta_0(\alpha_0' Y(t) + \cdots + \alpha_{n-1}' Y(t-n+1) + u(t) + \cdots + \beta_p' u(t-p)), \end{aligned}$$

令
$$\begin{aligned} e(t+d) &= Y(t-d) - Y^*(t+d) \\ &= \beta_0(u(t) + \alpha_0' Y(t) + \cdots + \alpha_{n-1}' Y(t-n+1)\beta_1' u(t-1) \\ &\quad + \cdots + \beta_p' u(t-p) - 1/\beta_0 Y^*(t+d)) \\ &= \beta_0(u(t) - \phi^T(t)\theta_0'). \end{aligned}$$

这里 $\phi^T(t) \triangleq (-Y(t), \cdots - Y(t-n+1), -u(t-1), \cdots, -u(t-p), Y^*(t+d))$,

$\theta_0'^T \triangleq (\alpha_0'\cdots\alpha_{n-1}'\ \beta_1'\cdots\beta_p'\ \ 1/\beta_0)$.

显然使得跟随误差为零的 $u(t) = \phi^T(t)\theta_0'$.

当系统的参数未知时，对参数进行递推估计，其控制方案如下:

数据：$\hat{\theta}'_0(0)$, $\Gamma(0)$, σ, C.

$$N(t) = [(1 + \phi^T(t-d)\phi(t-d)/\Gamma(t-1))/e^2(t)]\sigma,$$
$$\lambda(t) = 1 - 1/N(t),$$
$$\Gamma(t) = \bar{\lambda}\Gamma(t-1) + \phi^T(t-d)\phi(t-d),$$
$$\hat{\theta}'_0 = \hat{\theta}'_0(t-d) - [1/(\hat{\beta}_0\Gamma(t))]\phi(t-d)e(t),$$
$$u(t) = \phi^T(t)\hat{\theta}'_0(t).$$

这里 $e(t) = \hat{\beta}_0(u(t-d) - \phi^T(t-d)\hat{\theta}'_0(t-d))$, $N(t)$ 的限制及 $\bar{\lambda}(t)$ 的意义与算法 I 相同.

与证明算法 I 的方法相似，如 $\hat{\beta}_0$ 的选择满足条件 $0 < \beta_0/\hat{\beta}_0 < 2$，则算法 II 与算法 I 有相同的收敛特性.

三、结　论

当被控系统满足确定性、时不变、最小相等条件时，两种自校正算法具有全局收敛性。我们曾对算法作过典型例子的仿真研究，结果表明，只要 $N(t)$ 中 σ 因子选择得当，与较复杂的 Cordero[1]的方法相比较，具有很相近的运行特性. 这两种算法可以不困难地扩展到多输入多输出的系统.

参　考　文　献

[1] Cordero, A. O., et al., Deterministic Convergence of A Self-tuning Regulator With Variable Forgetting Factor. IEE PROC., Pt. D 1(1981), 19.

[2] Goodwin, G. C., et al., Discrete-time Multivariable Adaptive Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 3(1980), 449.

[3] Astrom, K. J., et al., On Self Tuning Regulators, *Automatica*, 9(1973), 185.

A KIND OF SIMPLE SELF-TUNING REGULATOR WITH VARIABLE FORGETTING FACTOR

Zhang Dianhua　　Lang Shijun

(Northeast Institute of Technology)

Abstract

In this paper, a kind of self-tuning regulators with variable forgetting factor are shown. The algorithms are simple and are upwards compatible for the time-varying case. It is shown that they have got deterministic convergence property.