第15卷 第1期　　自 动 化 学 报　　Vol. 15, No. 1
1989 年 1 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Jan., 1989

一般非线性系统的 Kalman 分解

程代展　王洪才
（中国科学院系统科学研究所）

摘　要

本文讨论一般非线性系统的标准分解问题. 线性系统的 Kalman 分解给出了系统的能控状态、能观状态和系统的最小实现. 本文首先给出非线性系统的局部第一类 Kalman 分解形式,从而解决了系统的局部能控状态和局部能观状态的分解. 然后,再给出第二类 Kalman 分解形式,它提供了非线性系统的局部最小实现.

一、引　言

给定一个线性系统

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu,\\ y = Cx.\end{cases} \tag{1.1}$$

由线性系统理论可知[1], 存在一个线性变换 $T: x \to z$, 使在 z 坐标下系统(1.1)具有如下的 Kalman 分解形式:

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{z}^1\\ \dot{z}^2\\ \dot{z}^3\\ \dot{z}^4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_{11} & 0 & A_{13} & 0\\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24}\\ 0 & 0 & A_{33} & 0\\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z^1\\ z^2\\ z^3\\ z^4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B_1\\ B_2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u,\\ y = c_1 z^1 + c_3 z^3.\end{cases} \tag{1.2}$$

在这个分解式中,状态变量 z^1, z^2 张成能控子空间,状态 z^1, z^3 张成能观子空间,而子系统

$$\begin{cases}\dot{z}^1 = A_{11}z^1 + B_1 u,\\ y = C_1 z^1.\end{cases} \tag{1.3}$$

则为原系统的一个最小实现.

考虑定义在 n 维流形上的一个非线性系统,它在局部坐标邻域下表示为

$$\begin{cases}\dot{x} = f(x, u),\\ y = h(x).\end{cases} \tag{1.4}$$

这里 $x \in M$, M 为一 n 维解析流形; $u(t) \in \mathbb{R}^m$; 对定常 u, $f(\cdot, u)$ 为M上的解析向量场; $y(t) \in \mathbb{R}^r$, h 为M到 r 维流形N的解析映射.

本文的目标是对系统(1.4)给出局部标准分解, 使得系统的局部能控状态、局部能观

本文于 1986 年 10 月 3 日收到.

状态以及局部最小实现能够由标准分解中得到．因为所得到的分解形式与 Kalman 分解式十分类似，所以把它们称为非线性系统的 Kalman 分解．

对于仿射非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i, \\ y = h(x), \end{cases} \tag{1.5}$$

[2]中曾给出它的 Kalman 分解形式．因此，本文可以看作[2]中工作的继续．

二、记号与预备知识

对于系统(1.4)，定义一族向量场

$$F = \{f(x, u) \mid u = \text{const.}\} \tag{2.1}$$

由 F 生成的李代数，记作 $\mathscr{F}$，即

$$\mathscr{F} = \{f(x, u) \mid u = \text{const.}\}_{LA}. \tag{2.2}$$

由 F 中任意两个向量场的李括号所生成的向量场集合产生的李代数，称为 $\mathscr{F}$ 的导出李代数，记作 $\mathscr{F}'$，即

$$\mathscr{F}' = \{[X, Y] \mid X, Y \in F\}_{LA}.$$

下面再构造 $\mathscr{F}$ 的一个子代数 $\mathscr{F}_0$：

$$\mathscr{F}_0 = \left\{\sum_{i=1}^{t} \lambda_i X_i + Y \mid t < \infty,\ \lambda_i \in \mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{t} \lambda_i = 0,\ X_i \in F,\ Y \in \mathscr{F}'\right\}. \tag{2.3}$$

文献[3]证明了：作为分布，如果 $\mathscr{F}$ 在点 $x_0 \in M$ 处维数为 n，则系统在 x_0 点可接近 (*accessible*)．它的几何意义是：从 x_0 出发，可达集具有非空内点．如果 $\mathscr{F}_0$ 在该点维数为 n，则系统在 x_0 点强可接近 (*strongly accessible*)． 即对任一时刻 $T > 0$ 的可达集均有非空内点．

再定义一族对偶向量场

$$\Omega = \{L_{X_1}L_{X_2}\cdots L_{X_s}dh_i \mid X_1, X_2, \cdots, X_s \in F,\ 0 \leqslant s < \infty,\ i = 1, 2, \cdots, r\}. \tag{2.4}$$

这里 $h_1, h_2, \cdots, h_r$ 为 h 的分量表达式．由 Ω 可构造出一个对偶分布

$$\mathscr{H} = \left\{\sum_{j=1}^{t} r_j\omega_j \mid t < \infty,\ r_j \in \mathbb{R},\ \omega_j \in \Omega\right\}. \tag{2.5}$$

对于 C^∞ 系统[4]证明了：如果 $\mathscr{F}$ 在 x_0 点维数为 n，则系统在 x_0 局部弱能控．即存在 x_0 的一个邻域 V，对任一 $x \in V$，存在 $x_1, x_2, \cdots, x_s = x \in V$，使得 x_i 属于 x_{i+1} 的可达集，或 x_{i+1} 属于 x_i 的可达集，$i = 0, 1, \cdots, s-1$． 如果 $\mathscr{H}$ 在 x_0 点维数为 n，则系统在 x_0 点局部弱能观． 即存在 x_0 的一个邻域 V，对任一 $x \in V$，存在控制 u，使得输出

$$y(x_0, u, t) \neq y(x, u, t).$$

一个非线性系统，如果它的输入-输出响应与非线性系统(1.4)一样，则称它为(1.4)的一个实现．如果在 x_0 的一个邻域 V 上它们的输入-输出响应一样，则称前者为(1.4)的一个局部实现．如果系统(1.4)在 x_0 点邻域存在一个局部实现，它是状态维数最小的局部实

现,则称它为局部弱最小实现.

定理 2.1[4]. 解析非线性系统(1.4)在 x_0 点为局部弱最小实现的充要条件是：它在 x_0 点局部弱能控且局部弱能观.

本文中其他一些概念与记号可参见[7].

三、第一类 Kalman 分解式

设 Δ 为一个分布，X 为一个向量场，如果

$$[X, \Delta] \subset \Delta,$$

则称 Δ 为 X 不变分布. 同样，如果 D 为一个对偶分布，并且

$$L_X D \subset D,$$

则称 D 为 X 不变分布. 如果 F 为一向量场集合，且对任一 $X \in F$，分布 Δ (对偶分布 D) 均为 X 不变的，则称 $\Delta(D)$ 为 F 不变分布(对偶分布).

由定义式(2.2)及(2.3)可知，对由(2.1)给出的 F，分布 $\mathscr{F}$ 及 $\mathscr{F}_0$ 都是 F 不变分布. 而定义式(2.5)所给出的对偶分布 $\mathscr{H}$ 则为 F 不变对偶分布.

下面定义 $\mathscr{H}$ 的消去分布 Δ_u:

$$\Delta_u = S_p\{X \in V(M) | \langle \omega, X\rangle = 0,\ \forall \omega \in \mathscr{H}\}.$$

下面将证明，Δ_u 的积分流形是最大的不能观状态子流形. 因此，称 Δ_u 为不能观分布. 下面讨论它的一些性质.

引理 3.1. 对于(2.1)式所定义的向量场集合 F，不能观分布 Δ_u 为 F 不变分布.

证明：任取 $X \in F$，$Y \in \Delta_u$，$\omega = L_{X_1}L_{X_2}\cdots L_{X_s}dh_i \in \Omega$，由 Liebnitz 公式[7]可知

$$\begin{aligned}\langle \omega, [X, Y]\rangle &= \langle L_{X_1}L_{X_2}\cdots L_{X_s}dh_i, [X, Y]\rangle \\ &= L_X\langle L_{X_1}L_{X_2}\cdots L_{X_s}dh_i, Y\rangle - \langle L_X L_{X_1}L_{X_2}\cdots L_{X_s}dh_i, Y\rangle = 0.\end{aligned} \tag{3.1}$$

由 $\mathscr{H}$ 的结构式(2.5)可知,(3.1)式对任一 $\omega \in \mathscr{H}$ 也成立. 因此,

$$[X, Y] \in \Delta_u.$$

这说明 Δ_u 是 F 不变分布.

引理 3.2. Δ_u 是对合分布.

证明：设 $X, Y \in \Delta_u$，$\omega \in \Omega$，利用 Liebnitz 公式，则

$$\langle \omega, [X, Y]\rangle = L_X\langle \omega, Y\rangle - \langle L_X\omega, Y\rangle.$$

右边第一项显见为 0. 至于第二项，由于李导数 L_{X_i} 与外微分 d 可交换[5]，所以,

$$\omega = L_{X_1}L_{X_2}\cdots L_{X_s}dh_i = dL_{X_1}L_{X_2}\cdots L_{X_s}h_i$$

是一个正则微分一型. 对于正则微分一型，利用公式

$$L_X\omega = \left(\frac{\partial \omega^t}{\partial x}\cdot X\right)^t + \omega\,\frac{\partial X}{\partial x},$$

可以证明:

$$L_X\omega = d\langle \omega, X\rangle = 0.$$

因此可知,

$$\langle \omega, [X, Y]\rangle = 0. \tag{3.2}$$

显然，对任一 $\omega\in\mathscr{H}$，上式也成立．这就证明了 Δ_u 是对合的．

引理 3.3. $\mathscr{F}_0+\Delta_u$ 也是一个对合分布．

证明：因为 $\mathscr{F}_0$ 及 Δ_u 均为对合分布，要证明 $\mathscr{F}_0+\Delta_u$ 也是对合分布，只要证明：对任意 $X\in\mathscr{F}_0$，$Y\in\Delta_u$，均有

$$[X,Y]\in\mathscr{F}_0+\Delta_u. \tag{3.3}$$

因为 Δ_u 是 F 不变的，设 $X_1, X_2\in F$，现在要证明 Δ_u 也是 $[X_1, X_2]$ 不变的．利用 Jacobi 等式可知，

$$[[X_1, X_2], \Delta_u]=[X_1,[X_2, \Delta_u]]-[X_2, [X_1, \Delta_u]]\subset\Delta_u. \tag{3.4}$$

利用(3.4)式以及 $\mathscr{F}_0$ 的结构式，即可证明(3.3)式成立．

定理 3.4. 设 $p\in M$ 为 $\mathscr{F}_0$、Δ_u 及 $\mathscr{F}_0+\Delta_u$ 的非奇异点，即在 p 点的某个邻域上它们有定常维数，那么，存在 p 的一个局部坐标邻域，使在该坐标 z 下系统(1.4)具有如下的 Kalman 分解形式：

$$\begin{cases}\dot z^1=f^1(z^1, z^3, u),\\ \dot z^2=f^2(z, u),\\ \dot z^3=f^3(z^3),\\ \dot z^4=f^4(z^3, z^4),\end{cases} \tag{3.5}$$
$$y=h(z^1, z^3),$$

而且，式中 (z^1, z^2) 为强可接近状态，(z^1, z^3) 为局部弱能观状态．

证明：由 Frobenius 定理可知，如果一个 C^∞ 分布 Δ 在 p 点附近维数为 k，并且是对合的，那么，就存在 $n-k$ 个正则微分一型 $dz_1, dz_2,\cdots, dz_{n-k}$，它们线性无关，并且

$$\langle dz_i, \Delta\rangle=0,\ i=1, 2,\cdots, n-k.$$

由于 $\mathscr{F}_0+\Delta_u$ 对合，且在 p 点非奇异，则存在 $dz_1^3, dz_2^3,\cdots, dz_{n_3}^3$，使得

$$\langle dz_i^3, \mathscr{F}_0+\Delta_u\rangle=0,\ i=1, 2,\cdots, n_3,$$

这里，$n_3=n-\dim(\mathscr{F}_0+\Delta_u)$．

同理，存在 $dz_1^4, dz_2^4,\cdots, dz_{n_4}^4$，使得 $dz_1^3,\cdots, dz_{n_3}^3, dz_1^4,\cdots,dz_{n_4}^4$ 线性无关，且

$$\langle dz_i^4, \mathscr{F}_0\rangle=0,\ i=1, 2,\cdots, n_4.$$

这里，$n_4=n-\dim\mathscr{F}_0-n_3$；存在 $dz_1^1, dz_2^1,\cdots, dz_{n_1}^1$，使得 $dz_1^1,\cdots, dz_{n_1}^1$, $dz_1^3,\cdots$, $dz_{n_3}^3$ 线性无关，并且

$$\langle dz_i^1, \Delta_u\rangle=0,\ i=1, 2,\cdots, n_1.$$

这里，$n_1=n-\dim(\Delta_u)-n_3$．不难证明，dz_j^i，$i=1, 3, 4$，$j=1, 2,\cdots, n_i$ 均线性无关．因此，可选择 $z_1^2, z_2^2,\cdots, z_{n_2}^2$，使得 dz_j^i，$i=1,2,3,4$，$j=1,2,\cdots, n_i$ 均线性无关，并且 $\sum_{i=1}^{4} n_i=n$．

于是，可选择 z_j^i 作为 p 点邻域的一个局部坐标．由作法可知，

$$\mathscr{F}_0=S_p\left\{\frac{\partial}{\partial z_j^i}\,\middle|\,i=1, 2,\ j=1,2,\cdots, n_i,\right\} \tag{3.6}$$

$$\Delta_u=S_p\left\{\frac{\partial}{\partial z_j^i}\,\middle|\,i=2, 4,\ j=1, 2,\cdots, n_i\right\}. \tag{3.7}$$

在 z 坐标下，因为

$$[f, \Delta_u] \subset \Delta_u,$$

所以，可以推出，

$$\frac{\partial}{\partial z_j^i}(f^k) = 0, \ i = 2, 4, \ j = 1, 2, \cdots, n_i, \ k = 1, 3.$$

也就是说，f^1, f^3 只跟 z^1, z^3 有关。

同样，因为 $\mathscr{F}_0$ 也是 F 不变的，所以，f^3, f^4 只跟 z^3, z^4 有关。

最后证明：f^3, f^4 与 u 无关。反设 f^3 或 f^4 中有某个分量 f_i，它与某个 u_j 有关，即 $\partial f_i / \partial u_j = 0$，那么，总能找到两个常数 u_j^1, u_j^2, 使得

$$f_i(u_j^1) - f_i(u_j^2) \neq 0.$$

这说明： $X \triangleq f(z, u_j^1) - f(z, u_j^2) \notin \mathscr{F}_0$。

这是因为 $\mathscr{F}_0$ 只由前 $n_1 + n_2$ 个分量张成，而 X 的后 $n_3 + n_4$ 个分量中有非零元。但由定义可知，$X \in \mathscr{F}_0$，故得矛盾。

从以上的讨论可知，在 z 坐标下，系统(1.4)的状态方程具有(3.5)中相应状态方程的形式。至于输出方程，因为

$$\langle dh_k, \Delta_u \rangle = 0, \ k = 1, 2, \cdots, r,$$

则必然有：

$$\frac{\partial}{\partial z_j^i} h_k = 0, \ i = 2, 4, \ j = 1, 2, \cdots, n_i, \ k = 1, \cdots, r.$$

根据定义[3,4]及(3.6)，(3.7)两式不难推出：z^1, z^2 为强可接近状态，z^1, z^3 为局部弱能观状态。因为它平行于[2]中相应的讨论，这里就略去了。

四、一个例子

考虑非线性系统

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \\ \dot{z}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 + \arcsin^2 z_5 \\ \arcsin z_5 \\ z_1 + z_3 - \arcsin z_5 \\ z_4 + \arcsin^2 z_5 \\ (z_1 + z_4)\sqrt{1 - z_5^2}/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(z_1 - z_4) + 1 \\ z_2 \\ 0 \\ \frac{1}{2}(z_1 - z_4) + 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(z_1 + z_4) \\ z_3 - \arcsin z_5 - 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2}(z_1 + z_4) \\ 0 \end{bmatrix} u_2,$$

$$\begin{cases} y_1 = z_5^2 + z_5, \\ y_2 = (z_1 + z_4)^2 + 2(z_1 - z_4), \end{cases} \tag{4.1}$$

在 O 点邻域的 Kalman 分解。

下面略去繁琐的机械运算而直接给出主要结果。

$$\mathscr{F}_0 = S_p\{(1, 0, 0, 1, 0)^t, (0, 1, 0, 0, 0)^t, (0, 0, 1, 0, \sqrt{1 - z_5^2})^t\},$$

$$\Delta_u = S_p\{(0, 1, 0, 0, 0)^t, (0, 0, 1, 0, 0)^t\}.$$

据此，选择如下的新坐标：

$$x=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)=(z_1,\ z_5,\ z_2,\ z_4-z_1,\arcsin z_5-z_3).$$

在新坐标下系统为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\\ \dot{x}_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+\arcsin^2 x_2\\ \left(x_1+\dfrac{1}{2}x_4\right)\sqrt{1-x_2^2}\\ \arcsin x_2\\ x_4\\ \dfrac{1}{2}x_4+x_5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1-\dfrac{1}{2}x_4\\ 0\\ x_3\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u_1+\begin{bmatrix}x_1+\dfrac{1}{2}x_4\\ 0\\ 1-x_5\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u_2,$$

$$\begin{cases}y_1=x_2^2+x_2,\\ y_2=(2x_1+x_4)^2-2x_4.\end{cases}$$

这里，x_1，x_4，x_3 是强可接近状态；x_1，x_2，x_4 为局部弱能观状态.

五、第二类 Kalman 分解式

由前可知，第一类 Kalman 分解式与线性系统的 Kalman 分解形式结构完全一样，仅有线性与非线性的区别. 唯一不足之处在于：从分解式(3.5)不易找出系统的局部最小实现. 因此，要考虑第二类 Kalman 分解式. 主要结果如下.

定理 5.1. 设 $p\in M$ 为 $\mathscr{F}$，Δ_u，及 $\mathscr{F}+\Delta_u$ 的非奇异点，那么，在 p 点的一个邻域上，存在局部坐标 z，使得系统(1.4)具有如下的分解形式：

$$\begin{cases}\dot{z}^1=f^1(z^1,\ z^3,\ u),\\ \dot{z}^2=f^2(z,\ u),\\ \dot{z}^3=0,\\ \dot{z}^4=0,\end{cases}\tag{5.1}$$
$$y=h(z^1,\ z^3).$$

而且，其中 z^1，z^2 为局部弱能控状态，z^1，z^3 为局部弱能观状态. 子系统

$$\begin{cases}\dot{z}^1=f^1(z^1,\ c,\ u),\\ y=h(z^1,\ c),\end{cases}\tag{5.2}$$

为原系统的一个局部弱最小实现. 这里，c 为 n_3 维常数.

因为整个证明过程均与第三节相同，这里略去. 只是指出，在(5.1)中，

$$\mathscr{F}=S_p\left\{\frac{\partial}{\partial z_j^i}\,\middle|\,i=1,\ 2,\ j=1,\ 2,\cdots,\ n_i\right\},$$

$$\Delta u=S_p\left\{\frac{\partial}{\partial z_j^i}\,\middle|\,i=2,\ 4,\ j=1,\ 2,\cdots,\ n_i\right\},$$

因而可立即推出：z^1，z^2 为局部弱能控状态，z^1，z^3 为局部弱能观状态. 再根据(5.1)式不难推知，(5.2)为局部弱能控且局部弱能观系统. 由方程(5.1)及(5.2)的结构可知，它们实现的是同一个输入-输出响应. 这样，利用定理 2.1 可知，系统(5.2)为原系统的一个局部

弱最小实现.

最后讨论一下非线性系统 Kalman 分解的存在区域. [6]中曾证明: 一个连续分布的非奇异点集合包含M的一个开稠集. 因此, 容易推知: 存在M的一个开稠集 V, 使在V上 $\mathscr{F}_0$ (或 $\mathscr{F}$), Δ_u, $\mathscr{F}_0+\Delta_u$ (或 $\mathscr{F}+\Delta_u$) 点点非奇异. 因此, 对这个开稠集的每一点,都存在局部第一(或第二) Kalman 分解式. 当然,对V中不同的点, 各部分状态的维数 n_1, n_2, n_3, n_4 可能不同,但由连续性可知,在V的每一个连通分支上, n_1, n_2, n_3, n_4 对各点都是一样的.

参 考 文 献

[1] Kalman, R. E., Canonical Structure of Linear Dynamic Systems, Proc. National Acad. Sci. U. S. A., No. 48, 1962.
[2] Cheng, D., Canonical Structure of Nonlinear Systems, Accepted by IFAC 10th World Conf., 1987.
[3] Sussmann, H. J., Controllability of Nonlinear Systems, J. Diff. Eq's, No. 12, 1972.
[4] Hermann, R. and Krener, A. J., Nonlinear Controllability and Observability, *IEEE Trans. Aut. Contr.* AC-22, No. 5, 1977.
[5] Isidori, A., Nonlinear Control Systems: An Introduction, Lecture Notes in Contr. Informat. Sci. 71, Springer, Berlin, 1985.
[6] 程代展,一般非线性系统的解耦, Conf. Modern Math. and Mech. 北京,1986. «应用数学学报»,待发表.
[7] 程代展,秦化淑,非线性系统的几何方法(I)——几何方法与几何基础,«控制理论与应用»,待发表.

KALMAN DECOMPOSITION OF GENERAL NONLINEAR SYSTEMS

Cheng Daizhan Wang Honggai

(Institute of Systems Science, Academia Sinica)

Abstract

This paper deals with the canonical decomposition of general nonlinear systems. The Kalman decomposition of linear systems provides the controllable states, observable states, and the minimal realization of linear systems. This paper gives, firstly, the local first Kalman decomposition of nonlinear systems, which shows the local observable states and the local controllable states. Then, there is the second Kalman decomposition, which provides the local minimal realization of nonlinear systems.