第15卷 第1期 自动化学报 Vol. 15, No. 1
1989年1月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 1989

具有最小特征值灵敏度的输入-输出反馈补偿器的设计

徐和生 陈锦娣 耿福昌
(北京工业学院)

摘 要

本文讨论了具有最小特征值灵敏度的输入-输出反馈补偿器的设计方法. 它是通过通常设计的输入-输出反馈补偿器所具有的某些自由度来实现的.

一、引 言

输入-输出反馈补偿器是常用的补偿器形式之一，它可用以实现极点配置、常用的各种最佳传递函数矩阵和模型匹配等. 一般情况下，所设计的输入-输出反馈补偿器均存在某些自由度，本文就是利用这些自由度来减小系统的灵敏度，以达到整个系统的特征值灵敏度最小.

二、输入-输出反馈补偿器的设计

设被控对象的动态特性可由其传递函数矩阵 $G(s)$ 完全表征，$G(s)$ 为 $q\times p$ 真有理函数矩阵，其既约右矩阵分式描述为

$$G(s)=N(s)D^{-1}(s), \tag{1}$$

其中 $D(s)$ 和 $N(s)$ 分别为 $p\times p$ 和 $q\times p$ 多项式矩阵. 加入输入-输出反馈补偿器

$$C_u(s)=D_c^{-1}(s)N_u(s) \tag{2a}$$

和

$$C_y(s)=D_c^{-1}(s)N_y(s), \tag{2b}$$

其中 $D_c(s)$、$N_u(s)$ 和 $N_y(s)$ 分别为 $p\times p$、$p\times p$ 和 $p\times q$ 多项式矩阵. 则整个系统(见图1)从 $\boldsymbol{r}$ 到 $\boldsymbol{y}$ 的传递函数矩阵为

$$\begin{aligned}G_f(s)&=N(s)[D_c(s)D(s)+N_u(s)D(s)+N_y(s)N(s)]^{-1}D_c(s)\\&\triangleq N(s)D_f^{-1}(s)D_c(s),\end{aligned} \tag{3}$$

其中

$$D_f(s)=D_c(s)D(s)+N_u(s)D(s)+N_y(s)N(s). \tag{4}$$

设图1中 $\{D(s), N(s)\}$ 右互质(即被控对象为既约的)，$D(s)$ 为列化简，且

$$\delta_{ci}D(s)\geqslant\delta_{ci}N(s)\quad i=1,2,\cdots,p; \tag{5}$$

本文于1986年5月23日收到.

$$\delta_{ci}D(s) \triangleq \mu_i, \quad i=1,2,\cdots,p; \tag{6}$$

这里 $\delta_{ci}D(s)$ 和 $\delta_{ci}N(s)$ 分别表示多项式矩阵 $D(s)$ 和 $N(s)$ 第 i 列的列次数.

$$\mu \triangleq \max\{\mu_i, i=1,2,\cdots,p\}, \tag{7}$$

$$n \triangleq \sum_{i=1}^{p}\mu_i. \tag{8}$$

$D_c(s)$ 为行化简，

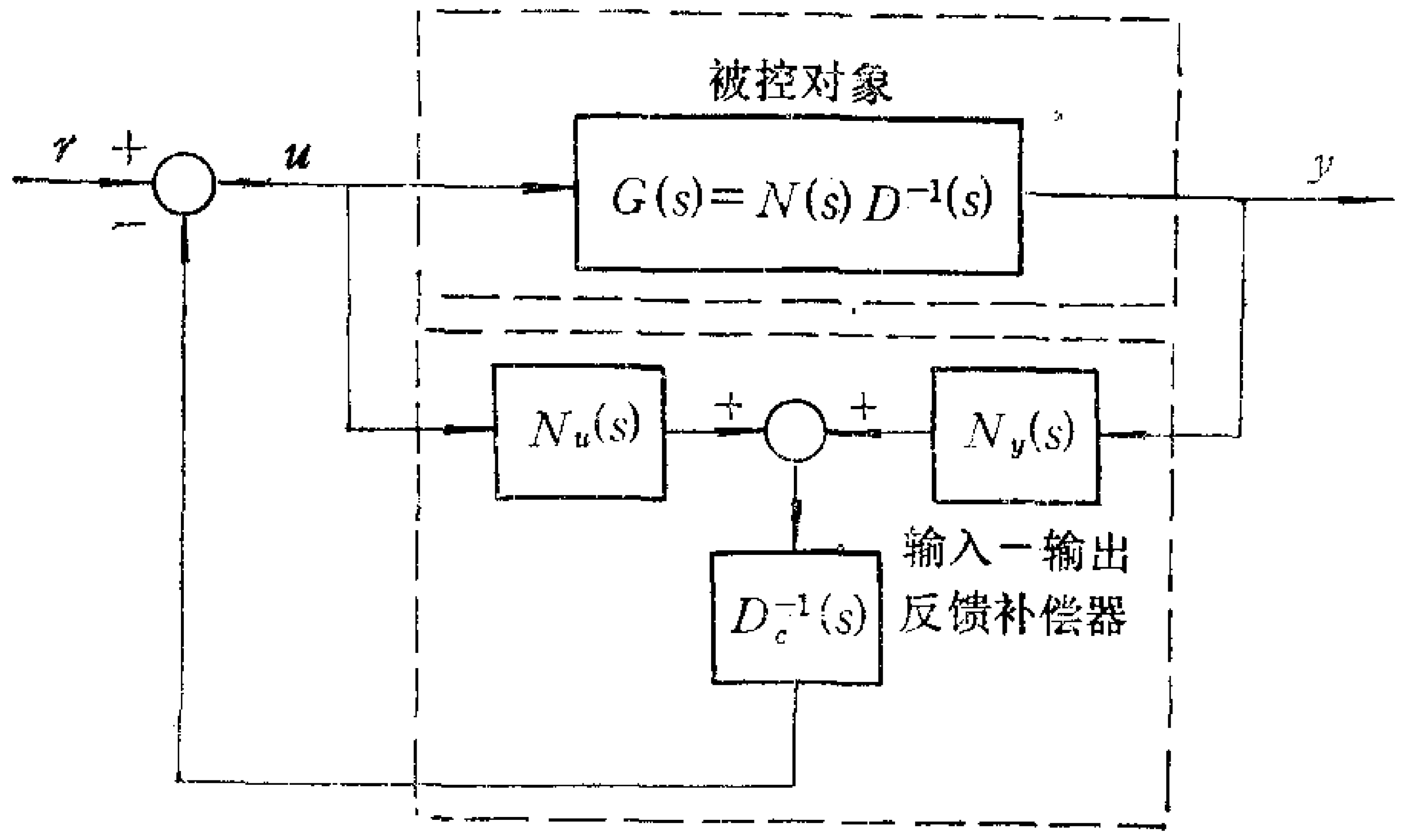

图 1　具有输入-输出反馈补偿器的闭环系统方块图

$$\delta_{ri}D_c(s) \triangleq k, \quad i=1,2,\cdots,p; \tag{9}$$

这里 $\delta_{ri}D_c(s)$ 表示 $D_c(s)$ 的第 i 行的行次数。$D_f(s)$ 为列化简，

$$\delta_{ci}D_f(s) = \mu_i + k, \quad i=1,2,\cdots,p. \tag{10}$$

文 [1] 证明了满足上述约束的任何 $D(s)$、$N(s)$、$D_f(s)$ 和 $D_c(s)$，(4) 式对 $N_u(s)$ 和 $N_y(s)$ 有解，且得到的补偿器 $C_u(s)=D_c^{-1}(s)N_u(s)$ 和 $C_y(s)=D_c^{-1}(s)N_y(s)$ 为真有理的充分必要条件是 $k \geqslant \nu - 1$. 这里 ν 为 $G(s)=N(s)D^{-1}(s)$ 的行指数，即可观测性指数.

令
$$D_f(s) = H(s)\bar{D}_f(s) \tag{11a}$$
和
$$D_c(s) = H(s)\bar{D}_c(s), \tag{11b}$$
其中
$$H(s) = \operatorname{diag}\{h_i(s), i=1,2,\cdots,p\}$$
$$\triangleq \operatorname{diag}\left\{\prod_{j=1}^{k}(s-\alpha_{ij}), i=1,2,\cdots,p\right\}, \tag{12}$$

$$\delta_{ci}\bar{D}_f(s) = \mu_i + k - k_1, \quad i=1,2,\cdots,p, \tag{13}$$

且 $\bar{D}_f(s)$ 为列化简；

$$\delta_{ri}\bar{D}_c(s) = k - k_1, \quad i=1,2,\cdots,p, \tag{14}$$

且 $\bar{D}_c(s)$ 为行化简. 显见，这样选取的 $D_f(s)$ 和 $D_c(s)$ 满足上述条件，并且 $\bar{D}_f(s)$、$\bar{D}_c(s)$ 和 $H(s)$ 在满足(13)和(14)式约束的条件下可任意选取.

将(11)式代入(3)和(4)式，得

$$G_f(s) = N(s)\bar{D}_f^{-1}(s)H^{-1}(s)H(s)\bar{D}_c(s) = N(s)\bar{D}_f^{-1}(s)\bar{D}_c(s) \tag{15}$$

和

$$H(s)\bar{D}_f(s) = H(s)\bar{D}_c(s)D(s) + N_u(s)D(s) + N_y(s)N(s), \tag{16}$$

式中 $\overline{D}_f(s)$ 和 $\overline{D}_c(s)$ 是根据设计要求选定的(当然应满足(13)和(14)式的约束条件); $\det H(s)=0$ 的根 α_{ij}, $j=1,2,\cdots,k_1$, $i=1,2,\cdots,p$, 是系统的输入解耦零点,即不可控模式. 只要各个 α_{ij} 的实部均为负,且比 $\det\overline{D}_f(s)=0$ 的主根的实部更负, 则它不仅不会影响系统的稳定性,而且对整个系统的动态特性影响不大. 因此, α_{ij} 的选取具有很大的自由度. 选取不同的 $H(s)$, 由方程(16)解得的 $N_u(s)$ 和 $N_y(s)$ 就不同. 从而当 $D(s)$ 和 $N(s)$ 的系数变化时,系统的特征值的变化也不同,即系统的特征值灵敏度与 $H(s)$ 的选取有关. 这表明,我们可以利用这个自由度来减小系统的参数灵敏度,使整个系统的特征值灵敏度达到最小. 当然, $H(s)$ 的选取应满足上述约束条件,即

$$\det H(s)=0$$

的根 α_{ij} 的实部应比 $\det\overline{D}_f(s)=0$ 的主根的实部更负.

三、小灵敏度补偿器的设计

所谓特征值灵敏度,就是指系统的特征值对系统参数的变化率[2,3]. 这里取特征值灵敏度的指标函数为

$$I_s=\sum\left[\left(\frac{\partial s_i}{\partial n_{ljk}}\right)^2+\left(\frac{\partial s_i}{\partial d_{ljk}}\right)^2\right], \tag{17}$$

其中 $s_i, i=1,2,\cdots,n+p(k-k_1)$, 为 $\det\overline{D}_f(s)=0$ 的根, n_{ljk} 和 d_{ljk} 分别为 $N(s)$ 和 $D(s)$ 的第 (j,k) 个元素中 s 的 l 次方的系数.

由于 $\det\overline{D}_f(s)=0$ 的根是由设计者选定的,故可设 $\det\overline{D}_f(s)=0$ 的根两两互异,并且 $\det\overline{D}_f(s)=0$ 和 $\det H(s)=0$ 没有相同的根,即 $\det H(s_i)\neq 0$.

由隐函数的微分定理知,对于 $f(x,y)=0$, 有

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}.$$

因为 $s_i, i=1,2,\cdots,n+p(k-k_1)$, 满足 $\det(H(s)\overline{D}_f(s))=\det(H(s)\overline{D}_c(s)D(s)+N_u(s)D(s)+N_y(s)N(s))=0$, 所以,

$$\frac{\partial s_i}{\partial\alpha}=-\left.\frac{[\det(H(s)\overline{D}_c(s)D(s)+N_u(s)D(s)+N_y(s)N(s)]'_\alpha}{[\det(H(s)\overline{D}_f(s))]'_s}\right|_{\substack{s=s_i\\ \alpha=\alpha_0}} \tag{18}$$

其中 α 表示被控对象 $N(s)$ 和 $D(s)$ 的某个系数, α_0 为 α 的标称值. 上式中

$$[\det(H(s)\overline{D}_f(s))]'_s\big|_{\substack{s=s_i\\ \alpha=\alpha_0}}$$

为标称参数时特征多项式对 s 的导数在 $s=s_i$ 点的值, 由于 s_i 为单根, 故该导数不为零,并且易于计算. 而 $[\det(H(s)\overline{D}_c(s)D(s)+N_u(s)D(s)+N_y(s)N(s))]'_\alpha\big|_{\substack{s=s_i\\ \alpha=\alpha_0}}$ 则是一个非奇异矩阵行列式对矩阵某一元素的微分问题,它可根据下列公式计算[4].

$$\frac{d[\det P(\alpha)]}{d\alpha}=tr\left[\operatorname{adj}P(\alpha)\cdot\frac{dP(\alpha)}{d\alpha}\right], \tag{19}$$

式中 tr 表示矩阵的迹, $P(\alpha)$ 为非奇异方阵,且对 α 可微. 而 $\operatorname{adj}P(\alpha)$ 可利用 Faddeev 递推公式算出,即

$$\operatorname{adj} P(\alpha) = \frac{R_{n-1}(s)}{a_n(s)}, \tag{20}$$

其中 $R_{n-1}(s)$ 和 $a_n(s)$ 可由下列递推公式算出

$$
\begin{aligned}
R_0(s) &= I &&\longrightarrow\ a_1(s) = -tr[P(s)R_0(s)] \\
&&&\swarrow \\
R_1(s) &= P(s)R_0(s) + I a_1(s) &&\longrightarrow\ a_2(s) = -\frac{1}{2}tr[P(s)R_1(s)] \\
&&&\swarrow \\
R_2(s) &= P(s)R_1(s) + I a_2(s) &&\longrightarrow\ a_3(s) = -\frac{1}{3}tr[P(s)R_2(s)] \\
&\ \ \vdots &&\qquad\qquad\quad \vdots \\
&&&\swarrow \\
R_{n-1}(s) &= P(s)R_{n-2}(s) + I a_{n-1}(s) &&\longrightarrow\ a_n(s) = -\frac{1}{n}tr[P(s)R_{n-1}(s)] \\
&&&\swarrow \\
0 &= P(s)R_{n-1}(s) + I a_n(s).
\end{aligned}
$$

至此，特征值灵敏度函数 $\dfrac{\partial s_i}{\partial n_{ljk}}$ 和 $\dfrac{\partial s_i}{\partial d_{ljk}}$ 的求取问题完全解决。尽管假设

$$H(s) = \operatorname{diag}\{h_i(s),\ i = 1, 2, \cdots, p\}$$

为简单的对角线形，但是要列出使特征值灵敏度函数 I_s 为最小的 $H(s)$ 的参数解析关系

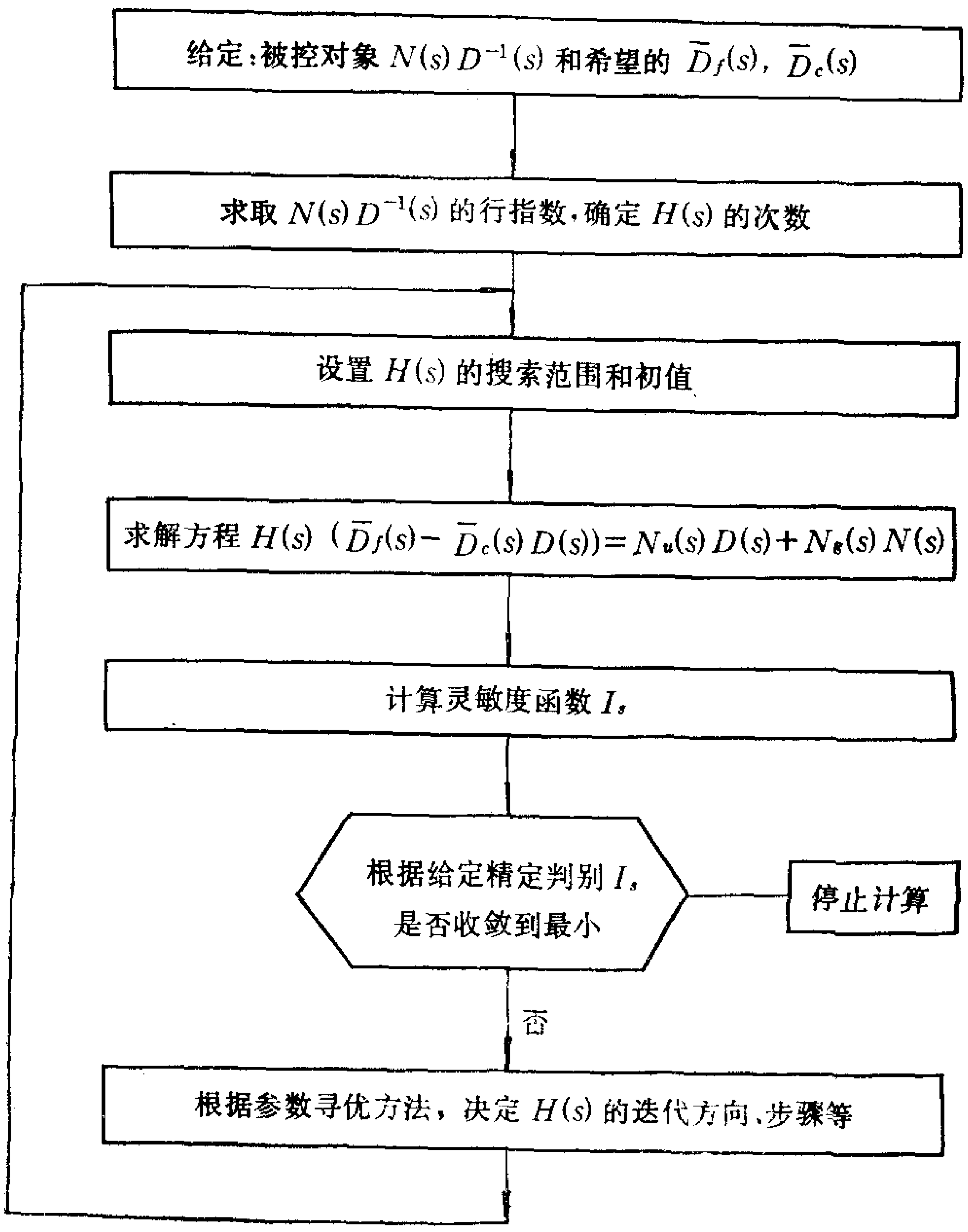

图 2

式仍是非常困难的，只能用参数寻优方法解决.

最后，用框图形式给出利用参数寻优方法求取特征值灵敏度为最小的输入-输出反馈补偿器的设计步骤，如图 2 所示.

四、仿 真 结 果

设有被控对象

$$G(s)=N(s)D^{-1}(s)$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0.1765\\ 2.1176 & 1.8824\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4.5542 & 5.3313+6.0241s\\ 2.1672+2.99975+0.0337s^2 & 2.6660\end{bmatrix}^{-1},$$

希望

$$\overline{D}_f(s)=\begin{bmatrix}2.1002-0.046s & 8.4483+6.0241s\\ 8.8172+3.6577s+0.0337s^2 & -5.6130\end{bmatrix}$$

$$\overline{D}_c(s)=I.$$

取

$$H(s)=\begin{bmatrix}(s-\alpha_{11})(s-\alpha_{12}) & 0\\ 0 & (s-\alpha_{21})(s-\alpha_{22})\end{bmatrix},$$

用单纯形法求得特征值灵敏度函数 I_s 为最小的补偿器为

$$H(s)=\begin{bmatrix}s^2+56.3026s+792.131 & 0\\ 0 & s^2+39.2781s+385.385\end{bmatrix},$$

$$N_u(s)=\begin{bmatrix}1402.71+15.2627s & 3055.27-1.36482s\\ -1831.67-17.9944s & -3848.63+19.5229s\end{bmatrix},$$

$$N_y(s)=\begin{bmatrix}778.494+48.3721s+20.1222s^2 & -7061.34-444.169s-49.0757s^2\\ -1540.34-10.2217s+45.2751s^2 & 9088.06+5713.43s+48.9447s^2\end{bmatrix},$$

而 $H(s)$ 在寻优初值

$$H(s)=\begin{bmatrix}135.350+23.2680s+s^2 & 0\\ 0 & 135.350+23.2680s+s^2\end{bmatrix}$$

时解得

$$N_u(s)=\begin{bmatrix}-68.5108-0.917740s & -203.147-1.36482s\\ -873.758-5.35040s & -1816.94+19.5229s\end{bmatrix},$$

$$N_y(s)=\begin{bmatrix}5413.32+11.6340s+11.6340s^2 & 198.390+261.226s+3.50223s^2\\ 3084.71+11.6340s+11.6340s^2 & 4163.77+2680.36s+11.6340s^2\end{bmatrix}.$$

系统的数字仿真结果示于图 3. 图中曲线 1 为标称参数时的输出阶跃响应 $y=[y_1, y_2]^T$（这里 T 表示转置），曲线 2 和 3 分别为 $N(s)$ 和 $D(s)$ 的变化量 $\Delta N(s)$ 和 $\Delta D(s)$ 为

$$\Delta N(s)=\begin{bmatrix}-0.07647 & -0.01176\\ -0.02353 & 0.11765\end{bmatrix},$$

$$\Delta D(s)=\begin{bmatrix}-0.07186 & 0\\ -0.01081 & 0.016685\end{bmatrix}$$

时，$H(s)$ 为寻优初值时的输出阶跃响应和 I_s 为最小时的输出阶跃响应.

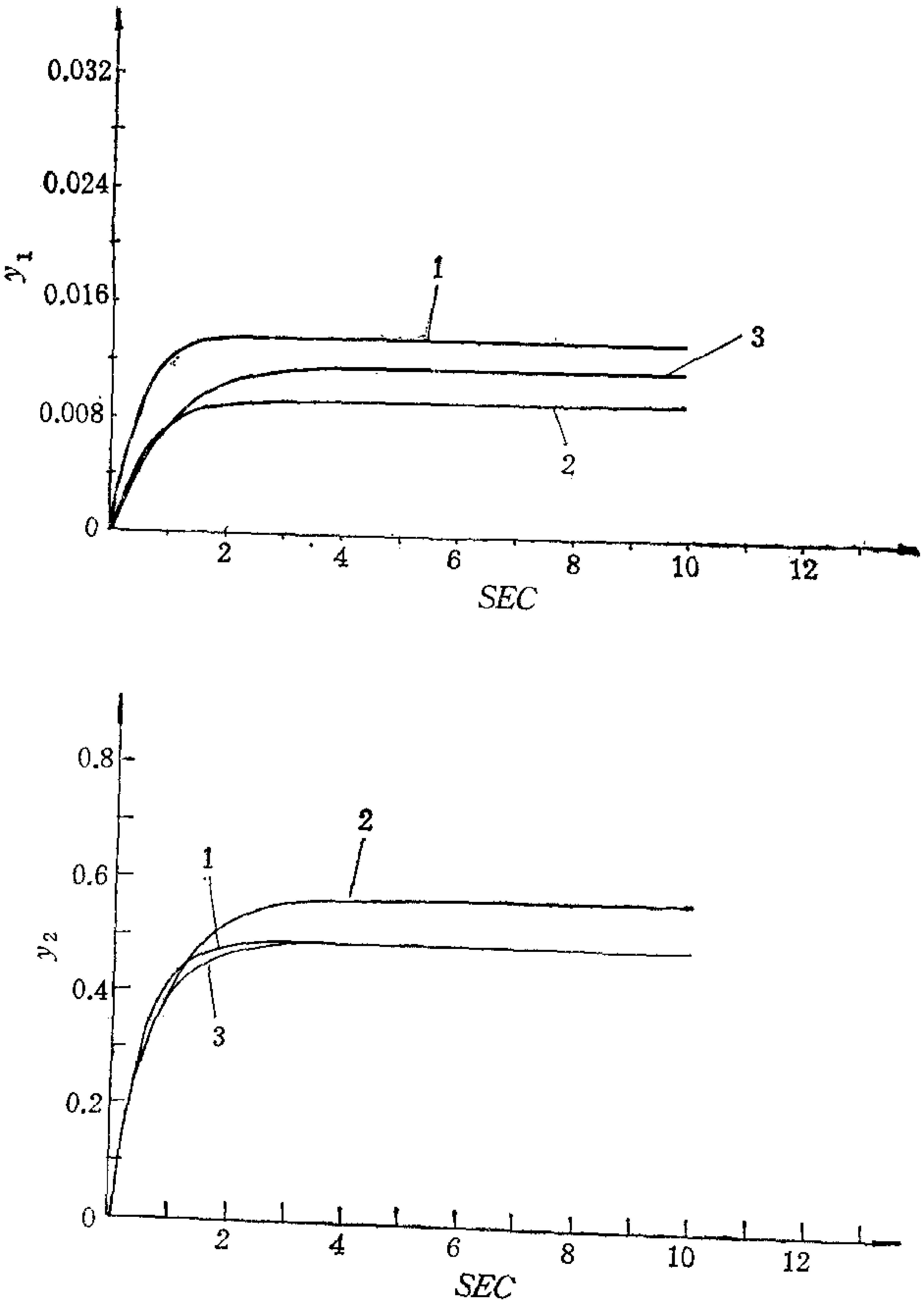

图 3

五、结　束　语

本文讨论了系统的特征值 ($\det D_f(s)=0$ 的根)两两互异时，具有最小特征值灵敏度的输入-输出反馈补偿器的设计问题. 当系统具有重特征值时，(18)式的分母为零，这表明不能用(17)式来定义具有重特征值的系统的灵敏度函数. 然而，只要将系统的特征值灵敏度函数的定义扩展为

$$I_s\triangleq\sum\left[\frac{(\partial s_i)^{\nu_i}}{\partial\alpha}\right]^2=\sum\left[-\nu!\,\frac{\partial\det D_f(s)}{\partial\alpha}\bigg/\frac{\partial^{\nu_i}\det D_f(s)}{\partial s^{\nu_i}}\right]\Bigg|_{\substack{s=s_i\\ \alpha=\alpha_0}}$$

即可解决，式中 ν_i 为 $\det D_f(s)=0$ 的根 s_i 的重数，α_0 为系统参数 α 的标称值. 对于这个问题，这里就不详细讨论了，有兴趣的读者可参考文献[5].

参 考 文 献

[1] Chen, C. T., Linear System Theory and Design, CBS College Publishing (1984), 512.

[2] Gourishankar, V. and Ramar, R., Pole Assignment with Minimum Eigenvalue Sensitivity to Plant Parameter Variations, *Int. J. Contr.* Vol. **23**(1976), 493—504.

[3] Gourishankar, V. and Ramar, R., Utilization of The Freedom of Pole Assignment Controller of Unrestricted Rank, *Int. J. Contr.* Vol. **24**(1977), 423—430.

[4] 韩京清，何关钰，许可康，线性系统理论代数基础，辽宁科学技术出版社 (1985)，468.

[5] Frank, P. M., Introduction to System Sensitivity Theory, San Francisco London (1978), 234—235.

THE DESIGN OF INPUT-OUTPUT FEEDBACK COMPENSATORS WITH MINIMUM EIGENVALUE SENSITIVITY

XU HESHENG CHEN JINDI GENG FUCHANG

(Beijing Institute of Technology)

ABSTRACT

The design of input-output feedback compensators with minimum eigenvalue sensitivity is considered in this paper. It is implemented by some degrees of freedom of the general input-output feedback compensator.