第 15 卷 第 1 期
1989 年 1 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 15, No. 1
Jan., 1989

一种线性动态模型参数估计方法

江 韬
(扬子石油化工公司)

摘 要

本文提出一种线性动态模型参数估计方法，该算法改进并推广了 Durbin 算法. 它能在噪声过程结构未知时，给出实际过程和噪声过程参数的全局 P 相容估值. 五个数字仿真例子表明了算法的有效性.

关键词：序列分析，系统辨识，参数估计，线性系统

一、引 言

噪声相关的线性动态模型参数的最小二乘估值是有偏倚的. 为了克服偏倚，提出了多种参数估计方法. 最近，Mayne、Åström 和 Clark 提出了受控的自回归滑动和模型(CARMA 模型)参数的三步最小二乘估计方法[1]，其第一步拟合一个 P 阶受控的自回归模型 (CAR 模型)，第二步用 CAR(P) 模型的残差和观测数据拟合 CARMA 模型，第三步用 MA 参数对观测数据和残差滤波，并用滤波后的数据重新拟合 CARMA 模型，得到精度更高的参数估值，其前二步构成了 Durbin 算法. Mayne 等在证明三步算法估值是 P 相容的同时，也证明了二步算法估值的 P 相容性. 同时仿真实例表明[1]，三步算法与二步算法的估值精度相近. 因此，从应用的观点，二步算法简单有效，更为实用.

本文提出的新息修正最小二乘算法改进并推广了二步算法，它能在过程结构已知，噪声过程结构未知时，给出参数的全局 P 相容估值，该算法采用另一种最小二乘递推格式——增参数递推格式进行参数估计，减少了计算量，且能充分地运用统计检验手段，提高了算法可靠性，扩展了应用范围.

设实际过程可用下式描述：

$$y(k)=\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(k)+\frac{G(z^{-1})}{F(z^{-1})}e(k), \tag{1}$$

式中，

$$A(z^{-1})=1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots\cdots+a_nz^{-n},$$
$$B(z^{-1})=b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots\cdots+b_nz^{-n},$$
$$G(z^{-1})=1+g_1z^{-1}+g_2z^{-2}+\cdots\cdots g_rz^{-r},$$
$$F(z^{-1})=1+f_1z^{-1}+f_2z^{-2}+\cdots\cdots+f_sz^{-s}.$$

式中，z^{-1} 为单位滞后算子，$\{y_k\}$，$\{u_k\}$，$\{e_k\}$ 分别为输入、输出和不相关的零均值白噪

本文于 1986 年 10 月 27 日收到.

声. 假设:

(1) $z^n A(z^{-1})$ 的零点均在单位圆内,

(2) 噪音过程平稳可逆,即 $z^r G(z^{-1})$ 和 $z^s F(z^{-1})$ 的零点均在单位圆内,

(3) 输入信号 $\{u_k\}$ 与 $\{e_k\}$ 不相关,且是 P 阶持续激励的.

上述假设条件是很宽的,几乎包括了所有噪音过程具有有理谱密度的平稳线性动态过程,不过直接对式(1)进行参数辨识是困难的. 由噪声过程平稳性假设,式(1)可近似地用一个 CARMA 模型表示:

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + e(k) + C(z^{-1})e(k). \tag{2}$$

式中, $1+C(z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{m} C_i z^{-i}$ 是 $A(z^{-1})G(z^{-1})/F(z^{-1})$ 的前 $m+1$ 项. 当 $i \to \infty$, $C_i \to 0$, 只要适当选取 m, (2) 式可以满足任何精度要求. 因此式(1)过程的参数估计可归结为一个自回归部分和受控部分结构已知而滑动平均部分阶次未知的 CARMA 模型的参数估计问题.

二、算 法

1. 最小二乘法的增参数递推公式

为避免重复求解基本最小二乘方程,减少计算量,本算法采用增参数递推最小二乘技术. 通过简单地修正已有的 k 参数模型,增加新参数,递推 $k+1$ 参数模型的最小二乘估值. 文献[2]讨论了 CAR 模型阶次增加时的递推算法*, 本文将这一算法推广应用于噪声相关系统的参数估计.

考虑 $k+1$ 参数模型,其参数集 $\boldsymbol{\theta}_{k+1} = (\theta_1, \theta_2 \cdots \theta_k \vdots \theta_{k+1})^T = (\boldsymbol{\theta}_k \vdots \theta_{k+1})^T$, 相应的 $\phi_{k+1} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \cdots \boldsymbol{x}_k \vdots \boldsymbol{x}_{k+1}) = (\phi_k \vdots \boldsymbol{x}_{k+1})$, 其中 $\boldsymbol{x}_i = [x_i(1) x_i(2) \cdots\cdots x_i(N)]^T$. 假设已经得到 k 参数模型参数的最小二乘估值 $\hat{\hat{\theta}}_k$ 和 $P_k = (\phi_k^T \phi_k)^{-1}$, 欲递推估计 $k+1$ 参数模型. 由最小二乘方程 $\boldsymbol{\theta} = (\phi_k^T \phi_k)^{-1} \phi^T \boldsymbol{y}$ 和分块矩阵求逆公式,易得:

$$P_{k+1} = (\phi_{k+1}^T \phi_{k+1})^{-1} = \begin{bmatrix} P_k + \boldsymbol{e} \boldsymbol{x}_{k+1} \phi_k P_k & -\boldsymbol{e} \\ -\boldsymbol{e}^T & b \end{bmatrix} \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{e} = P_k \phi_k^T \boldsymbol{x}_{k+1} b$, $b = 1/(\boldsymbol{x}_{k+1}^T \boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_{k+1}^T \phi_k P_k \phi_k^T \boldsymbol{x}_{k+1})$.

$$\left.\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_k &= \hat{\hat{\theta}}_k - \boldsymbol{e} \boldsymbol{x}_{k+1}^T (\boldsymbol{y} - \phi_k \hat{\hat{\theta}}_k), \\ \hat{\theta}_{k+1} &= b \boldsymbol{x}_{k+1}^T (\boldsymbol{y} - \phi_k \hat{\hat{\theta}}_k). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

式(3)、(4)构成了完整的递推算法.

2. CAR(p) 模型的辨识

同 Durbin 算法一样,首先对于一个 CAR(p) 模型进行辨识:

$$\sum_{i=0}^{p} \alpha_i z^{-i} y(k) = \sum_{i=1}^{p} \beta_i z^{-i} u(k) + \varepsilon(k), \quad \alpha_0 = 1, \tag{5}$$

将下式极小化:

---

* 文献[2]中增阶递推公式有误,本文做了改正.

$$J = \sum_{k=p}^{N+p}\left[\sum_{i=0}^{p}\hat{\alpha}_i z^{-i}y(k) - \sum_{i=1}^{p}\hat{\beta}_i z^{-i}u(k)\right]^2. \tag{6}$$

不过，本算法采用增阶递推 LS 算法，因此在拟合 CAR(P) 过程中得到了 CARMA 模型(2)的有偏 LS 估计—— CAR(n) 的估值.

由假设 $z^r G(z^{-1})$ 的零点均在单位圆内，因此只要阶次 p 足够高，CAR(p) 模型(5)将以足够高的精度近似 CARMA 模型(2). 由于噪音过程未知，事先给出既满足精度要求又不使计算量过大的 p 值是困难的，因此采用 F 检验定阶. 下面给出增阶辨识 CAR 模型和确定 p 值的方法.

按增参递推公式(3)、(4)，从零参数模型开始，依 $\alpha_1, \beta_1, \cdots\cdots \alpha_p, \beta_p$ 顺序增加参数 α_i 或 β_i, $i = 1, p$, 相应的 $\boldsymbol{x}_{k+1}$ 为 $(y(m-i), y(m-i+1)\cdots y(N+m-i))^T$ 或 $(u(m-i)u(m-i+1)\cdots\cdots u(m+N-i))^T$, $m \geqslant p$, 增阶递推估计 CAR 模型，同时计算统计量

$$tg = \frac{A_0 - A_1}{A_1} \times \frac{N-2i}{2}, \tag{7}$$

其中 A_0 和 A_1 分别为 $i-1$ 阶和 i 阶 CAR 模型的残差平方和，N 为观测数据组数.

当 $i-1 \geqslant p$ 时，统计量 tg 服从 $(N-2i, 2)$ 的 F 分布. 显著性水平取 $\alpha = 0.01$ 或 0.05，由 F 分布表可查得相应的 F 分布值 $t\alpha$. 当 $tg < t\alpha$ 时，可以认为继续增大阶次，新息估值精度不会有显著提高，应结束增阶辨识. 按式(8)计算残差，$\{\hat{\varepsilon}_k\}$ 即需要的新息估值：

$$\hat{\varepsilon}_k = \sum_{i=0}^{p}\alpha_i y(k-i) - \sum_{i=1}^{p}\beta_i u(k-i). \tag{8}$$

3. 偏倚的消除和 MA 阶次的确定

与 Durbin 算法不同，本算法在第二阶段不重新拟合 CARMA 模型(2)，而是直接用 $\{\hat{\varepsilon}_{k-1}\}$、$\{\hat{\varepsilon}_{k-2}\}\cdots\{\hat{\varepsilon}_{k-m}\}$ 代替式 (2) 中的 $\{e_{k-1}\}$、$\{e_{k-2}\}\cdots\{e_{k-m}\}$，依 $c_1 c_2 \cdots c_m$ 顺序，按增参数递推公式(3)、(4)逐个增加 MA 参数，修正已得到的 CAR(n)模型，极小化

$$J = \sum_{k=n}^{N+n}\left[\sum_{i=0}^{n}\hat{a}_i z^{-i}y(k) - \sum_{i=0}^{n}\hat{b}_i z^{-i}u(k) - \sum_{i=0}^{m}\hat{c}_i z^{-i}\hat{\varepsilon}(k)\right]^2. \tag{9}$$

满足精度要求的 MA 阶次 m 则由 F 检验确定，即在逐个增加噪音参数 c_j 时，计算统计量：

$$tg = \frac{V_0 - V_1}{V_1}(N - 2n - j), \tag{10}$$

式中 V_0 为 CARMA(n, n, j − 1) 模型的残差平方和，V_1 为 CARMA(n, n, j) 模型的残差平方和.

当 $j > m$ 时，$tg \sim F(1, N-2n-j)$ 分布，由 F 分布表查得给定显著性水平 α 的临界分布值 $t\alpha$. 若 $tg < t\alpha$ 时，$j-1$ 即为合理的 MA 阶次 m，CARMA$(n, n, j-1)$ 模型的参数估值就是式(2)参数的无偏估计.

三、数字仿真

为了表明算法的有效性，本文给出五个仿真例子.

例 1:
$$(1+0.9z^{-1}+0.15z^{-2}+0.02z^{-3})y(k)$$
$$=(0.7z^{-1}-1.5z^{-2})u(k)+\frac{1}{1-z^{-1}+0.41z^{-2}}e(k)$$[2].

例 2:
$$(1+2.851z^{-1}+2.717z^{-2}-0.865z^{-3})y(k)$$
$$=(z^{-1}+z^{-2}+z^{-3})u(k)+(1+0.7z^{-1}+0.2z^{-2})$$[3].

例 3:
$$(1+0.9z^{-1}+0.95z^{-2})y(k)$$
$$=1.0z^{-1}u(k)+(1+1.5z^{-1}+0.75z^{-2})e(k)$$[4].

例 4:
$$(1+1.5z^{-1}+0.7z^{-2})y(k)$$
$$=(1+0.5z^{-1})u(k)+\frac{1-0.189z^{-1}}{1-1.027z^{-1}+0.264z^{-2}}e(k)$$[5].

例 5: $(1+1.5z^{-1}+0.7z^{-2})y(k)=(1+0.5z^{-1})u(k)+(1+0.99z^{-1})e(k)$.

例 1 至 4 取自有关文献，例 5 则是笔者为了讨论 $z^rG(z^{-1})$ 存在接近 1 的零点时新息修正算法的辨识效果而构造的，例 4 与例 5 的自回归部分和受控部分参数完全相同.表 1—5 是上述模型的辨识结果. 表中 N 为观测数据长度，p 为用本法辨识时，CAR(p) 模型的阶次.仿真时，除例1、3的输入信号采用了方差为 1 的零均值正态白噪声外，均采用幅度为 ±1 的伪随机信号；扰动序列采用方差为 σ^2 的零均值正态白噪声；F 检验时，α 取 0.01 或 0.05.

表 1 模型 1 的参数估值

算法 \ 真值	a_1 0.90	a_2 0.15	a_3 0.02	b_1 0.70	b_2 −1.5
GLS*	0.89277	0.17993	0.01958	0.70047	−1.48706
RELS	0.85508	0.03195	0.03613	0.64967	−1.4232
新息修正算法	0.90580	0.15569	0.01750	0.70016	−1.51519

$N=300$ $\sigma=1$ $S/N=1.18$ 修正算法 $p=5$

* GLS 算法估值引自[2].

表 2 模型 2 的参数估值

算法 \ 真值	a_1 −2.851	a_2 2.717	a_3 −0.865	b_1 1.0	b_2 1.0	b_3 1.0	c_1 0.7	c_2 0.2
新息修正算法	−2.864	2.746	−0.8801	0.9414	0.9236	0.9846	0.7581	0.2069
RELS	−2.881	2.780	−0.897	1.004	0.9173	0.999	0.6395	0.1420
ML*	−2.851	2.717	−0.865	1.06	0.81	1.05	0.72	0.20

$N=300$ $\sigma=1$ 修正算法 $p=5$

* ML 估值引自[3].

表 3　模型 3 的参数估值

σ ＼ 算法 ＼ 真值		a_1 0.90	a_2 0.95	b_1 1.0	c_1 1.5	c_2 0.75
1.0	新息修正算法	0.8970	0.9440	0.9719	1.4379	0.6828
	RELS	0.8553	0.9293	0.9948	1.2453	0.4138
1.5	新息修正算法	0.8959	0.9430	0.9625	1.4368	0.6811
	RELS	0.8339	0.9324	1.0084	1.2379	0.4166

$N=2000$　　修正算法　　$p=8$

表 4a　模型 4 的参数估值

σ ＼ 算法 ＼ 真值		a_1 -1.5	a_2 0.7	b_1 1.0	b_2 0.5	c_1 -0.667
0.5	新息修正算法	-1.509	0.7059	0.9690	0.5026	-0.6216
	RELS	-1.500	0.6942	1.085	0.4552	-0.3861
1.5	新息修正算法	-1.515	0.7053	0.909	0.5243	-0.6227
	RELS	-1.4865	0.6663	1.2785	0.2234	-0.4938

表 4b　模型 4 中 MA 阶次对残差平方和的影响

项目 ＼ MA 阶次 ＼ σ	0.5		1.5	
	1	2	1	2
残差平方和	55.31	54.41	493.5	485.6
统计量 tg	4.06		3.99	

$N=250$　　新息修正算法　　$p=5$

仿真结果表明：(1) 新息修正估值有较高的精度，几乎在所有的情况下均优于增广最小二乘估值．例 1、2 的新息修正估值不劣于相应的广义最小二乘 (GLS) 估值或极大似然 (ML) 估值．例 3 是 Ljung 等给出的 RELS 算法收敛的反例，新息修正算法也能得到良好的估值．(2) 本算法用 F 检验法确定 MA 过程阶次是有效的．为了节省篇幅，本文仅以例 4 为例．例 4 具有式(1)表示的结构，其等阶的 CARMA 模型的 MA 参数应为 $c_1=0.662$，$c_2=0.0396$，$c_3=0.082\cdots\cdots$可以认为合理的 MA 阶次是 1，取信度为 0.01，相应的 F 分布临界值 $t\alpha$ 为 6.63．表 4b 给出的该例 MA 阶次由 1 增至 2 时的 F 检验值 tg 小于 $t\alpha$，程序正确地判定 MA 阶次为 1．(3)当 $z^rG(z^{-1})$ 存在接近于 1 的零点时，表 5 数据表明，此时新息修正方法虽仍能显著降低偏移，但估值精度明显降低．适当提高 CAR(p) 模型的阶次，可以有限地提高精度．由于 CAR(P) 模型参数收敛速度很慢，且高阶系统将引起更大的数值误差，因此过高的 p 值未必能更多地提高精度，却大大增加了计算量．此时，若对精度有更高要求，可采用其他参数估计方法．(4)本算法中，

表 5* 模型 5 的参数估值

σ	算法 \ 真值	a_1 −1.5	a_2 0.70	b_1 1.0	b_2 0.5	c_1 0.99
0.5	LS	−1.568	0.765	1.002	0.412	—
	新息修正 $p=7$（F 检验确定）	−1.519 ±0.034	0.721 ±0.033	0.995 ±0.063	0.459 ±0.032	0.928 ±0.132
	新息修正 $p=15$（人为确定）	−1.518 ±0.031	0.721 ±0.033	0.990 ±0.062	0.460 ±0.069	0.977 ±0.134
4	LS	−1.675	0.834	1.018	0.143	—
	新息修正 $p=7$（F 检验确定）	−1.541 ±0.053	0.732 ±0.052	0.981 ±0.491	0.295 ±0.494	0.899 ±0.135
	新息修正 $p=15$（人为确定）	−1.549 ±0.0517	0.739 ±0.051	0.918 ±0.487	0.284 ±0.489	0.949 ±0.140

$N=250$

* 表中新息修正估值的下面一行数字为相应的 95% 置信区间.

用F检验法确定 CAR(p) 的阶次是有效的. 即使对相应于式(1)中的 $z^r G(z^{-1})$ 的根存在十分接近于 1 的零点的例(5),用F检验确定 p 值时，真值仍均落在新息修正估值的 95% 置信区间内,参数估值有一定的精度（表 5),这意味着用F检验法可以在很宽的范围内给出合理的阶次 p.

四、结 语

本文提出的新息修正最小二乘算法是一种简单、有效的参数估计方法. 其本质是增参数递推格式的 Durbin 二步算法,二步算法估值的全局 p 相容性已为[1]所证明，因此本算法估值的全局 p 相容性可直接由增参递推最小二乘公式与基本最小二乘方程的等价性得出. 当 $z^r G(z^{-1})$ 的零点显著在单位圆内时,估值有满意的精度；当存在接近于 1 的零点时,估值精度降低,但仍能显著地减小偏倚. 该算法充分运用了统计手段,比 Durbin 算法更为有效和可靠,且不要求噪音结构已知,扩展了算法的使用范围. 上述优点是在减少计算量的同时获得的.

参 考 文 献

[1] Mayne, D. Q., et al., A New Aglorithm for Recursive Estimation of Parameters in Controled ARMA Process, *Automatica*, Vol. **20**, 6(1984), 751—760.

[2] Hsia, T. C, System Identification, D. C. Heath and Company Lexington, 1977.

[3] 袁著祉等,现代控制理论在工程中的应用,科学出版社(1985),153—166.

[4] Ljung, L., et al., Counterexamples to General Convergence of a Commonly Used Recursive Identification Method, *IEEE Trans. Aut. Control*, **AC-20**(1975), 643—650.

[5] Iserman, R., et al., Comparision of Six On-Line Identification and Parameter Estimation Methods with three Simulated Processes, *Automatica*, Vol. **10**, 1(1974), 81—103.

AN ALGORITHM FOR EESTIMATION OF PARAMETERS IN LINEAR DYNAMIC MODEL

JIANG TAO

(Yangzi Petro-Chemical Corporation)

ABSTRACT

This paper presents an algorithm for estimating parameters in linear dynamic model with unknown structure of noisy process. It is an extension and modificatio of Durbin's aigorithm. It can yield the (globally) consistent estimates of both real process and noisy process.

Five simulation examples illustrate its effectiveness.

Key words　Time series, System identification, Parameter estimation, Linear system