第 15 卷 第 1 期 自 动 化 学 报 Vol. 15, No. 1
1989 年 1 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 1989

一种大系统图模型分析方法

张 杰
（北 京 钢 铁 学 院）

摘 要

本文采用模糊数学方法，提出把原有的大系统有向图模型推广成有向赋权图模型. 针对这种大系统信息结构模型，给出了分析其能通性的两种方法——矩阵法与图论法. 为了详细分析系统的结构，提出了分型能通性与能通性指标的概念. 这些概念方法不仅适用于有数学模型描述的系统，而且也适用于只能建立其图模型的系统. 最后本文针对线性定常系统讨论了分型能通性与分型可控性(可观性)之间的关系.

一、大系统的信息结构模型与能通阵计算

设大系统 S 是由 P 个小系统 $S_1S_2\cdots\cdots S_p$ 组成，S_i 的控制变量(即输入变量)个数为 r_i，输出变量个数为 m_i，状态变量个数为 n_i，其有向赋权图模型为 $D_i=(V_i, R_i, \phi_i)$. 相应的信息结构模型用矩阵型式表示为 $\Sigma_i=\{A_i, B_i, C_i\}$. 大系统控制变量个数为 r，输出变量个数为 m，状态变量个数为 $n=\sum_{i=1}^{p} n_i$. 不妨设小系统之间只通过输入输出相互发生影响. F, G, J 阵为小系统之间、小系统输入输出与大系统输入输出之间的关联矩阵，均为模糊矩阵[3].

大系统的信息结构阵 A^*、B^* 与 C^* 可以由各小系统信息结构阵 $A^{(i)}$、$B^{(i)}$ 与 $C^{(i)}$ $(i=1, 2, \cdots p)$ 及其关联阵 FGJ 所确定. 具体关系如下:

$$A^* = A + BF,$$
$$B^* = BG,$$
$$C^* = JC.$$

其中，

$$A=\begin{bmatrix} A^{(1)} & & & 0 \\ & A^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A^{(p)} \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} B^{(1)} & & & 0 \\ & B^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B^{(p)} \end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix} C^{(1)} & & & 0 \\ & C^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & C^{(p)} \end{bmatrix}$$

式中运算均为模糊矩阵运算，文中其它地方除特殊指明外所涉及的矩阵运算均如此.

根据大系统信息结构阵 A^*, B^* 与 C^* 再注意到模糊矩阵的性质可得大系统能通

本文于 1986 年 7 月 16 日收到.

阵 P_A^*, P_{AB}^* P_{CA}^* 与 P_{CAB}^* 如下:

$$P_A^* = \sum_{i=0}^{n-1} (A^*)^i = (I + A^*)^{n-1} = (I + A + BFC)^{n-1},$$

$$P_{AB}^* = P_A^* B^* = (I + A + BFC)^{n-1}BG,$$

$$P_{CA}^* = C^* P_A^* = JC(I + A + BFC)^{n-1},$$

$$P_{CAB}^* = C^* P_A^* B^* = JC(I + A + BFC)^{n-1}BG,$$

其中 $n = \sum_{i=1}^{p} n_i$.

以上是直接由各小系统信息结构阵及关联阵 F、G、J 确定大系统能通阵的计算公式,而这种"一揽子"解决方法有时会遇到"维数灾". 利用大系统的分解-协调思想[1], 可以先确定各小系统的能通阵, 然后再根据关联阵 F、G、J 即可确定 P_A^*、P_{AB}^*、P_{CA}^* 与 P_{CAB}^*, 就可以克服"维数灾"这个困难. 其具体关系式如下:

$$P_A^* = P_A + \sum_{i=1}^{N} (P_{AB}FP_{CA})^i,$$

$$P_{AB}^* = P_{AB}G + \sum_{i=1}^{N} (P_{AB}FP_{CA})^i BG,$$

$$P_{CA}^* = JP_{CA} + \sum_{i=1}^{N} JC(P_{AB}FP_{CA})^i,$$

$$P_{CAB}^* = JP_{CAB}G + \sum_{i=1}^{N} JC(P_{AB}FP_{CA})^i BG.$$

其中, $N =$ 足够大的正数,

$$P_A = \begin{bmatrix} P_A^{(1)} & & & 0 \\ & P_A^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & P_A^{(p)} \end{bmatrix} P_{AB}、P_{CA} \text{ 与 } P_{CAB} \text{ 类似},$$

证明略.

由此关系可以看到: 大系统能通阵完全由小系统能通阵及其关联阵 F、G、J 确定. 大系统的信息通道由两部分组成,一部分是大系统输入(输出)到小系统的直接通道,另一部分是大系统输入(输出)经其他小系统到本小系统的间接信息通道. 实际中利用此公式往往比直接根据 A^*、B^* 和 C^* 确定大系统能通阵要方便得多.

能通阵 P_A^*、P_{AB}^*、P_{CA}^* 和 P_{CAB}^* 全面反映了系统的能通性. 当需要分析关联程度大于等于 λ 情况下的大系统能通性时, 可以利用 $(P_A^*)_\lambda$、$(P_{AB}^*)_\lambda$、$(P_{CA}^*)_\lambda$ 和 $(P_{CAB}^*)_\lambda$ 来分析,其中 $\lambda \in [0, 1]$, $(P_A^*)_\lambda$ 是 P_A^* 的 λ-截矩阵. $(P_{AB}^*)_\lambda$、$(P_{CA}^*)_\lambda$ 和 $(P_{CAB}^*)_\lambda$ 的意义类似.

分析大系统信息结构能通性,不仅可以采用上述的矩阵方法进行,而且可以直接在图模型 D 上进行.

设大系统图模型为 $D = (V, R, \phi)$, 在 λ 条件下,分析其能通性. 首先, 将 D 中权

大于等于 λ 的边留下,其余的边去掉，得有向图 $D_\lambda=(V,R)$. 然后利用图的凝聚[6]方法,得其简化图 $\hat{D}_\lambda$. $\hat{D}_\lambda$ 仍保留原模型 D_λ 的主要特征(能通性)，从而可以通过 $\hat{D}_\lambda$ 能通性的分析来判断原模型 D_λ 的能通性. 下面以状态信息结构能通性为例，说明该判断方法.

在 λ 条件下,若 $\hat{D}_x$ 中每个节点均由两个或两个以上的状态变量凝聚而成，则状态信息结构全能通. 若 $\hat{D}_x$ 中存在着一个只由一个变量凝聚成的节点,且出度为零，则信息结构列不能通;若其入度为零,则状态信息结构行不能通. 类似地还可以分析其他能通性.

上述图论方法的最大特点是直观. 它可以直观地分析哪些信息通道是必要的、关键的,一旦遭到破坏就会影响整个系统的正常工作;哪些是多余的，可省去. 这有助于改革原信息结构中不合理的部分,进行最经济结构综合.

二、信息结构模型的分型能通性与能通性指标

为了更加细致地研究信息结构模型的能通性，下面引入分型能通性与能通性指标的概念. 引入这两个概念有助于揭示控制与输出机构和被控对象相互匹配的情况，阐明在系统控制与输出过程中对控制、输出机构的依赖程度和对被控对象耦合的利用程度. 例如在 λ 条件下， 0 型控制信息结构行能通的系统只依赖控制机构本身不利用对象耦合就可以实现对状态的控制，而 $n-1$ 型控制信息结构行能通的系统要求控制机构与对象多次匹配才能完成控制任务,利用对象耦合次数最多,这里 n 为系统的状态变量个数.

下面以状态信息结构能通为例定义分型能通性与能通性指标的概念. 称变量间相互影响量大于或等于 $\lambda(\lambda\in[01])$ 这个条件为 λ-条件.

若系统 m 型状态信息结构能通阵 $P_{A-m}=I+A+A^2+\cdots+A^m$ 满足 $R_{onz}\times(P_{A-m})_\lambda=n$，则称系统 λ-条件 m 型状态信息结构行能通. 其中，$m=0,1,2,\cdots n-1$. 它的物理意义在于: 在保证变量相互影响程度大于等于 λ 条件下,利用状态变量间耦合 m 次就可以实现每个状态都影响其它状态.

类似地可以定义列能通与全能通的概念并解释其物理意义.

称使得 $R_{onz}(P_{A-m})_\lambda=n$ 成立的最小正整数 m_λ 为系统的 λ 条件状态信息结构行能通性指标. 它的物理意义表明在保证影响程度大于等于 λ 条件下，每个状态影响其它状态只要利用长度 $l\leqslant m_\lambda$ 的信息通道即可办到,而至少有一条通道长度为 m_λ,

类似地可以定义列能通指标与全能通指标并解释其意义.

对于信息结构模型为 $\Sigma=(A、B、C)$ 的系统,称信息结构模型为 $\Sigma=(A^T、B^T、C^T)$ 的系统为其对偶系统.

设系统 S 的图模型为 $D=(V,R,\phi)$，其对偶系统 S' 的图模型为 $D'=(V',R',\phi')$，则将 D 中的控制变量变为输出变量,输出变量改为控制变量，将 D 中所有有向边反向,边权不变,所得的图即为 D'.

对偶性质: 系统 λ 条件 m 型状态信息结构行 (列) 能通的充要条件是其对偶系统 λ-条件 m 型状态信息结构列(行)能通.

证: $C_{onz}[(P_{A-m})_\lambda]=C_{onz}[I+A+\cdots+A^m]_\lambda=R_{onz}[I+A+\cdots+A^m]^T_\lambda$

$$= R_{onz}[I + A^T + \cdots + (A^T)^m]_\lambda = R_{onz}[P^T_{A-m}]_\lambda.$$

同理，
$$R_{onz}[P_{A-m}]_\lambda = C_{onz}[P^T_{A-m}]_\lambda.$$

同样还可以定义 λ 条件 m 型控制(输出、控制-输出)信息结构能通性与能通性指标等概念并解释其意义与讨论它们之间的对偶性.

关于分型能通性有如下性质.

在一定的 λ 值下，若系统 m 型信息结构能通，则 $m+1$ 型信息结构能通. 证明从略.

此性质的物理意义很清楚. 若系统能利用被控对象中长度 $l \leqslant m$ 的通道对状态全部施以控制，则必可以利用对象中长度 $l \leqslant m+1$ 的通道对状态施以控制. 由此性质可知:

(1) 0 型信息结构能通是最强的信息结构能通分型. 若 0 型能通，则其它的分型皆能通.

(2) $n-1$ 型信息结构能通是最弱的信息结构能通分型，且还知道分型能通是系统通常意义下的能通的充分条件.

三、系统信息结构分型能通性与分型可控可观[2] 性之间的关系

对于如下线性定常系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \tag{1}$$

该系统的图模型可按文献[6]提出的方法构造. 关于系统(1)，分型能通性与分型可控可观性之间有如下关系(以可控性为例说明):

性质 1: 对于系统 (1)，m 型控制信息结构行能通是系统 m 型能控的必要结构条件.

显然当 $m = n-1$ 时，就得到系统控制信息结构行能通是系统可控的必要结构条件这个结论.

性质 2: 对于系统(1)，能控性指标 μ_0 必大于等于控制信息结构行能通指标 m_0.

此性质说明: 要使系统可控，其控制信息长度 l 不会超过 μ_0 就可以做到. 以上性质证明从略.

值得指出的是，系统的能通性比系统的可控可观性来说是系统更基本的特性，以上分析也表明能通性与可控可观性之间有很多相似的性质，它不仅适于线性定常系统，而且适于只能用图模型描述的系统.

参　考　文　献

[1] 钱学森，宋健，工程控制论，科学出版社，1983.

[2] 关肇直，陈翰馥，线性控制系统的能控性与能观测性，科学出版社，1975.

[3] 陈贻源，模糊数学，华中工学院出版社，1984，3.

[4] 涂序彦，控制系统的最经济结构综合问题，自动化学报，**8**，1982，103—111.

[5] Barns, J. R., An Input/Output Approach to the Structure Analysis of Diagraph, *IEEE Trans., Syst. Man Cybern.*, Vol. **SMC-12** Jan/Feb., 1982.

[6] Šiljak, D. D., On Reachability of Dynamic System, *International Journal of Systems Science*: 8, 1977, 331—338.

A NEW ANALYSIS METHOD FOR LSS DIAGRAM MODEL

ZHANG JIE

(Beijing University of Iron and Steel Technoloby)

ABSTRACT

In this paper, using the fuzzy mathematical method, information structure model of Large Scale System (LSS) is discussed, and the detailed analysis methods, the matrix method and the diagram method, are given. In order to analyze the information strucute of LSS in detail, some new concepts such as subpassability and so on are proposed. The proposed methods are suitable not only to the system which can be described by mathematical model, but also to the system which can only be described by diagram model. At the end of the paper, the relationship between passability and controllability (observability) is discussed.