第15卷 第1期 自 动 化 学 报 Vol. 15, No. 1
1989 年 1 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 1989

一种基于采样系统性质分析的连续系统传函辨识新方法

张启人　　瞿志华
(中国社会科学院)　(长沙铁道学院)

摘　　要

本文研究了任一连续系统采样后的性质，提出了一种无需时频转换（FFT 运算）而直接求取连续系统传函模型的辨识新方法。它适用于在线或离线递推，计算简便、精确性好，且很容易推广到多输入多输出模型的辨识.

连续系统的辨识可采用相关函数法、富里叶变换和谱分析等方法，亦可采用最小二乘、随机逼近、辅助变量、极大似然和贝叶斯估计等方法. 前一类得到传函 $G(j\omega)$ 的数值;后一类仅得到离散模型,将其转换成连续传函一般需经过Z反变换和 FFT 运算. 只有在连续系统纯延迟被采样周期整除时才可简化为部分分式的计算，但实用中无法满足这个先决条件. 因此连续系统都须经过 FFT 运算,根据 Bode 图进行估计,只能离线辨识,计算量大且精确性难以保证. 本文根据所得的任一连续系统采样后的性质,结合离散模型已有的辨识方法，给出了连续系统在线辨识的新途径. 它不需Z反变换和 FFT 而由离散频域直接转换到连续频域,因此计算简便,精确性好.

1. 离散脉冲传函的一般性质

设连续系统的传递函数为 $G(s, \tau) = G(s)\cdot e^{-\tau Ts}$，其中 T 是采样周期，$\tau = \alpha + d$，$d\in[0, 1]$ 表示分数延迟，α 为非负整数，

$$G(s) = \frac{\prod_{i=1}^{m}(s-q_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-P_j)}k_p,\quad m\leqslant n-1.$$

相应的状态空间表达式为:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t+\tau T) = A\boldsymbol{x}(t+\tau T) + B\boldsymbol{u}(t),\quad \boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t). \tag{1}$$

根据Z变换公式,若 p_k 为 $G(p)/p$ 的诸极点，$\delta = 1 - d$，当 $0\leqslant d < 1$ 时有:

$$H(z) = Z^{-\alpha}(1-Z^{-1})\sum_k \mathrm{Res}\left[\frac{G(p)}{p}\,\frac{e^{\delta pT}}{Z-e^{pT}},\ p_k\right]. \tag{2}$$

同时,由(1)式可推出离散采样系统的状态方程,又可给出 $H(Z)$ 的另一表达式:

$$H(Z) = Z^{-\alpha}C[ZI-\Phi(T)]^{-1}[\theta_1(T)Z^{-1}+\theta_2(T)]. \tag{3}$$

本文于1986年10月3日收到.

式中，$\Phi(t)=\exp(At)$，$\theta_1(T)=\int_0^{dT}\Phi(T-s)Bds$，$\theta_2(T)=\int_{dT}^{T}\Phi(T-s)Bds$.

分析(2)和(3)式不难推出离散脉冲传函的一般性质：$H(Z)$ 的一般形式由(4)、(5)式给出；其极点由 $Z_i=\exp(p_iT)$ $(i=1,2,\cdots,n)$，$Z_j=0(j>n)$ 确定，其零点没有一般的简单闭合式；对于 T、d 的某些值，一些零点可能趋于无穷(即消失)；一般不存在极零对消.

$$H(Z)=\begin{cases}\dfrac{b_0Z^{n-1}+b_1Z^{n-2}+\cdots+b_{n-1}}{a_0Z^n+a_1Z^{n-1}+\cdots+a_n}Z^{-\alpha}, & d=0,\\ \dfrac{b_0Z^n+b_1Z^{n-1}+\cdots+b_n}{a_0Z^n+a_1Z^{n-1}+\cdots+a_n}Z^{-(\alpha+1)}, & 0<d<1,\\ \dfrac{b_1Z^{n-1}+b_2Z^{n-2}+\cdots+b_n}{a_0Z^n+a_1Z^{n-1}+\cdots+a_n}Z^{-(\alpha+1)}, & d=1,\end{cases}\tag{4}$$

$$\lim_{Z\to1}H(Z)(Z-1)^{\gamma}=\lim_{s\to0}s^{\gamma}G(s)，\ \gamma\ \text{代表重根数}.\tag{5}$$

2. 离散脉冲传函的极限性质

定理：设 $G(s,\tau)$ 和 $H(Z)$ 如前定义，则当 T 充分小时有：

$$H(Z)=Z^{-(\alpha+1)}K_p'\frac{\prod_{i=1}^{m}[Z-\exp(q_iT)]B_{n-m}(Z)}{\prod_{j=1}^{n}[Z-\exp(p_jT)]}+o(T^{n-m}),$$

其中 $K_p'=\dfrac{K_pT^{n-m}}{(n-m)!}$，$o(\cdot)$ 表示 · 的高阶无穷小，$B_n(Z)=b_0^nZ^n+b_1^nZ^{n-1}+\cdots+b_n^n$，$b_k^n=\sum_{l=1}^{k+1}(-1)^{k+1-l}(l-d)^n\binom{n+1}{k+1-l}$，$k\in\{0,1,\cdots,n\}$.

证明：本定理包含 Astrom[4] 的定理 1 为 $d=0$ 时的特殊情形，思路相同，故证明从略.

若被控系统受一具有有理谱密度的弱平稳随机噪声的扰动，由谱分解定理和实现定理可知，离散噪声传函的零点均可认为在单位圆上或圆内．因此根据上面定理，$C(Z)$ 的诸零点分成两部分，一部分与 $C(s)$ 的零点一一对应，另一部分趋于 $B_{n-m_c}(Z)$ 的稳定零点以及不稳定零点的倒数，其中 m_c 是 $C(s)$ 的阶数.

3. 连续系统辨识新方法

离散系统 CARMA 模型的结构辨识和参数估计已有一套较完整的方法．小采样周期极限情形是实用数字控制和测量方式的一种合理近似，因此下面着重讨论在这种情形下离散模型如何转换成连续传函．由定理可知，离散系统模型不存在零点消失，且可分成如下几个部分：

(1) $B_{n-m}(Z)$ 多项式．它只与 $n-m$ 和 d 的取值有关，其所有根均是负实数，不妨设共有 k 个．当离散模型的零点数目等于非零极点数时，$d\neq0$，且 $m=n-k$；否则 $d=0$，$m=n-k-1$．当 $d\neq0$ 时有：

$$B_{n-m}(Z)=b_0^kZ^k+b_1^kZ^{k-1}+\cdots+b_k^k，\ b_0^k=(1-d)^k，\ b_k^k=d^k.$$

根据根与系数的关系不难求出比值 $b_0^k/b_k^k=[(1/d)-1]^k$．它与放大倍数 K_p' 无

关,故可求得 d.

(2) 具有正实部的极零点. 它们与连续传函的极零点以 $s=(\ln Z)/T$ 一一对应,当 T 较小时可近似为 $s\approx(Z-1)/T$.

(3) 开环放大倍数 $K_p=\lim \frac{K_p'(n-m)!}{T^{n-m}}$, 计算 b_0^k 即可求出 K_p'. 但当 T 较大或参数估计有偏时, K_p 的误差将很显著,为此改用(5)式为标准求解 K_p.

对离散噪声传函来说 $d_c=0$, $m_e=n-k_c$. 连续噪声传函的放大倍数 K_c 只能由(5)式求取,因稳定化 $B_{n-m_c}(Z)$ 后其系数关系式已不复存在了.

综上所述,连续系统模型的辨识程序为:

① 采用标准算法进行离散系统 CARMA 模型结构不变量 n 和 α 的辨识以及参数估计.

② 将离散模型中各多项式因式分解.

③ 根据上面讨论的转换关系将离散模型直接转换成所待辨识的连续系统模型.

选用不同算法,步骤①可在线实现,亦可离线递推. 该程序继承了离散系统辨识算法的优点,计算简便,辨识结果具有良好的性质. 需要指出的是,如果采样数据中包含噪声,辨识结果与理论结果之间必存在偏差. 显然该偏差的性质完全取决于离散系统辨识算法的收敛性分析,这方面的结果就不一一赘述了.

传函模型与其它形式的模型(如状态空间方程)之间存在着确定的变换关系,已有一些方法可完成多输入多输出离散系统的辨识,所以可将上述方法推广到多输入多输出连续系统的辨识中去.

4. 仿真示例

本节给出一个简单例子的仿真结果来验证理论分析的结果. 给定连续系统为

$$G(s)=e^{-0.55s}/s(s+1).$$

采样周期 T 取为 1 秒,相应的离散模型为:

$$H_T(Z)=\frac{0.0876(Z+0.1451)(Z+5.3012)}{(Z-0.3679)(Z-1)}Z^{-1}.$$

该理论模型在阶跃输入作用下实施反馈控制,采用 LS 在线辨识算法得到其估计为:

$$\widetilde{H}_T(Z)=Z^{-1}\frac{0.0876(Z+5.3011)(Z+0.1452)}{(Z-1.0002)(Z-0.3678)}.$$

由此可知 $m=0$ 且 $\left(\frac{1}{d}-1\right)^2=\frac{1}{5.3011\times 0.1452}$, 即 $\tilde{d}=0.4673$. 由于 T 较大,只能采用 $s=\frac{1}{T}\ln Z$ 计算极零点, $\tilde{p}_1=0.0002$, $\tilde{p}_2=-1.0002$; 由 (5) 式得 $\widetilde{K}_p=1.0001$. 因此连续系统的估计为: $\widetilde{G}(s)=\widetilde{K}_p\frac{e^{-\tilde{d}Ts}}{(s-\tilde{p}_1)(s-\tilde{p}_2)}$.

当取采样周期 $\Delta=0.1$ 秒时,离散模型的估计为:

$$\widetilde{H}_\Delta(Z)=Z^{-1}\frac{0.001228(Z+0.1660)(Z+5.6418)}{(Z-1.0021)(Z-0.9029)}.$$

同样有 $m=0$，$\left(\frac{1}{d_\Delta}-1\right)^2=\frac{1}{0.1660\times 5.6418}$，解之得 $\tilde{d}_\Delta=0.4918$，即相对大采样周期的分数延迟是 $\tilde{d}_T=(\tilde{\alpha}_\Delta+\tilde{d}_\Delta)\cdot\Delta=0.54918$. 由 $s\approx\frac{Z-1}{T}$ 解出连续传函的极点为 $\tilde{p}_1\approx 0.021$，$\tilde{p}_2\approx -0.9710$，$K_p=0.951$. 这已是一个良好的估计. 若用 $s=\frac{1}{\Delta}\ln Z$ 计算可得 $p_1=0.021$，$p_2=-1.0214$，$K_p=1.0004$，精确性提高.

由此可见，本文所提出的算法是有效的，简便的，不失为连续系统辨识的一种好方法.

参　考　文　献

[1] 卢桂章，王秀峰，建模与辨识，南开大学，1983 年.

[2] 哥德温，G. C.，潘恩，R. L.，动态系统辨识——试验设计与数据分析，科学出版社，1983 年.

[3] 张启人，系统测辨导论，湖南省自动化学会，1982 年.

[4] Astrom, K., Hagander, P. and Sternby, G., Zeros of sampled system, *Automatica* Vol. **20**(1984), 31—38.

[5] Schuman, R., Lachmann, K. H. and Iserman, R., Towards applicability of parameter-adaptive control algorithms, Proc. 8th IFAC World Congr., Vol. **VII**, 1981, 22—28.

[6] Zhang, X. D. and Takeda, H., An order recursive generalized least squares algorithm for system identification, *IEEE Trans. Ac*, Vol. **30**(1985), 1224—1227.

A NEW METHOD FOR THE IDENTIFICATION OF CONTINUOUS SYSTEMS BASED ON THE ANALYSIS OF THE PROPERTY OF SAMPLED SYSTEM

Zhang Qiren

(*Chinese Academy of Social Sci.*)

Qu Zhihua

(*Changsha Railway Institute*)

Abstract

The property of a general continuous sampled system is analysed, and a new direct method for continuous transfer function identification without FFT is proposed. The algorithm is simple, rapid, and accurate, and can be realized on-line or off-line. Also it is straight to extend this method to MIMO system identification.